T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SİMETRİK GRUPLARDAKİ DÜZENSİZLİKLER

Hazırlayan
Hasan Tahsin GÜRBÜZ

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Hasan ARSLAN

Yüksek Lisans Tezi

Mart 2025
KAYSERİ

T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SİMETRİK GRUPLARDAKİ DÜZENSİZLİKLER

(Yüksek Lisans Tezi)

Hazırlayan
Hasan Tahsin GÜRBÜZ

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Hasan ARSLAN

Mart 2025
KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Adı-Soyadı: Hasan Tahsin GÜRBÜZ

İmza:

“Simetrik Gruplardaki Düzensizlikler” adlı Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi’ ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Hazırlayan	**Danışman**
Hasan Tahsin GÜRBÜZ	Dr. Öğr. Üyesi Hasan ARSLAN
İmza	İmza

Matematik ABD Başkanı

Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

İmza

TEŞEKKÜR

”Simetrik Gruplardaki Düzensizlikler” konulu tez çalışmasının seçiminde, sürecin yürütülmesinde, sonuçlandırmasında zaman ayıran ve hiçbir zaman yardımını emeğini esirgemeyen, çalışmam süresince bilgi, deneyim ve tecrübesini büyük bir sabır özverili bir şekilde paylaşan, her zaman desteğini esirgemeyen Değerli Öğretmenim Sayın Dr. Öğr. Üyesi Hasan ARSLAN’a teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca, sıkıntılı günlerimde hep yanımda olan ve tez yazma sürecimde beni daima motive eden canım annem Muazzez hanıma teşekkürü bir borç bilirim.

Tez yazma sürecinde oyunlarından feragat edip bilgisayarı bana bırakan çocuklarım Hamza Eren ve Mustafa Muhsin’e çok teşekkür ederim. Ayrıca iki evladımızın annesi, kahrımı çeken, her zaman maddi-manevi desteğini esirgemeyip sevgisini bende daima hissettiren değerli eşim Aylin hanıma çok teşekkür ederim.

Hasan Tahsin GÜRBÜZ

Mart 2025, KAYSERİ

SİMETRİK GRUPLARDAKİ DÜZENSİZLİKLER

Hasan Tahsin GÜRBÜZ

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Mart 2025
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Hasan ARSLAN

ÖZET

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde, temel kavramlar olan içerme-dışlama ilkesi, binomial inversiyon, binomial dönüşüm, q-binomial katsayı, Cauchy binomial teoremi, q-binomial inversiyon, adi üretici fonksiyonlar, üstel üretici fonksiyonlar, kuvvet serilerinin Cauchy çarpımı, Catalan sayıları, Dyck yolları ve desenden kaçınma kavramları ele alınmıştır.

İkinci bölümde, simetrik gruplar, inversiyon istatistiği, major indeksi, çoklu kümeler, çoklu kümerin permütasyonları, genelleştirilmiş binom teoremi, simetrik gruplardaki düzensizlikler ve özellikleri araştırılmıştır.

Üçüncü bölümde, major indeksinin simetrik gruplardaki düzensizlikler üzerindeki ağırlığı, bir permütasyonun düzensizlik parçası, ayrık iki permütasyonun karılması, bir permütasyonun altta kalan, aşan ve sabit kalan elemanları cinsinden karakterize edilmesi incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: İçerme-dışlama ilkesi, q-binomial katsayı, Catalan sayıları, Desenden kaçınma, Üretici fonksiyonlar, Düzensizlikler, Major indeksi.

DERANGEMENTS IN THE SYMMETRIC GROUPS

Hasan Tahsin GÜRBÜZ

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M. Sc. Thesis, March 2025
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Hasan ARSLAN

ABSTRACT

This thesis consists of three chapters.

In the first chapter, the basic concepts such as the concepts of inclusion-exclusion principle, binomial inversion, binomial transformation, q-binomial coefficient, Cauchy binomial theorem, q-binomial inversion, ordinary generating functions, exponential generating functions, Cauchy product of power series, Catalan numbers, Dyck paths and pattern avoidance are discussed.

In the second chapter, symmetric groups, inversion statistics, major index, multisets, permutations of multisets, generalized binomial theorem, derangements in the symmetric groups and their properties are investigated.

In the third chapter, the weight of the major index on the derangements in the symmetric groups, the derangement part of a permutation, the shuffle of two disjoint permutations, the characterization of a permutation in terms of the subcedant, excedant and fixed elements are examined.

Keywords: Inclusion-exclusion principle, q-binomial coefficient, Catalan numbers, Pattern avoidance, Generating functions, Derangements, Major index.

İÇİNDEKİLER

SİMETRİK GRUPLARDAKİ DÜZENSİZLİKLER

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK ii
YÖNERGEYE UYGUNLUK iii
KABUL VE ONAY iv
TEŞEKKÜR v
ÖZET vi
ABSTRACT vii
İÇİNDEKİLER viii
SİMGELER VE KISALTMALAR x
TABLOLAR LİSTESİ xii
ŞEKİLLER LİSTESİ xiii
GİRİŞ 1

1. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

1.1. İçerme-Dışlama İlkesi 5
1.2. Üretici Fonksiyonlar 17
1.3. Desenden Kaçınma…….…….. 32

2. BÖLÜM

SİMETRİK GRUPLARDAKİ DÜZENSİZLİKLER

2.1. Çoklu Kümeler Üzerindeki Permütasyon İstatiskleri…..…….……..42
2.2. Düzensizlikler…….…….……53

3. BÖLÜM

SİMETRİK GRUPLARDAKİ DÜZENSİZLİK POLİNOMLARI

3.1. Major İndeksinin Simetrik Gruplardaki Düzensizlikler Üzerindeki Etkimesi.....59

KAYNAKÇA 71

ÖZGEÇMİŞ.....74

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\binom{n}{k}$: n nin k lı kombinasyonu (binom katsayısı)

$\mathfrak{S}_A$: A nın bütün permütasyonlarının kümesi

$\lfloor\ \rfloor$: Tam değer fonksiyonu

$|A|$: A kümesinin eleman sayısı

$[n]$: $\{1,2,\cdots,n\}$ kümesi

$\mathfrak{S}_n$: $\{1,2,\cdots,n\}$ kümesi üzerindeki permütasyonların grubu

k^n : $[n]$ den $[k]$ ya tanımlanabilecek bütün fonksiyonların sayısı

C_n : $n-$yinci Catalan sayısı

d_n : $\mathfrak{S}_n$ deki düzensizliklerin sayısı

D_n : $\mathfrak{S}_n$ deki düzensizliklerin kümesi

$[n]_q!$: $n!-$in bilinen q analogu

$\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}$: Multinomial katsayı

$Av_n(\pi)$: π deseninden kaçınan bütün $n-$permütasyonların sayısı

$dp(\sigma)$: σ permütasyonunun $\mathfrak{S}_n$ deki düzensizlik parçası

$Sh(\pi,\sigma)$: π ve σ nın karılmalarıyla oluşan permütasyonların kümesi

$e(\sigma)$: σ permütasyonunun aşan elemanlarının kümeleri

$s(\sigma)$: σ permütasyonunun altta kalan elemanlarının kümeleri

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$: $\binom{n}{k}$ nın $q-$formu

$std\sigma$: σ permütasyonunun standartlaştırılması

$\bar{\sigma}$: σ permütasyonunun ters çevrilmesi

σ^c : σ permütasyonunun tümlemesi

$SYT(n,n)$: $(n,n)-$tipinde standart Young tablosu

$inv(\sigma)$: σ permütasyonunun inversiyon sayısı

$maj(\sigma)$: σ permütasyonunun major indeksi

$\left(\!\binom{A}{k}\!\right)$: A nın elemanları ile oluşturulan k elemanlı çoklu kümelerin koleksiyonu

$\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$: n elemanlı bir kümenin elemanları kullanılarak oluşturulan k elemanlı çoklu kümenin sayısı

$Des(w)$: w nin descent kümesi

F_q^n : q bir asal sayı olmak üzere F_q cismi üzerindeki $n-$boyutlu bir vektör uzayı

$\alpha^{\underline{n}}$: α nın düşen faktöriyeli (falling factorial)

$B(n)$: $2n$ uzunluklu seçim (ballot) dizilerinin kümesi

id_n : $\mathfrak{G}_n$ simetrik grubundaki $123\cdots n$ birim permütasyonu

$Dyck(n)$: $2n$ uzunluklu Dyck yollarının kümesi

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 1. Eratosthenes Kalburu yöntemiyle bulunan 1 ile 100 arasındaki asal sayılar…..8

Tablo 2. İnversiyon ve major indeksinin $\mathfrak{G}_3$ üzerinde eş dağılımı ……..……..…...….43

Tablo 3. Düzensizlik Olasılığı…….…..…….…….…...….55

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 0.1. $\mathfrak{G}_4$ teki düzensizlik……..……..……....2

Şekil 1.1. Dyck yolları……..……..…….20

Şekil 1.2. Bir kötü yol örneği.…….21

Şekil 1.3. Kötü yola denk alternatif bir yol ……21

Şekil 1.4.…….……...…..……....27

Şekil 1.5. *Dyck* (3) kümesi ([36]) …..…..……..27

Şekil 1.6. $(8,5)$ tipinde bir standart Young tablosu…….30

Şekil 1.7. *SYT*(3,3) deki bütün Young tabloları ……..31

Şekil 1.8. $\pi = 132$ ve $\sigma = 425613$ için diyagramlar ([33]) …….33

Şekil 1.9. $\mathfrak{G}_4$ de 132 desenini içeren permütasyonlar……....36

Şekil 1.10. $\mathfrak{G}_8$ de $132-$deseninden kaçınan bir permütasyonun yapısı ([10]) …….38

Şekil 1.11. $q = 68371542 \in Av_8(123)$ dan $g(q) = 67341258 \in Av_8(132)$ nun elde edilmesi……..……..39

Şekil 1.12. $\sigma \in Av_n(132)$ nin ayrıştırılması ([33])……....40

GİRİŞ

Catalan sayıları, kombinatoriyal teoride birçok problemin çözümünde kullanılabilen ayrı bir yere sahip özel bir sayı dizisidir. Adını Belçikalı matematikçi Eugène Charles Catalan $(1814-1894)$ dan almıştır. Catalan sayıları; n çift parantezin kaç farklı şekilde düzgün konumlanabileceğini (düzgün konumlanmakla kastedilen, açılan her parantezin kapanması ve bir parantez açılmadan kapatma parantezi konmamasıdır.), $n+1$ tane dala sahip ikili bir ağaç grafın kaç farklı şekilde oluşturulabileceğini, $n\times n$ karelik bir alanda köşegenin üzerine çıkmayacak şekilde sol alt köşeden sağ üst köşeye kaç farklı şekilde ulaşılabileceğini (Dyck yolları), çok yeni bir araştırma alanı olan desenden kaçınma, $n+2$ kenarlı bir konveks çokgenin köşegenler aracılığıyla kaç üçgene bölünebileceğini, 1 den n e kadar olan sayıların sıralı üçlü oluşturmamak koşuluyla kaç farklı şekilde dizilebileceğini, n basamaklı bir merdivenin n tane karoyla kaç farklı şekilde kaplanabileceğini, $\{1,2,\cdots,n\}$ kümesinin kesişmeyen parçalanmalarının sayısını, $2\times n$ boyutlu bir standart Young tablosunun kaç farklı şekilde oluşturulabileceğini ve bunlara benzer sayma problemlerinin nasıl çözülebileceğini gösterir.

Permütasyonlar, dikkat çekici derecede zengin bir kombinatoryal yapıya sahiptir. Bunun nedenlerinden biri, sonlu bir kümenin permütasyonunun, bir dizi, bir fonksiyon, ayrık döngülerin bir koleksiyonu, bir matris vb. gibi birçok eşdeğer argümanla temsil edilebilmesidir.

Kombinasyonel matematikte, bir düzensizlik, hiçbir elemanın orijinal konumunda görünmediği bir kümenin elemanlarının bir permütasyonudur. Başka bir deyişle, bir düzensizlik, sabit noktaları olmayan bir permütasyondur. n elemanlı bir kümenin düzensizlik sayısı, n yinci düzensizlik sayısı veya n yinci "de Montmort sayısı" (Pierre Remond de Montmort'tan) olarak bilinir. n elemanlı bir kümenin düzensizlik kümesi

D_n ile düzensizlik sayısı da d_n ile gösterilir. Örneğin; bir öğretmen A, B, C ve D öğrencilerine bir sınav yapmış olup hiçbir öğrencinin kendi sınav kağıdını notlandırmamak şartıyla birbirlerinin sınav kağıtlarını notlandırmalarını istemiştir. Bu değerlendirme işlemini öğretmen toplam 9 farklı şekilde gerçekleştirebilmekte olup buna ait görsel Şekil 0.1 de koyu desenli biçimde verilmiştir. Bu işlem $n=4$ için bir düzensizlik örneğidir.

A	B	C	D
A	B	D	C
A	C	B	D
A	C	D	B
A	D	B	C
A	D	C	B

B	A	C	D
B	**A**	**D**	**C**
B	C	A	D
B	**C**	**D**	**A**
B	**D**	**A**	**C**
B	D	C	A

C	A	B	D
C	**A**	**D**	**B**
C	B	A	D
C	B	D	A
C	**D**	**A**	**B**
C	**D**	**B**	**A**

D	**A**	**B**	**C**
D	A	C	B
D	B	A	C
D	B	C	A
D	**C**	**A**	**B**
D	**C**	**B**	**A**

Şekil 0.1. $\mathfrak{G}_4$ teki düzensizlik

Permütasyonlarda inversiyon kavramı Cramer [14] tarafından 1750 yılında $n\times n$ tipindeki bir matrisin aşağıda verilen

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \vdots \ \ddots \ \vdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma=\sigma_1\cdots\sigma_n\in\mathfrak{G}_n} (-1)^{inv(\sigma_1\cdots\sigma_n)}\, a_{1\sigma_1}\cdots a_{n\sigma_n}$$

determinant formülünde kullanılmak üzere tanıtıldı. Burada $inv(\sigma_1\cdots\sigma_n)$ ile $\sigma=\sigma_1\cdots\sigma_n$ permütasyonlarının inversiyon sayısı gösterilmektedir. Bu inversiyon sayısının $\mathfrak{G}_n$ grubu üzerindeki dağılımının

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{G}_n} q^{inv\sigma} = [n]_q!$$

üretici fonksiyonuna eşit olduğu Rodriguez [30] tarafından 1839 yılında gösterilmiştir. Burada $[k]_q := 1+q+\cdots+q^{k-1}$ ve $[n]_q! := [1]_q[2]_q\cdots[n]_q$ dur. $\sigma=\sigma_1\cdots\sigma_n\in\mathfrak{G}_n$ için σ nın *indirgenmiş (descent) kümesi* $Des(\sigma)=\{i:\sigma(i)>\sigma(i+1) \text{ ve } 1\le i\le n-1\}$ ve σ nın descentlerinin sayısı ise $des(\sigma)=|Des(\sigma)|$ şeklinde verilir. $\sigma\in\mathfrak{G}_n$ in *major indeksi*

$$maj(\sigma) = \sum_{i \in Des(\sigma)} i$$

MacMahon [26] tarafından 1915 yılında tanımlanmıştır. Aynı zamanda MacMahon [26] çalışmasında inversiyon sayısı ve major indeksinin $\mathfrak{S}_n$ üzerinde eş dağılımlı olduğunu, yani

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{inv(\sigma)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{maj(\sigma)} = [n]_q ! \qquad (0.1)$$

eşitliğini ispatlamıştır. Dolayısıyla MacMahon'un anısına inversiyon istatistiği ile eş dağılımlı olan bir permütasyon istatistiğine "*Mahonian*" denir.

(0.1) eşitliğinin ilk birebir ve örten ispatını 1968 yılında Foata [18], birebir ve örten dönüşümler yarımıyla ikinci kombinatoriyal ispatını da 1975 yılında Carlitz [11] vermiştir.

$\mathfrak{S}_n$ deki düzensizliklerin kümesi üzerinde tanımlı

$$\sum_{\sigma \in D_n} q^{maj(\sigma)}$$

polinomu için Gessel çok zarif ve güzel bir formülü

$$d_n(q) = \sum_{\sigma \in D_n} q^{maj(\sigma)} = [n]_q ! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{[k]_q !} q^{\binom{k}{2}} \qquad (0.2)$$

olarak elde etmiştir (Gessel bunu daha sonra [21] de yayınlamıştır). Bu polinom üzerine daha sonra Garsia & Remmel [20] ve Wachs [37] çalışmıştır. Garsia & Remmel [20] tarafından $\mathfrak{S}_n$ üzerindeki $q-$düzensizlik sayıları major indeksi inversiyon istatistiği kullanılarak kombinatorik olarak yorumlamıştır. Aynı zamanda $\mathfrak{S}_n$ üzerindeki bu $q-$ düzensizlik sayıları [15] ve [16] da ele alınmıştır. Wachs [37] tarafından (0.2) nin birebir ve örten ispatı çok teknik bir şekilde verilmiştir. Chow [12,13] işaretli permütasyonların grubu olan B_n için (0.2) nin analogu olan formülü türetmek

amacıyla major indeksi yerine Adin & Roichman [1] tarafından tanımlanan ve Mahonian bir istatistik olan flag-major indeksini kullanarak Wachs [37] deki yaklaşımını genelleştirmiştir.

Ji & Zhang [24] görüntü kümesinde çift sayıda negatif işaretin bulunduğu permütasyonların grubu için (0.2) nin analogu olan formülü türetmek amacıyla major indeksi yerine Biagioli & Caselli [7] tarafından tanımlanan ve Mahonian bir istatistik olan D_{maj} indeksini kullanarak Wachs'un [37] deki yaklaşımını genelleştirmiştir.

Assaf [5] genelleştirilmiş simetrik grup olan $G(m,1,n)$ için (0.2) nin bir genelleştirilmesi olan formülü türetmek amacıyla farklı bir major indeksi tanımlamış ve Wachs'un [37] deki yaklaşımının genel formunu vermiştir.

Biz bu tez çalışmasında $q-$düzensizlik polinomları için en temel çalışma olan Wachs'un [37] çalışmasını detaylı bir biçimde inceleyeceğiz.

Bu tez sadece bir araştırma ve inceleme çalışması olup ilgili konuya herhangi bir yenilik getirmemektedir.

1. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde içerme-dışlama ilkesi, örten fonksiyon sayısı, Binomial inversiyon, Cauchy binomial teoremi, $q-$Binomial inversiyon olarak bilinen Gauss inversiyonu, üretici fonksiyonlar, Catalan sayıları, Dyck yolları, seçim dizisi ve desenden kaçınma gibi temel kavramlar [10, 31, 36] çalışmaları referans alınarak verilecektir.

1.1. İçerme-Dışlama İlkesi

Tanım 1.1.1. İki veya daha çok kümenin birleşiminin eleman sayısını hesaplarken kimilerini eklediğimiz kimilerini çıkardığımız prensip *içerme-dışlama ilkesi* olarak tanımlanmaktadır [32, 33].

İçerme-dışlama ilkesi ile ilgili temel teoremi aşağıda vereceğiz.

Teorem 1.1.2. Her bir $i=1,\cdots,n$ için A_i ler sonlu elemanlı kümeler olmak üzere,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}\left|A_i\cap A_j\right| + \sum_{1\le i<j<k\le n}\left|A_i\cap A_j\cap A_k\right| - \ldots + (-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| \qquad (1.1)$$

dir [32, 33].

İspat. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ kümesinden alınan her bir elemanın (1.1) eşitliğinin sağ tarafında yalnızca bir defa sayıldığını göstermeliyiz. Bir $a\in\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ için bu a elemanını içeren kümelerin $A_{h_1}, A_{h_2}, \cdots, A_{h_r}$ olduğunu varsayalım, burada $1\le h_1 < h_2 < \cdots < h_r \le n$ dir. Bu a elemanı; $\sum_{i=1}^{n}|A_i|$ toplamında $\binom{r}{1}$ defa, $\sum_{1\le i<j\le n}\left|A_i\cap A_j\right|$ toplamında $\binom{r}{2}$ defa, $\sum_{1\le i<j<k\le n}\left|A_i\cap A_j\cap A_k\right|$

toplamında $\binom{r}{3}$ defa ve benzer şekilde devam edilerek $\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le n}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_r}\right|$ toplamında ise $\binom{r}{r}$ defa sayılır. Dolayısıyla bu eleman (1.1) eşitliğinin sağ tarafında tam olarak,

$$\binom{r}{1}-\binom{r}{2}+\binom{r}{3}-\cdots+(-1)^{r-1}\binom{r}{r}$$

defa sayılmış olur. Binom teoreminden $(-1+1)^r=0=\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-1)^j$ olduğundan

$$\binom{r}{1}-\binom{r}{2}+\binom{r}{3}-\cdots+(-1)^{r-1}\binom{r}{r}=\binom{r}{0}=1$$

elde edilir. Böylece, $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ birleşimindeki her bir eleman (1.1) eşitliğin sağ tarafı ile sadece bir kez sayılmış olup ispat tamamlanır. ■

(1.1) eşitliğini göz önüne aldığımızda, içerdiklerimiz toplama olarak ve dışladıklarımız ise çıkarma olarak hesaplamada kendisini göstermektedir.

Örnek 1.1.3. Boştan farklı A, B, C ve D kümeleri için içerme-dışarma ilkesi

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C\cup D|=&|A|+|B|+|C|+|D|-|A\cap B|-|A\cap C|-|A\cap D|-|B\cap C|-|B\cap D|-|C\cap D|\\&+|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D|+|B\cap C\cap D|-|A\cap B\cap C\cap D|\end{aligned}$$

şeklindedir.

Şimdi bir n pozitif tamsayısı için $[n]:=\{1,2,\ldots,n\}$ olsun. Teorem 1.1.2 den faydalanarak $[n]$ den $[k]$ ya tanımlı örten fonksiyonların sayısını hesaplayan aşağıdaki teoremi vereceğiz.

Teorem 1.1.4. $[n]$ den $[k]$ ya tanımlı örten fonksiyonların sayısı

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\binom{k}{j}(k-j)^{n} \tag{1.2}$$

dir [32].

İspat. $A_1, A_2, \ldots, A_k$ kümeleri her bir $i = 1, \cdots, k$ için,

$$A_i = \left\{ f : [n] \to [k], \left\{ f^{-1}(i) \right\} = \varnothing \right\}$$

olacak şekilde tanımlansın. Dolayısıyla, $[n]$ den $[k]$ ya tanımlı örten fonksiyonların sayısı

$$k^n - \left| A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \right|$$

şeklindedir, burada k^n, $[n]$ den $[k]$ ya tanımlı bütün fonksiyonların sayısıdır. Teorem 1.1.2 den ve $\left| A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j} \right| = (k-j)^n$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left| A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \right| &= \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_j \le k} \left| A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j} \right| \\ &= \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\binom{k}{j}(k-j)^{n} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $[n]$ den $[k]$ ya tanımlı örten fonksiyonların sayısı

$$\begin{aligned} k^n - \left| A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \right| &= k^n - \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\binom{k}{j}(k-j)^{n} \\ &= k^n + \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j}\binom{k}{j}(k-j)^{n} \\ &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\binom{k}{j}(k-j)^{n} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. ■

Örnek 1.1.5. Beş elemanlı bir kümeden 3 elemanlı bir kümeye tanımlanabilecek örten fonksiyon sayısı $3^5-\binom{3}{1}.2^5+\binom{3}{2}.1^5=150$ dir.

Teorem 1.1.6. n bir bileşik sayıdır ancak ve ancak n nin $\sqrt{n}$ yi geçmeyen bir asal çarpanı vardır [3, 32].

İspat. n bir bileşik sayı olsun. Bu durumda $n=ab$, $1<a\le b<n$ olacak şekilde a ve b tamsayıları mevcuttur. Burada $a\le\sqrt{n}$ dir. Eğer $a>\sqrt{n}$ olsaydı $n=ab\ge a^2>n$ olurdu. Bu da bir çelişki olacağı için $a\le\sqrt{n}$ dir. Aritmetiğin temel teoremi gereğince a nın bir p asal çarpanı mevcuttur. $n=ab$ olduğu için p aynı zamanda $n-$nin de bir asal çarpanıdır ve $p\le a\le\sqrt{n}$ dır. İspatın diğer tarafı açıktır. ■

Sonuç 1.1.7. n bir asal sayıdır ancak ve ancak n nin $\sqrt{n}$ yi geçmeyen hiç bir asal çarpanı yoktur [3].

Örnek 1.1.8. (Eratosthenes Kalburu) [3, 32] Verilen bir n pozitif tam sayısından küçük bütün asalları bulmak için başvurulan bir metottur. Pratik olmamasına rağmen basit bir yöntem olmasından dolayı kullanışlıdır. Bu metotta 2 sayısından itibaren verilen n tam sayısına kadar bütün tam sayılar yazılır, bunlar arasında bileşik sayı olanlar elenmek suretiyle asal olanlar bulunmuş olur. Metodu göstermek için 100 den küçük asalları bulalım. 100 den küçük her bileşik sayının $\sqrt{100}=10$ dan küçük bir asal çarpanı olacağı için 100 den küçük sayıların $2,3,5,7\le\sqrt{100}=10$ bulunduktan sonra 2,3,5 ve 7 gibi asalardan birisi ile bölünüp bölünmeyeceği araştırılır. Aşağıdaki tabloda Eratosthenes Kalburu yöntemini uygulayarak 1 ile 100 arasındaki asal sayıların bulunabileceği görülmektedir.

Tablo 1. Eratosthenes Kalburu yöntemiyle bulunan 1 ile 100 arasındaki asal sayılar

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	
44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	
58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	
72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	
86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Burada ilk önce 2 den 100 e kadar olan tam sayılar yazılır. Daha sonra sırası ile önce 2 ile bölünebilenlerin üzeri çizilir, daha sonra 3 ile bölünebilenlerin üzeri çizildi, daha sonra 5 ile bölünebilenlerin ve en son olarak 7 ile bölünebilenlerin üzeri çizilmek suretiyle bileşik sayılar elenmiş olur. Geriye koyu renkli kalan saylar asal sayılardır.

Erastostheres Kalburu için kullandığımız mantığın aynısından faydalanarak içerme-dışlama ilkesi ile belirli bir n pozitif tam sayısından küçük olan tüm asal sayıların kaç tane olduğunu bulabiliriz. Bir bileşik tam sayının kendi karekökünden büyük olmayan bir asal sayıya bölünmesi gerektiğini hatırlayalım. Bu şekilde, 100 ü geçmeyen asal sayıları bulmak için, 100 ü geçmeyen bileşik sayıların $\sqrt{100}=10$ dan büyük olmayan bir asal çarpanı olması gerektiğine dikkat edelim. 10 dan büyük olmayan tüm asal sayılar sadece $2,3,5$ ve 7 olduğu için, 100 ü geçmeyen asal sayılar ise bu sayılarla birlikte 1 ile 100 arasındaki bütün pozitif tamsayılardan $2,3,5$ ve 7 nin hiçbirine bölünemeyen tam sayılardan oluşmaktadır.

İçerme-dışlama ilkesini uygulamak için, P_2 ile 2 ye bölünebilen tamsayıların kümesi, P_3 ile 3 e bölünebilen tamsayıların kümesi, P_5 ile 5 e bölünebilen tamsayıların kümesi ve P_7 ile de 7 ye bölünebilen tamsayıların kümesini gösterelim. Dolayısıyla, 100 den büyük olmayan asalların sayısı $4+\left|P_2^t \cap P_3^t \cap P_5^t \cap P_7^t\right|$ şeklindedir. Burada, her bir $i=2,3,5,7$ için P_i^t ile P_i kümesinin $[100]$ kümesine göre tümlemesi gösterilmektedir. Böylece, $\left|P_2^t \cap P_3^t \cap P_5^t \cap P_7^t\right|$ ifadesi 2, 3, 5 ve 7 tamsayılarının hiç birisi ile bölünemeyen ve 100 den küçük veya eşit olan pozitif tam sayıların sayısını vermektedir.

1 sayısı ne asal ne de bileşik sayı olduğu için 1 den büyük ve 100 ü geçmeyen 99 pozitif tam sayı mevcut olduğundan ve içerme-dışlama ilkesinden;

$$\begin{aligned}\left|P_2^t \cap P_3^t \cap P_5^t \cap P_7^t\right| &= 99-\left|P_2 \cup P_3 \cup P_5 \cup P_7\right| \\ &= 99-\left|P_2\right|-\left|P_3\right|-\left|P_5\right|-\left|P_7\right| \\ &\quad +\left|P_2 \cap P_3\right|+\left|P_2 \cap P_5\right|+\left|P_2 \cap P_7\right|+\left|P_3 \cap P_5\right|+\left|P_3 \cap P_7\right|+\left|P_5 \cap P_7\right| \\ &\quad -\left|P_2 \cap P_3 \cap P_5\right|-\left|P_2 \cap P_3 \cap P_7\right|-\left|P_2 \cap P_5 \cap P_7\right|-\left|P_3 \cap P_5 \cap P_7\right| \\ &\quad +\left|P_2 \cap P_3 \cap P_5 \cap P_7\right|\end{aligned}$$

şeklindedir. O halde,

$$\begin{aligned}\left|P_2^t \cap P_3^t \cap P_5^t \cap P_7^t\right| &= 99-\left\lfloor\frac{100}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{100}{3}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{100}{5}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{100}{7}\right\rfloor \\ &\quad+\left\lfloor\frac{100}{6}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{10}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{14}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{15}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{21}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{35}\right\rfloor \\ &\quad-\left\lfloor\frac{100}{30}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{100}{42}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{100}{70}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{100}{105}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{210}\right\rfloor \\ &= 99-50-33-20-14+16+10+7+6+4+2-3-2-1 \\ &= 21\end{aligned}$$

olduğundan 100 den büyük olmayan 25 tane asal sayı vardır.

Önerme 1.1.9. Negatif olmayan m ve n tamsayıları için

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}(-1)^k=(-1)^n\,\delta_{nm} \tag{1.3}$$

olup burada $\delta_{nm}=\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$ dir [25].

İspat. Negatif olmayan m ve n tamsayılarını sabitleyelim. E kümesini

$$E=\left\{(T,S):T\subset S\subset[n],|T|=m \text{ ve } S \text{ nin eleman sayısı çift}\right\}$$

şeklinde tanımlayalım. $|S|=k$ çift ise, bu durumda her bir k çift tamsayısı için $[n]$ kümesinden $T\subset S\subset[n]$ ve $|T|=m$ olacak şekildeki (T,S) sıralı çiftlerini seçmek için toplam $\binom{n}{k}\binom{k}{m}$ olası yol vardır. Bu durumda

$$|E|=\sum_{k\,\text{çift}}\binom{n}{k}\binom{k}{m}$$

dir. Benzer şekilde

$$O=\left\{(T,S):T\subset S\subset[n],|T|=m \text{ ve } S \text{ nin eleman sayısı tek}\right\}$$

kümesini tanımlarsak bu kümenin eleman sayısı da

$$|O| = \sum_{k\,\text{tek}} \binom{n}{k}\binom{k}{m}$$

dir.

Şimdi $n < m$ ise $E = O = \varnothing$ dir. Eğer $n = m$ ve çift ise bu durumda $O = \varnothing$ ve $E = \{[n],[n]\}$ olur. Eğer $n = m$ ve tek ise bu durumda $E = \varnothing$ ve $O = \{[n],[n]\}$ olur. Böylece her iki durumda da $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m}(-1)^k = (-1)^n \delta_{nm}$ eşitliği sağlandığı görülür.

Eğer $n > m$ ise, bu durumda (1.3) eşitliğinin sağ tarafı 0 olacağı için $|E| = |O|$ olduğunu göstermeliyiz. $[n]$ nin T de olmayan en büyük elemanı x olsun ve $A = E \cup O$ tanımlayalım. Δ kümelerdeki simetrik fark gösterimi olmak üzere $(S\Delta\{x\})\Delta\{x\} = S$ olduğu için $f : A \to A$, $f((T,S)) = (T, S\Delta\{x\})$ fonksiyonu A üzerinde bir involüsyondur, yani $f^{-1} = f$ dir. Burada dikkat edilmelidir ki f fonksiyonu S kümesinin yapısını değiştirmektedir, çünkü $S\Delta\{x\} = \begin{cases} S \setminus \{x\} & x \in S \\ S \cup \{x\} & x \notin S \end{cases}$ dir. Bu yüzden f involüsyonu hiçbir elemanı sabit bırakmayıp aynı zamanda $f(E) = O$ ve $f(O) = E$ dir. Dolayısıyla $|E| = |O|$ olduğu elde edilir ki, bu ise $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m}(-1)^k = 0$ olduğu anlamına gelir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Not 1.1.10. Eğer $n \geq m \geq 0$ ise bu durumda (1.3) ifadesi

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m}(-1)^{n-k} = \delta_{nm} \qquad (1.4)$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi aşağıdaki teoremde kombinatorikte önemli bir araç olan Binomial inversiyonu vereceğiz.

Teorem 1.1.11. (Binomial İnversiyon) $(a_n)_{n\geq 0}$ ve $(b_n)_{n\geq 0}$ dizileri verilsin. Bu durumda $a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$ dır ancak ve ancak $b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$ dır [2, 23].

İspat. İlk olarak $b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$ eşitliğinin sağlandığını varsayalım. Bu durumda, (1.4) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} a_j \\
&= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{-j} a_j \sum_{k=j}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{j} \\
&= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{-j} a_j (-1)^n \delta_{nj} \\
&= a_n (-1)^{-n} (-1)^n \delta_{nn} = a_n
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yönün ispatı da (1.4) eşitliğinden faydalanarak benzer olarak yapılabilir.■

Not 1.1.12. Binomial inversiyonun simetrik versiyonu,

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} b_k \text{ ancak ve ancak } b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a_k$$

şeklindedir.

Örnek 1.1.13. $n-1$ elemanlı bir kümenin alt küme sayısı $2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$ olup

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$$

yazabiliriz. Binomial inversiyon teoreminden

$$n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k2^{k-1}$$

elde ederiz.

Tanım 1.1.14. $(a_n)_{n\geq 0}$ dizisi verilsin ve $(b_n)_{n\geq 0}$ dizisi

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k (-1)^k$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $(b_n)_{n\geq 0}$ dizisine $(a_n)_{n\geq 0}$ dizisinin *binomial dönüşümü* denir [25, 29].

Örnek 1.1.13 göz önüne alındığında $(n)_{n\geq 0}$ dizisi $(n2^{n-1})_{n\geq 0}$ dizisinin binomial dönüşümüdür.

Örnek 1.1.15. $(n)_{n\geq 0}$ dizisinin binomial dönüşümü

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k(-1)^k &= n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}(-1)^k \\ &= -n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}(-1)^k \\ &= -n(-1+1)^{n-1} = 0\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $1,1,1,\cdots$ ve $(n^2)_{n\geq 0}$ dizilerinin de binomial dönüşümleri 0 dizisidir. Ayrıca, sabit bir a reel sayısı için $(a^n)_{n\geq 0}$ dizisinin binomial dönüşümü $\left((1-a)^n\right)_{n\geq 0}$ dizisidir.

Tanım 1.1.16. Negatif olmayan bir n tamsayısı için $[n]_q$ ile gösterilen q - *tamsayısı*

$$[n]_q := \frac{1-q^n}{1-q} = 1+q+\cdots+q^{n-1} \qquad (1.5)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $q=1$ alınırsa $[n]_q = n$ elde edilir [10, 33, 35].

q-faktöriyel $[n]_q!$

$$[n]_q!:=[1]_q[2]_q\cdots[n]_q \tag{1.6}$$

şeklinde ve $0\le k\le n$ olacak şekildeki her k için anlamlı olan q- *binomial katsayı* veya *Gaussian binomial katsayı* olarak adlandırılılan $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ ifadesi

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!} \tag{1.7}$$

olarak tanımlanır [27,35]. Eğer $k>n$ ise bu durumda $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = 0$ dır. Özel olarak $q=1$ alınırsa, $[n]_q!=n!$ ve $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \binom{n}{k}$ elde edilir. Örneğin

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}_q &= \frac{[5]_q!}{[3]_q![2]_q!} \\ &= \frac{\left(1+q+q^2+q^3\right)\left(1+q+q^2+q^3+q^4\right)}{(1+q)} \\ &= 1+q+2q^2+2q^3+2q^4+q^5+q^6\end{aligned}$$

dır. Binomial katsayılarla ilişkili olan klasik Pascal özdeşliği

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

şeklindedir. Şimdi q-binomial katsayılar ile ilgili Pascal özdeşliğini aşağıdaki önermede vereceğiz.

Önerme 1.1.17. $0\le k\le n$ olacak şekilde her k için

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k}\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q \tag{1.8}$$

özdeşliği vardır [27, 33].

İspat. Eşitliğin sağ tarafından yola çıkarak bunun $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ ifadesine eşit olduğunu göstereceğiz. (1.6) ve (1.7) tanımlarını ve $q^{n-k}[k]_q + [n-k]_q = [n]_q$ olduğunu göz önünde bulundurduğumuzda

$$\begin{aligned} q^{n-k}\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q &= q^{n-k}\frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q![n-k]_q!} + \frac{[n-1]_q!}{[k]_q![n-1-k]_q!} \\ &= \frac{q^{n-k}\left([n-1]_q![k]_q + [n-1]_q![n-k]_q\right)}{[k]_q![n-k]_q!} \\ &= \frac{[n-1]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}\left(q^{n-k}[k]_q + [n-k]_q\right) \\ &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Aşağıda Binom teoreminin $q-$formu olan Cauchy binomial teoremi vereceğiz.

Teorem 1.1.18. (Cauchy Binomial Teoremi) Negatif olmayan her n tamsayısı için

$$\prod_{i=0}^{n-1}\left(1+q^{i}t\right) = \sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q t^k$$

dır [17, 33].

İspat. ***Birinci İspat.*** İspatı n üzerinden tümevarımla yapacağız. $n=1$ için durum açıktır. Şimdi $n>0$ olsun. (1.8) eşitliğinden faydalanarak ve tümevarım hipotezini kullanarak

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q t^k &= \sum_{k=0}^{n-1} q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q t^k + \sum_{k=1}^{n} q^{\binom{k}{2}+n-k}\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q t^k \\ &= (1+t)(1+qt)\cdots\left(1+q^{n-2}t\right) + q^{n-1}t\sum_{k=1}^{n} q^{\binom{k}{2}-k+1}\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q t^{k-1} \end{aligned}$$

$$= (1+t)(1+qt)\cdots(1+q^{n-2}t) + q^{n-1}t\sum_{k=1}^{n} q^{\binom{k-1}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q t^{k-1}$$

$$= (1+t)(1+qt)\cdots(1+q^{n-2}t) + q^{n-1}t\sum_{k=0}^{n-1} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q t^{k}$$

$$= (1+t)(1+qt)\cdots(1+q^{n-2}t) + q^{n-1}t(1+t)(1+qt)\cdots(1+q^{n-2}t)$$

$$= (1+t)(1+qt)\cdots(1+q^{n-2}t)(1+q^{n-1}t) = \prod_{i=0}^{n-1}(1+q^{i}t)$$

elde edilir.

İkinci İspat. $f(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(1+q^{i}x)$ dersek $f(x)$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(q)x^k$ olarak yeniden yazabileceğimiz iki değişkenli bir polinom olarak ele alınabilir. Burada $a_0(q) = 1$ olmak üzere $a_k = a_k(q)$, q nun bir polinomudur. Buradan $f(qx) = \prod_{i=0}^{n-1}(1+q^{i+1}x) = (1+qx)\cdots(1+q^{n-1}x)(1+q^{n}x)$ ve aynı zamanda $f(x)(1+q^{n}x) = (1+x)(1+qx)\cdots(1+q^{n-1}x)(1+q^{n}x)$ olduğu için

$$f(x)(1+q^{n}x) = (1+x)\,f(qx) \qquad (1.9)$$

eşitliği elde edilir. (1.9) eşitliğinin her iki tarafındaki x^k teriminin katsayısını $a_k q^k + a_{k-1}q^{k-1} = a_k + q^n a_{k-1}$ şeklinde yazarız. Böylece $\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{q^n - q^{k-1}}{q^k - 1}$ olup

$a_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdots \frac{a_1}{a_0} \cdot a_0$ elde edilir. Dolayısıyla $f(x)$ de x^k teriminin katsayısı olan a_k (1.7) eşitliği dikkate alındığında

$$a_k = \frac{q^n - q^{k-1}}{q^k - 1} \cdot \frac{q^n - q^{k-2}}{q^{k-1} - 1} \cdots \frac{q^n - 1}{q - 1} = q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$$

olarak bulunur ve ispat tamamlanır. ■

Aşağıda $q-$binomial inversiyon olarak da bilinen Gauss inversiyon teoremini vereceğiz.

Teorem 1.1.19. (Gauss İnversiyon Teoremi) a_n ve b_n terimleri karmaşık sayı olan iki dizi olsun. Böylece negatif olmayan her bir n tamsayısı için $a_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q b_k$ olması için gerek ve yeter şart $b_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{n-k}{2}} (-1)^{n-k} a_k$ olmasıdır [2].

1.2. Üretici Fonksiyonlar

Tanım 1.2.1. Verilen bir $(a_n)_{n\geq 0}$ dizisinin terimlerini katsayı kabul eden

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

kuvvet serisine $(a_n)_{n\geq 0}$ dizinin *adi üreteci fonksiyonu* denir [33, 38].

Tanım 1.2.2. Verilen bir $(a_n)_{n\geq 0}$ dizisinin terimlerini katsayı kabul eden

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

kuvvet serisine $(a_n)_{n\geq 0}$ dizinin *üstel üreteci fonksiyonu* denir [33, 38].

Üretici fonksiyonlar aslında dizilerin kodlanmış formu olarak da düşünülebilir. Örneğin $1, 1, \cdots$ sabit dizisine ait adi üretici fonksiyon

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

şeklinde olup $|x| < 1$ olacak şekildeki her x reel sayısı için $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ dir.

Yine 1, 1, ⋯ dizisine ait üstel üretici fonksiyon ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

biçiminde olup her x reel sayısı için $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ dir. Dolayısıyla $1,1,\cdots,1$ sabit dizisinin adi üretici fonksiyonunun kapalı formu $\frac{1}{1-x}$ ve üstel üretici fonksiyonun kapalı formu ise e^x dir. İşin aslına bakılırsa, $\frac{1}{1-x}$ fonksiyonunun Maclaurin seri açılımı yazıldığında negatif olmayan her n tamsayısı için x^n teriminin katsayısı $1,1,\cdots,1$ sabit dizisinin terimlerini vermektedir. Benzer şekilde e^x fonksiyonunun Maclaurin seri açılımı yazıldığında her bir $n \geq 0$ tamsayısı için $\frac{x^n}{n!}$ teriminin katsayısı yine $1,1,\cdots,1$ sabit dizisinin terimlerine karşılık gelmektedir.

Örnek 1.2.3. $(a_n) = (3^n)$ dizisinin adi üretici fonksiyonunun kapalı formunu $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n = \frac{1}{1-3x}$ ve üstel üretici fonksiyonunun kapalı formu ise $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \frac{x^n}{n!} = e^{3x}$ dir.

Tanım 1.2.4. Kompleks katsayılı $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ iki kuvvet serisinin *Cauchy çarpımı*, her $n \geq 0$ tamsayısı için $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ olmak üzere,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

olarak tanımlanır [35].

Örnek 1.2.5. $(x+y)^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x^{\ell} y^{n-\ell}$ Binom teoremini Cauchy çarpımı yardımıyla ispatlayalım. Bunun için her $x \in \mathbb{R}$ için $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ eşitliğinden yararlanacağız. Böylece

$$e^{x+y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^x e^y = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{n} \frac{x^{\ell}}{\ell!} \cdot \frac{y^{n-\ell}}{(n-\ell)!} \right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{n} \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} x^{\ell} y^{n-\ell} \right) \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x^{\ell} y^{n-\ell} \right) \frac{1}{n!}$$

olup $\sum_{n=0}^{\infty} (x+y)^n \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x^{\ell} y^{n-\ell} \right) \frac{1}{n!}$ eşitliğinden $(x+y)^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x^{\ell} y^{n-\ell}$ Binom teoremi elde edilir [17].

Tanım 1.2.6. $(a_n)_{n\geq 0}$ ve $(b_n)_{n\geq 0}$ dizilerine ait üstel üretici fonksiyonlar sırasıyla

$$\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} \text{ ve } \sum_{n\geq 0} b_n \frac{x^n}{n!}$$

olsun. Bu durumda bu iki serinin Cauchy çarpımı

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n\geq 0} b_n \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i!} \cdot \frac{b_{n-i}}{(n-i)!} \right) x^n$$
$$= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!\cdot(n-i)!} \cdot a_i b_{n-i} \right) \frac{x^n}{n!}$$
$$= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i} \right) \frac{x^n}{n!}$$

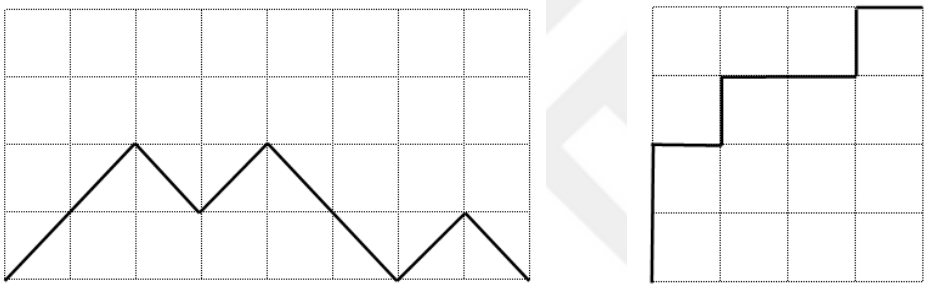
şeklinde verilir [35].

Tanım 1.2.7. $C_0 = 1$ ve her n pozitif tamsayısı için

$$C_n = \frac{1}{1+n} \binom{2n}{n}$$

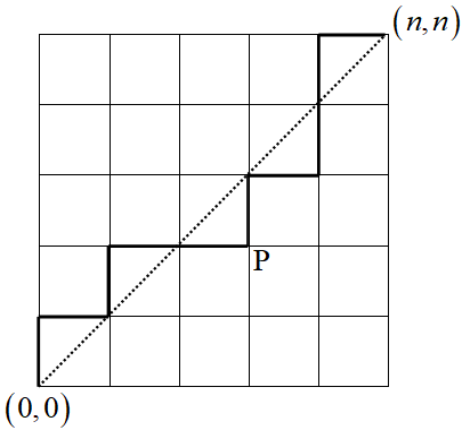
biçiminde tanımlanan C_n pozitif tamsayısına $n-$ *yinci Catalan sayısı* denir [10, 28, 31, 33, 36].

Catalan sayıları $1,1,2,5,14,42,132,429,1430,4862,16796,58786,\cdots$ şeklinde olup bu dizi "Tamsayı Dizileri Online Ansiklopedisi" olan OEIS de A000108 kodu ile (https://oeis.org/A000108) yer almaktadır. Catalan sayıları kombinatorikte kafes yolları, Dyck yolları ve modelden kaçınma (pattern avoidance) gibi pek çok kombinatoriyal objeyi saymada karşımıza çıkmaktadır. Stanley Catalan sayılarının 214 farklı kombinatoriyal yorumunu içeren bir kitap yazmıştır [36]. Catalan sayıları aşağıdaki önermede verilen indirgeme bağıntısına sahiptir.



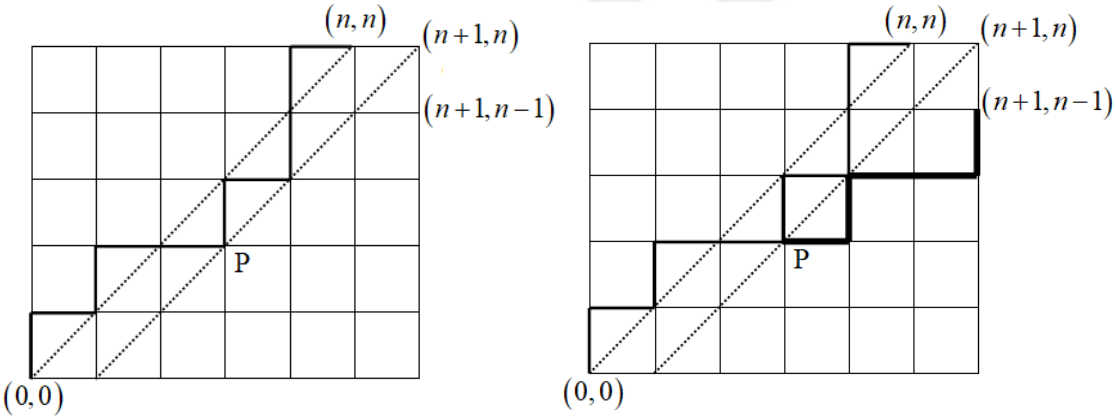
Şekil 1.1. Dyck yolları

Birim karelerden oluşan $n\times n$ lik karesel bir ızgarada, $(0,0)$ noktasından başlayarak kuzeye (N) ya da doğuya (E) doğru bir birimlik adımları kullanarak köşegenin ($y=x$ doğrusunun) hiçbir şekilde altına geçmeyecek şekilde (köşegene değebilir) (n,n) noktasına giden bir kafes yoluna $2n$ uzunluklu bir *Dyck yolu* denir ve bu yolların kümesi $Dyck(n)$ ile gösterilir. Şekil 1.1 in sol tarafında bulunan kafes yolu aslında sağ tarafında bulunan Dyck yolunun bir başka tasviridir. Dyck yollarının sayısı aşağıda detaylı bir biçimde verilen kombinatoriyal yöntemle bulunur: Öncelikle, kuzeye ya da doğuya doğru bir birimlik adımları kullanarak $(0,0)$ noktasından başlayıp (n,n) noktasında biten bütün kafes yollarının sayısını bulup, bu sayıdan $y=x$ doğrusunu tamamen aşamayan kafes yollarının sayısını çıkaralım. Köşegeni tamamen aşamayan yolları "*kötü yol*" olarak adlandıralım. Bu kötü yolların her biri $y=x$ doğrusunun altında kalan bir noktadan mutlaka geçerler. Şekil 1.2 de bir "kötü yol" örneği veriliyor.



Şekil 1.2. Bir kötü yol örneği

Bu kötü yolun köşegenin altına indiği ilk noktayı P ile gösterelim ve bir sonraki şekilde gösterildiği gibi yolu P den itibaren P den geçen köşegene göre yansıtalım.



Şekil 1.3. Kötü yola denk alternatif bir yol

P noktası, kötü yolun köşegenin altına indiği ilk nokta olduğundan, P noktasına gelene kadar doğuya atılan adımların sayısı k ise o noktaya gelene kadar kuzeye atılan adımların sayısı $k-1$ olacaktır. Toplam n tane doğuya ve n tane kuzeye adım olduğundan geri kalan adımların $n-k$ tanesi doğuya ve $n-k+1$ tanesi kuzeye olmalıdır. Ama yolumuzu P noktasından itibaren yansıttığımızdan, yansıtılmış yolda toplam

$$k+(n-k+1)=n+1$$

doğuya adım ve

$$(k-1)+(n-k)=n-1$$

kuzeye adım atılacaktır. Böylece yansıtılmış yol $(n+1,n-1)$ noktasında bitecektir.

Her kötü yol, bu şekilde $(0,0)$ noktasında başlayıp $(n+1,n-1)$ noktasında biten bir yola dönüşür. Aynı şekilde, bu tip her yol bir kötü yola denk gelir. Demek ki kötü yolların sayısı $(0,0)$ noktasında başlayıp $(n+1,n-1)$ noktasında biten yolların sayısına eşittir. Bu tip yollarda $(n+1)$ tane doğuya adım, $(n-1)$ tane de kuzeye adım olduğundan bu sayı,

$$\binom{2n}{n-1}$$

dir. $(0,0)$ noktasından başlayıp, hep doğuya ve kuzeye giderek (n,n) noktasında biten bütün yolların sayısı ise,

$$\binom{2n}{n}$$

dir. Bu durumda $(0,0)$ dan (n,n) ye giden bütün Dyck yollarının sayısı,

$$\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}=\binom{2n}{n}-\frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \qquad (1.10)$$

dir. Bu sayı ise Catalan sayısının kendisidir. Catalan sayıları aşağıdaki önermede verilen indirgeme bağıntısına sahiptir.

Önerme 1.2.8. C_n Catalan sayıları $C_0=1$ başlangıç koşulu ile beraber pozitif her n tamsayısı için

$$C_n=\sum_{j=1}^{n}C_{j-1}C_{n-j}=C_0C_{n-1}+C_1C_{n-2}+C_2C_{n-3}+\cdots+C_{n-1}C_0 \qquad (1.11)$$

indirgeme bağıntısına sahiptir [33].

İspat. Başlangıç koşulu, tek bir köşeye ait aşikâr olan bir yolu sayar. Şimdi, P Dyck yolunun köşeleri $v_0=(0,0),\cdots,v_{2n}=(n,n)$ olmak üzere bu yolu $P: v_0=(0,0),\cdots,v_{2n}=(n,n)\in Dyck(n)$ şeklinde yazalım, burada tüm $i=1,\cdots,n-1$ ler için $v_i=(x_i,y_i)$ dir. v_{2j}, $y=x$ doğrusu üzerinde olacak şekilde P Dyck yolunun en küçük $j>0$ indeksine sahip kösesi olsun. $v_{2n}=(n,n)$ bu koşulu sağladığı için böyle bir indeks mevcuttur. Ayrıca, v_{2j} köşesinden bir önceki v_{2j-1} köşesinin kuzey adımlarının sayısı ve doğu adımlarının sayısı birbirine eşit olamayacağından (çünkü v_{2j-1} köşesine gelmek için toplam $2j-1$ adım atılmalıdır), P Dyck yolundaki tek alt indise sahip hiç bir köşe noktasının $y=x$ üzerinde olmadığına dikkat etmeliyiz. Buradan, P Dyck yolunun v_1 köşesinden v_{2j-1} köşesine kadar olan kısmına P_1 dersek, P_1 in $y=x+1$ doğrusunun üzerinde ya da daha üst kısmında kaldığı sonucu çıkar. Dolayısıyla bu şekildeki P_1 Dyck yollarının sayısı C_{j-1} dir. Ayrıca, P nin v_{2j} köşesinden v_{2n} köşesine kadar olan kısmına P_2 dersek, bu durumda P_2, $n-j$ yarı uzunluğundaki bir Dyck yoludur. O halde P_2 Dyck yollarının sayısı C_{n-j} dir. Dolayısıyla böyle bir P Dyck yolunun toplam sayısı $C_{j-1}C_{n-j}$ dir. Böylece, j indisi 1 ile n arasındaki bütün değerleri alabileceği için, $(0,0)$ dan (n,n) ye giden bütün Dyck yolların sayısı $\sum_{j=1}^{n}C_{j-1}C_{n-j}=C_0C_{n-1}+C_1C_{n-2}+C_2C_{n-3}+\cdots+C_{n-1}C_0$ olup bu ise (1.10) eşitliğinden $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ Catalan sayısına eşittir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 1.2.9. C_n Catalan sayılarının adi üretici fonksiyonu

$$C(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

dir [33, 36].

İspat. C_n Catalan sayılarına ait adi üretici fonksiyon $C(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n$ olsun. Cauchy

çarpımından ve (1.11) eşitliğinden

$$C(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}\right)x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}x^n$$

elde edilir. Böylece

$$xC(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}x^{n+1} = C(x)-1$$

dir. Buradan $4x^2C(x)^2 = 4xC(x)-4x$ olup $(1-2xC(x))^2 = 1-4x$ dir. Dolayısıyla

$$1-2xC(x) = \pm(1-4x)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Böylece $C_n = \frac{1}{1+n}\binom{2n}{n}$ Catalan sayılarına ait adi üretici fonksiyonu

$$C(x) = \frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$$

olarak elde ederiz. Karekökünün pozitif ya da negatif olup olamadığına üretici fonksiyonun $C(0)=1$ başlangıç şartını sağlamasına göre karar verilecektir. Üretici fonksiyonda $x=0$ yazıldığında $\frac{0}{0}$ belirsizliği gelmektedir. L'Hospital kuralı yardımıyla

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = 1 \text{ ve } \lim_{x\to 0^+}\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = -1$$

bulunur ki bu da üretici fonksiyonun

$$C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

olduğu anlamına gelir. ■

Önerme 1.2.10. Her $x \le \frac{1}{4}$ için $-\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n} x^n$ dir [36].

İspat. Herhangi bir α reel sayısı için $(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ eşitliğinde $\alpha = \frac{1}{2}$ ve x yerinede $-4x$ alınırsa, Tanım 2.1.24 te verilen ve genelleştirilmiş Binom katsayısı olarak bilinen $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ eşitliğinden yararlanarak

$$
\begin{aligned}
(-1)^n \binom{1/2}{n} 4^n &= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-1)^n 4^n \\
&= (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)\frac{4^n}{n!} \\
&= -\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{n!\cdot n!}(2n)(2n-2)\cdots 2 \\
&= \frac{-1}{2n-1}\cdot\frac{(2n)!}{n!\cdot n!} \\
&= \frac{-1}{2n-1}\binom{2n}{n}
\end{aligned}
$$

elde edilir. O halde $-\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n$ olduğu görülür. ■

Ayrıca Önerme 1.2.10 un ispatında $1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n-2)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)} = \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}$ eşitliğini göz önüne aldığımızda

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1-4x} &= 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}n!(n-1)!}2^n x^n \\
&= 1-2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!}{n(n-1)!(n-1)!}x^{n-1} \\
&= 1-2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^{n-1}
\end{aligned}
$$

$$=1-2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n$$

elde ederiz. Dolayısıyla Teorem 1.2.9 ve Önerme 1.2.10 dan

$$\begin{aligned}C(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}&=\frac{1}{2x}\left(1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n\right)\\&=\frac{1}{2x}\left(1-1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n\right)\\&=\frac{1}{2x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\binom{2n+2}{n+1}x^{n+1}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n\end{aligned}$$

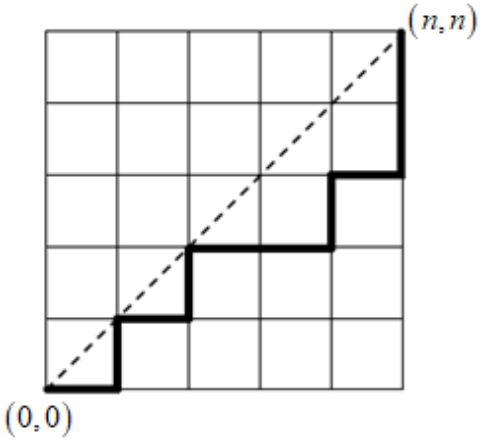
olduğu görülmektedir. Böylece $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ fonksiyonunun Maclaurin seri açılımı $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n$ olup her bir negatif olmayan n tamsayısı için

$$C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

olduğu görülür.

Önerme 1.2.11. Pozitif tamsayıların sonlu bir $(a_1,\cdots,a_n)$ dizisi $1\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_n$ ve her bir $i=1,\cdots,n$ için $a_i\le i$ koşullarını sağlıyorsa, bu şekilde oluşturulan dizilerin sayısı $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ Catalan sayısına eşittir [33, 36].

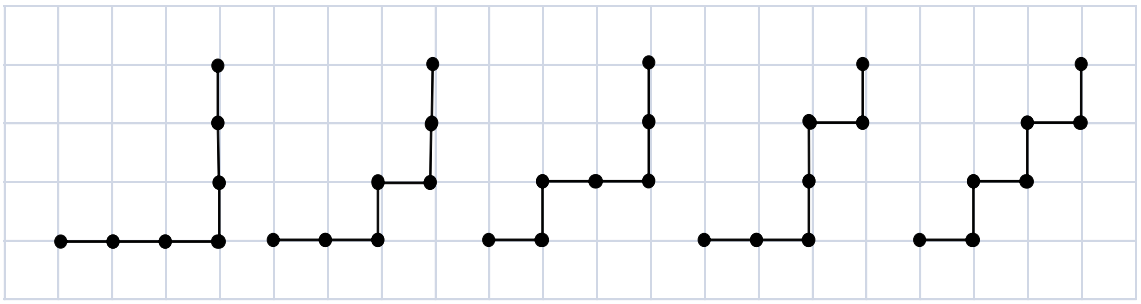
İspat. İspat için $(0,0)$ noktasından (n,n) noktasına giden, köşegenin altında kalan ve kuzeydoğu yollarından oluşan Dyck yollunu dikkate alalım (Bu tür yollar da birer Dyck yoludur).



Şekil 1.4.

Her bir $i=1,\cdots,n$ için a_i tamsayıları; $y=-1$ doğrusu üstünde, verilen Dyck yolunun altında ve $x=i-1$ ile $x=i$ doğuları arasında kalan dikdörtgensel bölgenin alanı olsun. Dolayısıyla her bir $i=1,\cdots,n$ için $a_i \le i$ olduğu ve yollar daima doğuya ya da kuzeye doğru gittiğinden $1 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Bu ise, $(0,0)$ noktasından (n,n) noktasına giden, köşegenin altında kalan ve kuzeydoğu yollarından oluşan Dyck yolları ile terimleri pozitif tamsayılar olan $1 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ ve her bir $i=1,\cdots,n$ için $a_i \le i$ koşullarını sağlayan sonlu $(a_1,\cdots,a_n)$ dizileri arasında birebir ve örten bir tekabüliyet kurar. Dolayısıyla bu tür dizilerin sayısı $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ dir. ■

Örnek 1.2.12. $(0,0)$ dan $(3,3)$ noktasına $(0,1)$ veya $(1,0)$ adımlı olan ve hiçbir zaman $y=x$ doğrusunun üstüne çıkmayan Dyck yolları Şekil 1.5 de verilsin.



Şekil 1.5. $Dyck(3)$ kümesi ([36])

Önerme 1.2.11 i ve Şekil 1.5 i göz önüne aldığımızda, $1 \le a_1 \le a_2 \le a_3$ ve bir $i = 1,2,3$ için $a_i \le i$ olacak şekildeki (a_1, a_2, a_3) dizilerinin sayısı $C_3 = 5$ olup bunlar

$$(1,1,1), (1,1,2), (1,2,2), (1,1,3), (1,2,3)$$

şeklindedir.

Bertrand'ın oy pusulası problemi (ballot problem): İlk olarak 1878'de W. A. Whitworth tarafından yayınlandı, ancak adını 1887'de onu yeniden keşfeden Joseph Louis François Bertrand'dan aldı. Bertrand'ın seçim problemi aşağıdaki gibidir:

Bir seçimde A ve B adayları vardır. Bu adayların her birisi n tane oy alacaktır. Ancak oy sayımı sırasında A adayının hiçbir zaman B adayının gerisinde kalmaması şartıyla oylar kaç farklı şekilde sayılabilir? Örneğin, *AABABBBAAB* sıralaması kötü olup istenilen durum değildir, çünkü yedinci oy açıklandığında A adayı toplam 3 oy alırken B adayı ise 4 oy almış olur.

Tanım 1.2.13. A ve B adaylarının her birinin n tane oy aldığı bir seçimde A adayı için kullanılan bir oyu 1 ile ve B adayı için kullanılan bir oyu da -1 ile (kısaca "$-$") kodlayalım. n tane 1 ve n tane -1 den oluşan bir $a_1 a_2 \cdots a_{2n}$ dizisi verilsin. Eğer her bir $k, 1 \le k \le 2n$ için

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \ge 0$$

ise $a_1 a_2 \cdots a_{2n}$ dizisine bir *seçim dizisi* (*ballot sequence*) denir [36]. Burada bir seçim dizisinin ilk teriminin mutlaka 1 ve son teriminin de mutlaka -1 olması gerektiğine dikkat edelim. $2n$ uzunluklu seçim dizilerinin kümesi $B(n)$ ile gösterilecektir.

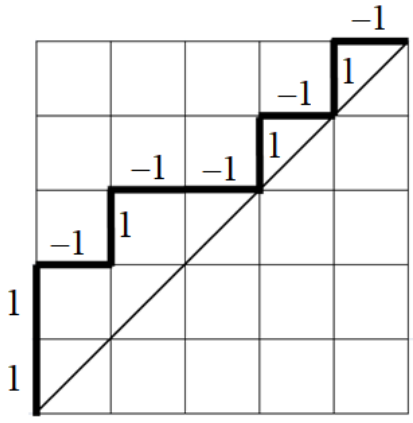
Örnek 1.2.14. A ve B adaylarının her birinin 3 tane oy aldığı bir seçimde A adayının hiçbir zaman B adayının gerisinde kalmaması şartıyla oylar 5 farklı şekilde sayılır. Bu sayımlar *AAABBB*, *AABABB*, *AABBAB*, *ABAABB* ve *ABABAB* formundadır. Dolayısıyla $n = 3$ için oluşan 6 uzunluklu seçim dizileri $111---$, $11-1--$, $11--1-$,

$1-11--$, $1-1-1-$ şeklinde olup $B(3)=5$ dir. Aslında bu durumun bir tesadüf olmadığını aşağıdaki teoremde göreceğiz.

Teorem 1.2.15. $2n$ uzunluklu seçim dizilerinin sayısı $\left|B(n)\right|=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ Catalan sayısıdır [33, 36].

İspat. $2n$ uzunluklu seçim dizileri ile $(0,0)$ dan başlayıp (n,n) de biten ve $y=x$ doğrusu altında kalmayan Dyck yolları arasında birebir ve örten bir tekabüliyet vardır. Bu tekabüliyet; bir seçim dizisinde yer alan 1 terimlerini kuzey yolu (N) ile, -1 terimlerini de doğu yolu (E) ile yer değiştirerek elde edilir. Dyck yolları $y=x$ doğrusunun altında hiçbir zaman kalamayacağı için Dyck yolunun her bir alt kümesinde kuzey yollarının sayısı doğu yollarının sayısından büyük veya eşit olacaktır. Bu ise seçim dizisinin tanımı ile özdeştir. Dyck yollarının sayısı $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ olduğundan $2n$ uzunluklu seçim dizilerinin sayısı da C_n dir. ■

Örnek 1.2.16. $2n=10$ uzunluklu $11-1--1-1-$ seçim dizisi *NNENEENENE* şeklinde gösterilen ve diyagramı aşağıdaki gibi olan bir Dyck yoluna karşılık gelmektedir.



Tanım 1.2.17. $n+1$ tane 1 ve n tane -1 den oluşan bir $b_1b_2\cdots b_{2n+1}$ dizisi verilsin. Eğer her bir k, $1\le k\le 2n+1$ için $\sum_{i=1}^{k} b_i>0$ ise $b_1b_2\cdots b_{2n+1}$ dizisine bir *kesin seçim dizisi* (*strict ballot sequence*) denir [36]. Burada özellikle $b_1=b_2=1$ olacağına dikkat

edelim. "$b_1 b_2 \cdots b_{2n+1}$ dizisinin kesin seçim dizisi olması için gerek ve yeter şart $b_2 \cdots b_{2n+1}$ dizisinin bir seçim dizisi olmasıdır" gerçeğine dayanarak $2n+1$ uzunluklu kesin seçim dizilerinin sayısının da $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ Catalan sayısı olduğu görülür.

Örnek 1.2.18. $2n+1=9$ uzunluklu bir kesin seçim dizisi $111-1--1-$ şeklindedir.

Tanım 1.2.19. Şekil 1.6 deki gibi, üst satırda n_1 kare ve alt satırda n_2 kare bulunan $(n_1 \geq n_2)$ ve satırlar boyunca soldan sağa ve sütunlar boyunca aşağıdan yukarıya doğru artan olan ve

$$1,\ 2,\ \cdots,\ n_1+n_2$$

tam sayılarıyla doldurulmuş bir tabloya (n_1, n_2) şeklinde bir *standart Young tablosu* denir [17]. Bu tür Young tablolarının kümesi $SYT(n_1, n_2)$ sembolü ile gösterilir. Bu kombinasyonel nesneler, İngiliz matematikçi Alfred Young tarafından 1900 yılında tanıtıldı.

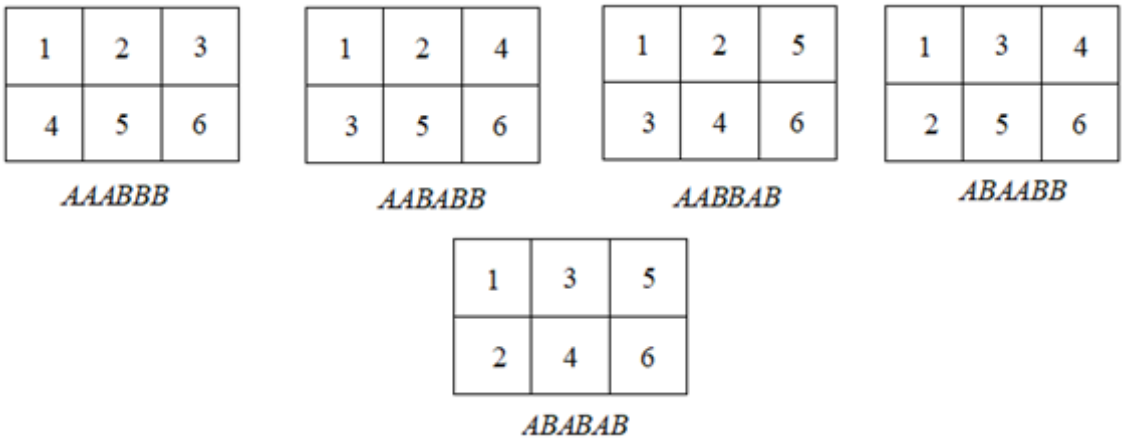
1	2	4	6	7	8	11	13
3	5	9	10	12			

Şekil 1.6. $(8,5)$ tipinde bir standart Young tablosu

2 satır ve n sütundan oluşan bir Young tablosu verilsin. $2\times n$ tipindeki bu tabloya 1 den $2n$ e kadar olan tamsayıların, her bir satırda ve her bir sütunda artan sırada olacak biçimde kaç farklı şekilde yerleştirildiğini yine Catalan sayısı yardımıyla elde edebiliriz. Bu tür bir tablo aslında özel bir standart Young tablosu olup bunların kümesi $SYT(n,n)$ ile gösterilir.

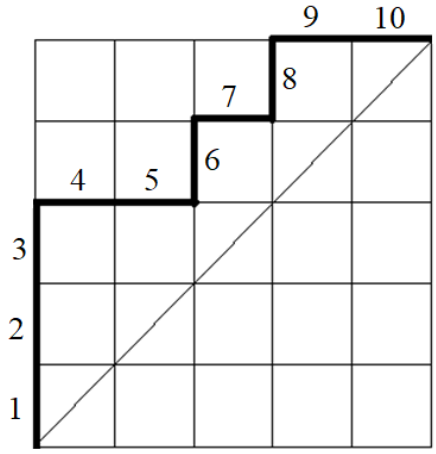
Teorem 1.2.20. n bir pozitif tamsayı olmak üzere, $|SYT(n,n)| = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n$ dir [36].

İspat. İlk olarak, 1 den $2n$ e kadar olan tamsayılar, her bir satırda ve her bir sütunda artan sırada olacak biçimde $2\times n$ tipindeki bir tabloya yerleştirilmiş olsun. İlk satırdaki bütün tamsayılar artan sırada olup bunları bir Dyck yolunun kuzey yollarının konumları olarak; ikinci satırdaki bütün tam sayılar da yine artan sırada olup bunları da doğu yollarının konumları olarak aldığımızda $(0,0)$ noktasından (n,n) noktasına giden ve $y=x$ doğrusunun altında kalmayan bir tek Dyck yolu elde edilir. Tersine, $(0,0)$ noktasından (n,n) noktasına giden ve $y=x$ doğrusunun altında kalmayan bir Dyck yolu verildiğinde, bu Dyck yolu üzerindeki bütün yollar $(0,0)$ noktasından başlayarak (n,n) noktasına kadar sırasıyla $1,2,\cdots,2n$ şeklinde numaralandırılır. Daha sonra kuzey yollarının üzerindeki sayılar (n tane) soldan sağa doğru $2\times n$ tipindeki bir tablonun ilk satırına ve doğu yollarının üzerindeki sayılar (n tane) da yine soldan sağa doğru bu tablonun ikinci satırına yerleştirilir. O halde bu tablonun her bir satır ve sütunundaki sayılar artan sırada olup $2\times n$ tipinde bir tek standart Young tablosu elde edilir. Bu da bize $SYT(n,n)$ kümesi ile $(0,0)$ noktasından (n,n) noktasına giden ve $y=x$ doğrusunun altında kalmayan Dyck yollarının kümesi arasında birebir bir eşlemenin var olduğunu söyler. Böylece (1.10) denkleminden $\left|SYT(n,n)\right|=\dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=C_n$ olduğu görülür. ■



Şekil 1.7. $SYT(3,3)$ deki bütün Young tabloları

Örnek 1.2.21. *NNNEENENEE* Dyck yolu aşağıdaki 2×5 tipindeki standart Young tablosuna karşılık gelmektedir.



Dyck yolu

1	2	3	6	8
4	5	7	9	10

$SYT(5,5)$ de bir Young Tablosu

1.3. Desenden Kaçınma

Desenden kaçınma, kombinatorikte nispeten yeni bir çalışma alanıdır. Kısmen cebirsel geometri ve bilgisayar bilimiyle olan bağlantıları nedeniyle bu alanda güçlü bir büyüme olduğu görülmektedir.

Tanım 1.3.1. S tamsayılardan oluşan k elemanlı bir küme ve σ, S kümesi üzerinde bir permütasyon olsun. σ nın en küçük elemanının 1, bir sonraki en küçük elemanının 2 ve bu şekilde devam edilerek S nin $k-$yıncı en küçük elemanının k ile değiştirilmesiyle elde edilen $std\sigma \in \mathfrak{S}_k$ permütasyonuna σ nın *standartlaştırılması* denir [33].

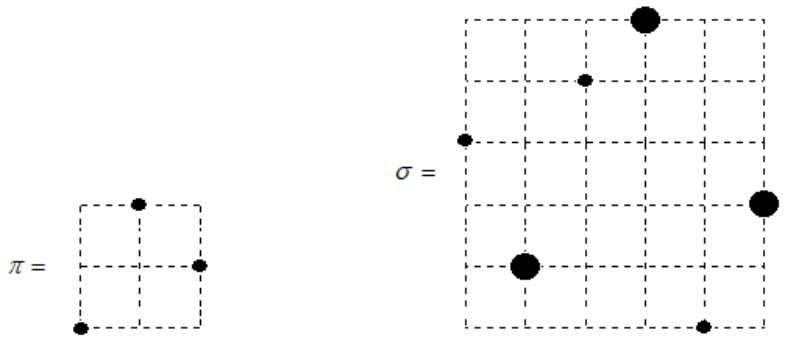
Örnek 1.3.2. Örneğin, $S=\{2,3,6\}$ kümesinin $\sigma=263$ permütasyonunun standartlaşmış biçimi $std\sigma=132\in\mathfrak{S}_3$ şeklindedir.

Tanım 1.3.3. $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ ve $\pi\in\mathfrak{S}_k$ permütasyonları tek satır gösterimi şeklinde verilsin. $std\sigma'=\pi$ olacak şekilde σ nın bir σ' alt dizisi varsa, bu durumda σ permütasyonu π *desenini (pattern)* içerir denir [10, 33]. Burada σ nın bir σ' alt dizinin π nin ardışık elemanlarından oluşmak zorunda olmadığına dikkat edilmelidir. Bu durumda, π permütasyonu *desen* olarak adlandırılır. Öte yandan, σ permütasyonunun $std\sigma'=\pi$ olacak şekilde hiç σ' alt dizisi yoksa, bu durumda σ permütasyonuna π *deseninden kaçınıyor (pattern avoidance)* denir.

Başka bir ifade ile, $k \le n$ olmak üzere $\pi = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_k \in \mathfrak{S}_k$ deseni ve $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n \in \mathfrak{S}_n$ permütasyonları verilsin. Eğer σ permütasyonunun $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ olmak üzere bir $\sigma' = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \cdots \sigma_{i_k}$ alt dizisi eğer "$\sigma_{i_a} < \sigma_{i_b}$ olacak şekildeki her $1 \le a, b \le k$ için $\pi_a < \pi_b$" ya da "$\sigma_{i_a} > \sigma_{i_b}$ olacak şekildeki her $1 \le a, b \le k$ için $\pi_a > \pi_b$" şartlarından sadece birini sağlıyorsa bu taktirde σ permütasyonunun π yi bir desen olarak içerdiğini söyleriz. Aksi takdirde σ nin π deseninden kaçındığını söyleriz.

Örnek 1.3.4. $\sigma = 3451267 \in \mathfrak{S}_7$ permütasyonu, uzunluğu 3 olan azalan bir alt dizi içermediğinden 321 deseninden kaçınır. σ nın $\sigma' = 4267$ alt dizisinin standartlaştırılmış biçimi $std\sigma' = 2134$ olduğu için σ permütasyonu 2134 desenini içerir [10].

Örnek 1.3.5. $\sigma = 425613 \in \mathfrak{S}_6$ permütasyonunun $\sigma' = 263$ alt dizisinin standartlaştırılması $std\sigma' = 132$ olduğundan σ permütasyonu $\pi = 132$ desenini içerir. Aynı zamanda, σ permütasyonunun dört uzunluğunda azalan hiç bir alt dizisi mevcut olmadığından σ permütasyonu 4321 deseninden kaçınır [33].



Şekil 1.8. $\pi = 132$ ve $\sigma = 425613$ için diyagramlar ([33])

Desenleri incelemek için, bir permütasyonun permütasyon matrisine benzer bir geometrik modelini göz önüne almak yararlı olacaktır. $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n \in \mathfrak{S}_n$ permütasyonu verildiğinde, σ nın permütasyon matrisinin diyagram gösterimi, her bir $i = 1, \cdots, n$ için $(i, \sigma_i) \in \mathbb{Z}^2$ noktalarının geometrik yerlerinin koleksiyonudur. Diyagramı görüntülerken, sol alt köşenin her zaman $(1,1)$ koordinatlarına sahip olduğu varsayılır. Örnek 1.3.4 deki $\pi = 132$ deseni ve $\sigma = 425613$ permütasyonuna ait diyagramlar Şekil

1.7 de gösterilmiştir. Şekil 1.7 nin sağ tarafında verilen σ permütasyonuna ait diyagramda, σ permütasyonunun π deseninin bir kopyasını içeren $\sigma' = 263$ alt dizisine karşılık gelen noktalar kolaylıkla fark edilebilmesi amacıyla büyütülerek gösterilmiştir.

Şimdi bir $\pi \in \mathfrak{S}_k$ deseni verilsin. Bu durumda π deseninden kaçınan bütün $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ permütasyonlarının kümesi

$$Av_n(\pi) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma,\ \pi \text{ deseninden kaçınır}\}$$

biçiminde gösterilsin.

Tanım 1.3.6. $\pi, \pi' \in \mathfrak{S}_k$ desenleri verilsin. Negatif olmayan her n tamsayısı için

$$|Av_n(\pi)| = |Av_n(\pi')|$$

ise π ve π' desenlerine *Wilf denktir* denir ve $\pi \equiv \pi'$ ile gösterilir [33]. "$\equiv$" bağınıtısının $\mathfrak{S}_n$ üzerinde bir denklik bağınıtısı olduğunu görmek zor değildir.

Aşağıdaki örnekte uzunluğu iki olan $\pi = 12$ ve $\pi' = 21$ desenlerinden kaçınan $n-$ permütasyonların sayısını vereceğiz.

Örnek 1.3.7. $\pi = 12$ ve $\pi' = 21$ desenlerini göz önüne alalım. Bu durumda

$$Av_n(12) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ve

$$Av_n(21) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}\right\}$$

olup $|Av_n(12)| = |Av_n(21)| = 1$ dir. Burada permütasyonlar çift satır gösteriminde

verilmiştir [10]. Dolayısıyla Tanım 1.3.5 den $\pi = 12$ ve $\pi' = 21$ permütasyonları Wilf denktir.

Tanım 1.3.8. $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n \in \mathfrak{S}_n$ permütasyonu verilsin. Bu durumda yine $\mathfrak{S}_n$ de bulunan $\overleftarrow{\sigma} = \sigma_n\sigma_{n-1}\cdots\sigma_1$ permütasyonuna σ nın *ters çevrilmesi* denir. Her bir $i = 1,\cdots,n$ için $i-$yinci terimi $\gamma_i = n+1-\sigma_i$ olan $\sigma^c = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{n-1}$ permütasyonuna σ nın *tümlemesi* denir [33].

Önerme 1.3.9. Negatif olmayan her n tamsayısı için

$$\left|Av_n(132)\right| = \left|Av_n(231)\right| = \left|Av_n(312)\right| = \left|Av_n(213)\right|$$

dir [10, 33].

İspat. Bir $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n \in \mathfrak{S}_n$ permütasyonu 132 deseninden kaçınıyorsa, σ nın tersi olan $\overleftarrow{\sigma} = \sigma_n\sigma_{n-1}\cdots\sigma_1$ permütasyonu da 231 deseninden kaçınır. Bunun tersi de doğrudur. Dolayısıyla $\left|Av_n(132)\right| = \left|Av_n(231)\right|$ elde edilir. $\left|Av_n(312)\right| = \left|Av_n(213)\right|$ eşitliği de benzer olarak görülür. Ayrıca, bir $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n \in \mathfrak{S}_n$ permütasyonu 132 deseninden kaçınıyorsa, bu durumda σ nın tümlemesi olan $\sigma^c = (n+1-\sigma_1)(n+1-\sigma_2)\cdots(n+1-\sigma_n)$ permütasyonu da 312 yi deseninden kaçınır. Bunun tersi de doğrudur. Örneğin $\sigma = 43215 \in \mathfrak{S}_5$ permütasyonu 132 deseninden kaçınırken σ nın tümlemesi olan $\sigma^c = 23451$ permütasyonu da 312 deseninden kaçınır. Böylece $\left|Av_n(132)\right| = \left|Av_n(312)\right|$ bulunur.

O halde $\left|Av_n(132)\right| = \left|Av_n(231)\right| = \left|Av_n(312)\right| = \left|Av_n(213)\right|$ eşitliğini elde ederiz. ■

Uzunluğu üç olan toplam $\left|\mathfrak{S}_3\right| = 6$ tane desen mevcuttur. Önerme 1.3.8 den görüleceği üzere bu desenlerden dört tanesi Wilf denktir, yani, $132 \equiv 231 \equiv 312 \equiv 213$ dir.

Örnek 1.3.10. Üç uzunluğundaki tüm desenlerden kaçınan $\mathfrak{S}_4$ teki permütasyonların kümelerini vereceğiz. Aşağıda gösteriminde kutular bulunan permütasyonlar $\mathfrak{S}_4$ te 132 desenini içermektedir. Bunların sayısı 14 olup böylece $\mathfrak{S}_4$ te 132 deseninden kaçınan permütasyonların kümesi $Av_4(132)$ olmak üzere

$\mathfrak{G}_4 - Av_4(132) = \{1243,1324,1342,1423,1432,2143,2413,2431,3142,4132\}$ şeklindedir.

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2341	3214	4231
1342	2314	3241	4213
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Şekil 1.9. $\mathfrak{G}_4$ de 132 desenini içeren permütasyonlar

Benzer şekilde,

$\mathfrak{G}_4 - Av_4(231) = \{1342,2314,2341,2413,2431,3142,3241,3412,3421,4231\}$,

$\mathfrak{G}_4 - Av_4(123) = \{1234,1243,1324,1342,1423,2134,2341,2314,3124,4123\}$,

$\mathfrak{G}_4 - Av_4(321) = \{1432,2431,3214,3241,3412,3421,4132,4231,4312,4321\}$,

$\mathfrak{G}_4 - Av_4(213) = \{1324,2134,2143,2314,2413,3124,3142,3214,3241,4213\}$

ve

$\mathfrak{G}_4 - Av_4(312) = \{1423,2413,3124,3142,3412,4123,4132,4213,4231,4312\}$

elde edilir. Dikkat edilirse $Av_4(123)$ deki permütasyonlar ile $Av_4(321)$ deki permütasyonlar birbirlerinin tersten yazılımıdır. Benzer şekilde $Av_4(132)$ ile $Av_4(231)$ deki permütasyonlar ve $Av_4(213)$ ile $Av_4(312)$ deki permütasyonlar birbirlerinin tersten yazılımı formundadır. $Av_4(132)$ ile $Av_4(312)$, $Av_4(123)$ ile $Av_4(321)$ ve $Av_4(231)$ ile $Av_4(231)$ birbirlerinin tümlemesidir. Eğer $|Av_n(123)| = |Av_n(132)|$ olduğunu gösterirsek, bu durumda Önerme 1.3.9 u da dikkate alarak üç uzunluğundaki tüm desenlerden kaçınan $n-$permütasyonların sayısının aynı olduğunu ve dolayısıyla

$\mathfrak{S}_3$ teki tüm permütasyonların Wilf denk olduğunu ispatlamış oluruz.

Tanım 1.3.11. Bir $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n \in \mathfrak{S}_n$ permütasyonunda kendisinden önce gelen tüm terimlerden daha küçük olan her bir terimine *soldan-sağa-minimum* denir. Soldan-sağa-minimumların azalan bir alt dizi oluşturduğuna dikkat edin [10, 33].

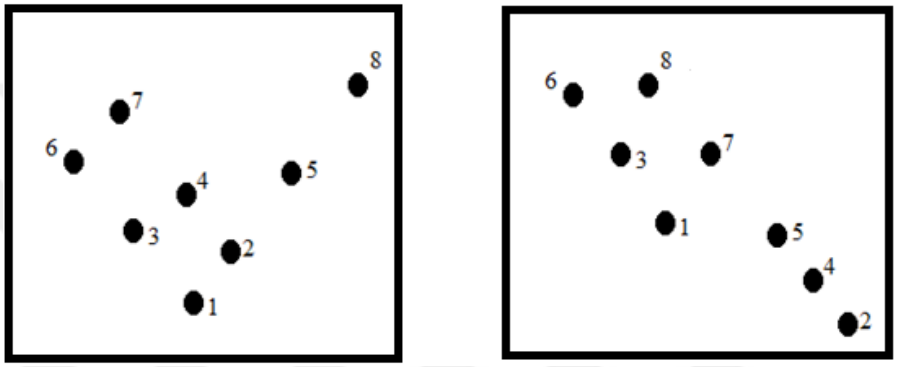
Örnek 1.3.12. $\sigma = 67341258 \in \mathfrak{S}_8$ permütasyonlarının soldan-sağa-minimumları $6, 3$ ve 1 olup azalan sıradadır [10].

Önerme 1.3.13. Tüm pozitif n tam sayıları için $\left|Av_n(123)\right| = \left|Av_n(132)\right|$ dir [10, 33].

İspat. İspat için $Av_n(132)$ kümesinden $Av_n(123)$ kümesine tüm soldan-sağaminimumları sabit bırakan, birebir ve örten bir f fonksiyonu inşa edeceğiz.

Herhangi bir $\sigma \in Av_n(132)$ için $f(\sigma)$, σ nin soldan-sağa-minimumlarının sabit kaldığı ve geriye kalan diğer tüm terimlerinin azalan sırada yazıldığı bir permütasyon olsun. Elde edilen $f(\sigma)$ permütasyonu her zaman 123 deseninden kaçınır, çünkü $f(\sigma)$ iki azalan alt dizinin birleşimidir. Bu alt dizilerden ilki σ daki soldan-sağa-minimumların azalan dizisi ve diğeri ise σ nın geriye kalan terimlerin azalan sırada düzenlenmesi ile elde edilen dizidir. Örneğin, $\sigma = 67341258 \in Av_8(132)$ permütasyonunun f altındaki görüntüsü $f(\sigma) = 68371542 \in Av_8(123)$ dür. σ ve $f(\sigma)$ permütasyonundaki soldan-sağa-minimumların 6, 3 ve 1 olduğuna dikkat edelim. Gerçekten de, soldan sağa minimum olmayan m adet terimi f fonksiyonu çifter çifter yeniden düzenler. Yani, azalan sırada olmayan bu terim çiftlerinden biri ile karşılaşıldığında f fonksiyonu onların yerlerini değiştirir. Dolayısıyla bu algoritma en fazla $\binom{m}{2}$ adımda sonlanır. Bu algoritmanın her bir adımı küçük olan bir terimi sağa ve büyük olan bir terimi sola hareket ettirir ve bu nedenle bu algoritma asla yeni bir soldan sağa minimum terim oluşturmaz. Böylece $f(\sigma)$, verilen küme ve soldan sağa minimumların konumu ile belirlenmiş 123 deseninden kaçınan tek permütasyondur. Gerçekten de, eğer $f(\sigma)$ da soldan sağa minimum olmayan ve $12-$deseni oluşturan

iki x ve y terimleri mevcut olsaydı, o zaman x e en yakın ve x in solunda bulunan soldan-sağa-minimum eleman z olmak üzere; z, x ve y terimleri zxy şeklinde artan bir dizi oluştururdu. Dolayısıyla $f(\sigma)$ permütasyonu 123 deseni içermiş olurdu. Bu ise mümkün değildir. Çünkü $f(\sigma)$ da soldan sağa minimum olmayan bütün terimler azalan sırada olduğu için $12-$deseni oluşturan ve soldan sağa minimum olmayan x ve y terimleri zaten mevcut değildir. Sonuç olarak $f(\sigma)$ permütasyonu 123 deseninden kaçınan bir permütasyondur.



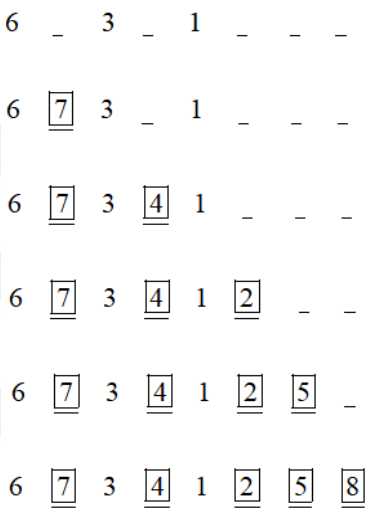
Şekil 1.10. $\mathfrak{G}_8$ de $132-$deseninden kaçınan bir permütasyonun yapısı ([10])

Şimdi f nin birebir ve örten bir fonksiyon olduğunu ispatlamak için bir tersinin olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $q \in Av_n(123)$ olsun. Öncelikle q nun soldan-sağa-minimumlarını sabit tutun ve daha sonra soldan sağa doğru hareket ederek boş pozisyonları geriye kalan terimlerle aşağıdaki adımları takip ederek doldurun:

- Her bir adımda, verilen boş pozisyonun sol tarafındaki en yakın soldan-sağa-minimum elemandan daha büyük olan ve henüz yerleştirilmemiş en küçük elemanı bu pozisyona yerleştirmek suretiyle elde edilen permütasyon $g(q)$ olsun.

Bu durumu aşağıdaki gibi örnekle daha açık bir şekilde izah edelim: $q = 68371542 \in Av_8(123)$ permütasyonunun soldan-sağa-minimumları sırasıyla 6, 3 ve 1 dir. İlk olarak; 6 ile 3 arasındaki boş pozisyona 6 dan büyük ve henüz yerleştirilmemiş en küçük eleman olan 7 yi koyarız. Daha sonra, 3 ile 1 arasındaki boş pozisyona henüz kullanılmamış ve 3 ten büyük en küçük terim olan 4 ü yerleştiririz. 1 in hemen sağına henüz kullanılmamış ve 1 den büyük en küçük terim olan 2 yi yazarız.

Aynı yaklaşımla devam ederek, geriye kalan boş pozisyonlara sırasıyla 5 ve 8 sayılarını yerleştirdiğimizde $g(q)=67341258$ permütasyonunu elde ederiz. Elde edilen bu permütasyon 132 deseninden kaçınır. Gerçekten de, $g(q)$ permütasyonunun içinde 132 deseni olsaydı, o zaman bu desenin soldan-sağa-minimum bir elemanla başlaması gerekirdi. Ancak bu mümkün değildir, çünkü verilen herhangi bir soldan-sağa-minimum elemandan daha büyük terimler $g(q)$ nun tanımı gereği artan sırada yazılır. Dolayısıyla $g(q)$ permütasyonunda 132 deseni yer almaz.



Şekil 1.11. $q=68371542\in Av_8(123)$ dan $g(q)=67341258\in Av_8(132)$ nun elde edilmesi

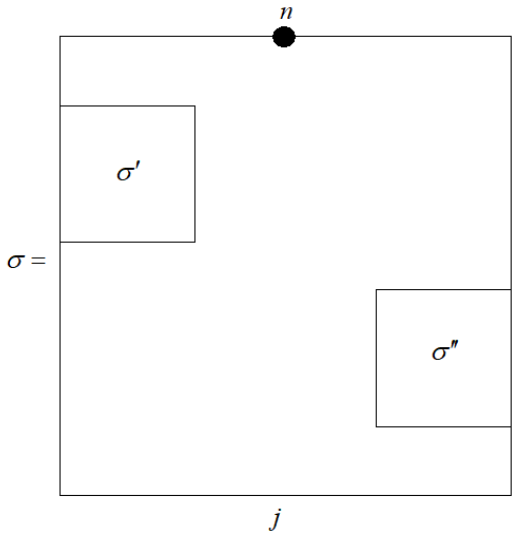
Tekrar belirtmek gerekir ki; $g(q)$, soldan-sağa-minimumların pozisyonları q ile aynı olan ve 132 deseninden kaçınan tek permütasyondur.

Gerçekten $g(q)$ da, soldan-sağa-minimum bir a teriminden büyük ve azalan sırada olan u ve v terimleri mevcut olsaydı, o zaman avu üçlüsü $g(q)$ içinde bir $132-$ deseni oluştururdu. O halde g fonksiyonu f nin tersi olup her bir $q\in Av_n(123)$ için $f(g(q))=q$ elde edilir. ■

Sonuç 1.3.14. $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ olmak üzere, $\sigma\in Av_n(123)$ olması için gerek ve yeter şart σ nın soldan-sağa-minimum olmayan alt dizisi azalandır [10, 33].

İspat. Bu ifadeyi ispatlamak yerine bu ifadenin karşıt tersini kanıtlayacağız. Öncelikle σ nın $\sigma_i\sigma_j\sigma_k$ şeklinde bir 123-deseni içerdiğini varsayalım. Bu durumda σ_j ve σ_k soldan-sağ-minimum elemanlar olamaz. Çünkü σ_i elemanı σ_j ve σ_k nın her ikisinden de küçük olup σ da bunların sol tarafında yer alır. Aynı zamanda $\sigma_j < \sigma_k$ olduğundan, $\sigma_j\sigma_k$ soldan-sağa-minimum olmayan artan bir alt dizidir. Tersine, σ permütasyonunun her iki terimi de soldan-sağa-minimum olmayan $j < k$ ve $\sigma_j < \sigma_k$ olacak şekilde bir $\sigma_j\sigma_k$ alt dizisi mevcut olsun. σ permütasyonu daima soldan-sağa-minimum bir eleman ile başladığından dolayı, σ_j nin solunda bulunan ve σ_j ye en yakın olan bir soldan-sağa-minimum elemanın var olduğunu söyleriz. Bu elemana σ_i diyelim. Böylece, $\sigma_i < \sigma_j < \sigma_k$ olup $\sigma_i\sigma_j\sigma_k$ üçlüsü 123 deseni formundadır. Buradan $\sigma \notin Av_n(123)$ olduğunu elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır. ■

Örnek 1.3.15. $\sigma = 698371542 \in Av_9(123)$ permütasyonunun soldan-sağa-minimum elemanları 6, 3 ve 1 olup σ nın soldan sağa minimum olmayan elemanları 987542 şeklinde azalan formdadır. Ayrıca Önerme 1.3.13 den $g(\sigma) = 678341259 \in Av_9(132)$ olduğu elde edilir [33].



Şekil 1.12. $\sigma \in Av_n(132)$ nin ayrıştırılması ([33])

Teorem 1.3.16. Her $n \geq 0$ için $\left|Av_n(132)\right| = C_n$ dir [33].

İspat. İspatı n üzerinden tümevarımla yapacağız. $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n \in Av_n(132)$ ve $\sigma_j = n$ olduğunu varsayalım. Dolayısıyla $\sigma = \sigma' n \sigma''$ yazabiliriz, burada $\sigma' = \sigma_1 \cdots \sigma_{j-1}$ ve $\sigma'' = \sigma_{j+1} \cdots \sigma_n$ dir. Açıkça σ' ve σ'', σ nın alt dizileri oldukları için bunlar da 132 deseninden kaçınırlar. Ayrıca $\min \sigma' > \max \sigma''$ dür. Eğer $s < t$ olacak şekilde $s \in \sigma'$ ve $t \in \sigma''$ varsa, bu durumda σ permütasyonu 132 deseninin bir kopyası olan *snt* üçlüsünü içerir. Bu ise $\sigma \in Av_n(132)$ olması ile çelişir. Dolayısıyla σ' ve σ'' sırasıyla $\{n-1, n-2, \cdots, n-j+1\}$ ve $[n-j]$ kümelerinin birer permütasyonu olup ikisi de 132 deseninden kaçınır. Böylece σ nın diyagramını Şekil 1.11 deki gibi ayrıştırılmış biçimde düşünebiliriz. Tersine, σ nın diyagramı Şekil 1.11 de verilen forma sahipse ($\min \sigma' > \max \sigma''$ ise) ve σ' ile σ'' 132 deseninden kaçınıyorsa, bu durumda σ permütasyonu da 132 deseninden kaçınır. Tümevarım hipotezinden σ' için C_{j-1} ve σ'' için C_{n-j} seçenek vardır. Bunların $C_{j-1}C_{n-j}$ çarpımını alıp $j \in [n]$ üzerinden toplam alırsak $\sum_{j=1}^{n} C_{j-1}C_{n-j} = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + C_2C_{n-3} + \cdots + C_{n-1}C_0$ olduğunu elde ederiz ve Teorem 1.2.8 de verilen C_n için başlangıç koşulu ve tekrarlama ilişkisini göz önünde bulundurduğumuzda σ permütasyonu için

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

tane seçenek olduğu görülür. O halde 132 deseninden kaçınan $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ permütasyonlarının sayısı $\left|Av_n(132)\right| = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ Catalan sayısıdır.■

Sonuç olarak; Önerme 1.3.9, Önerme 1.3.13 ve Teorem 1.3.16 yı birlikte göz önüne aldığımızda $\mathfrak{S}_3$ teki tüm permütasyonlar birbirlerine Wilf denk olup her $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ için

$$\left|Av_n(\sigma)\right| = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

dir.

2. BÖLÜM

SİMETRİK GRUPLARDAKİ DÜZENSİZLİKLER

2.1. Çoklu Kümeler Üzerindeki Permütasyon İstatistikleri

Tanım 2.1.1. A boştan faklı bir küme olmak üzere A dan A ya tanımlı birebir ve örten bir fonksiyona A üzerinde bir *permütasyon* denir. Her hangi bir n pozitif tamsayısı için $[n]$ kümesi üzerindeki bütün permütasyonların kümesi $\mathfrak{S}_n$ fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur. Bu gruba *simetrik grup* denir ve $|\mathfrak{S}_n| = n!$ dir. Bir $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ permütasyonu genellikle $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$ veya $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ sembollerinden birisi ile gösterilir.

Tanım 2.1.2. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$ verilsin. $Inv(\sigma) = \{(\sigma_i, \sigma_j) : i < j \text{ iken } \sigma_i > \sigma_j\}$ kümesine σ nın *inversiyonlarının kümesi* denir. Bu kümenin eleman sayısına da σ nın *inversiyon sayısı* denir ve $inv(\sigma)$ ile gösterilir [9,14,35]. O halde $inv(\sigma) = |Inv(\sigma)|$ yazarız. İnversiyon kavramı ilk defa 1750 yılında Cramer [14] tarafından tanımlanmıştır.

Örnek 2.1.3. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_8$ permütasyonunun inversiyonlarının kümesi $Inv(\sigma) = \{(3,1),(3,2),(5,1),(5,2),(5,4),(7,1),(7,2),(7,4),(7,6),(8,6)\}$ olup $inv(\sigma) = 10$ dur.

Tanım 2.1.4. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$ verilsin. $Des(\sigma) = \{i \in [1, n-1] : \sigma_i > \sigma_{i+1}\}$ kümesine σ nın *descent kümesi* denir. Bu kümenin elemanlarının toplamına da σ nın *major indeksi* denir ve $maj(\sigma)$ ile gösterilir [26, 35]. Böylece $maj(\sigma) = \sum_{i \in Des(\sigma)} i$ yazabiliriz. Major indeksi kavramı 1915 yılında MacMahon [26] tarafından verilmiştir.

Örnek 2.1.5. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 1 & 7 & 4 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_8$ permütasyonunun inversiyonlarının kümesi $Des(\sigma) = \{1, 2, 4, 5, 7\}$ olup $maj(\sigma) = 1+2+4+5+7 = 19$ dur.

Teorem 2.1.6. (Rodriguez)

q bir değişken olmak üzere negatif olmayan her n tamsayısı için $\sum_{\sigma \in S_n} q^{inv(\sigma)} = [n]_q !$ dir [30].

Teorem 2.1.7. (MacMahon)

q bir değişken olmak üzere negatif olmayan her n tamsayısı için $\sum_{\sigma \in S_n} q^{maj(\sigma)} = [n]_q !$ dir [26].

Dolayısıyla Teorem 2.1.6 ve Teorem 2.1.7 den inversiyon ve major indeksinin $\mathfrak{S}_n$ üzerinde eş dağılıma sahip olduğu sonucuna varılır.

Tablo 2. İnversiyon ve major indeksinin $\mathfrak{S}_3$ üzerinde eş dağılımı

σ	*inv*	*maj*
123	0	0
213	1	1
132	1	2
231	2	2
312	2	1
321	3	3

Dolayısıyla $\sum_{\sigma\in S_3} q^{inv(\sigma)} = \sum_{\sigma\in S_3} q^{maj(\sigma)} = 1+2q+2q^2+q^3 = [3]_q!$ dür.

Tanım 2.1.8. Bir *çoklu küme* tekrar edebilen elemanların koleksiyonudur. Kümenin aksine bir çoklu kümede elemanların tekrar etmesine izin verilmektedir. Bir çoklu kümeyi belirtmek için çift adet çengelli parantez kullanılacaktır [35].

Örnek 2.1.9. $M = \{\{a,a,a,b,c,c\}\} = \{\{c,a,b,a,c,a\}\}$ 6 elemanlı bir çoklu kümedir.

Bir M çoklu kümesinde n defa tekrar eden bir a elemanını kısaca a^n ile göstereceğiz. Burada n aslında a elemanının M çoklu kümesindeki *tekrar etme sayısı*nı ya da *sıklığı* olarak adlandırılır. Dolayısıyla Örnek 2.1.9 deki M çoklu kümesini $M = \{\{a^3,b,c^2\}\}$ şeklinde gösteririz.

A, n elemanlı bir küme ve M de A nın elemanları ile oluşturulan bir çoklu küme ise, bu durumda M nin her bir elemanının A nın da bir elemanı olduğu açıktır. A nın elemanları ile oluşturulan k elemanlı çoklu kümelerin koleksiyonu $\left(\!\binom{A}{k}\!\right)$ sembolü ile gösterilmek üzere $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left|\left(\!\binom{A}{k}\!\right)\right|$ diyelim.

Teorem 2.1.10. n ve $k \geq 0$ olmak üzere

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$$

dir [33].

İspat. $[n]$ kümesinin elemanları ile oluşturulan $k-$elemanlı bir çoklu küme $M = \{\{m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq \cdots \leq m_k\}\}$ olmak üzere

$$f(M) = \{\{m_1 < m_2+1 < m_3+2 < \cdots < m_k+k-1\}\}$$

olacak şekilde bir $f:\left(\left(\begin{matrix}[n]\\k\end{matrix}\right)\right)\to\left(\begin{matrix}[n+k-1]\\k\end{matrix}\right)$ fonksiyonu tanımlayalım. Her bir $i=1,\cdots,k$ için $f(M)$ deki m_i+i-1 elemanları farklı ve $m_k\le n$ olduğu için $m_k+k-1\le n+k-1$ dir. Dolayısıyla $f(M)\in\left(\begin{matrix}[n+k-1]\\k\end{matrix}\right)$ dir. Tersine, elemanları artan sırada olan bir $S=\{s_1,s_2,s_3,\cdots,s_k\}\in\left(\begin{matrix}[n+k-1]\\k\end{matrix}\right)$ kümesini göz önüne alalım. Bu durumda $f^{-1}(S)=\{\{s_1<s_2-1<s_3-2<\cdots<s_k+k-1\}\}\in\left(\left(\begin{matrix}[n]\\k\end{matrix}\right)\right)$ olduğu görülür. Dolayısıyla f birebir ve örten olup $\left(\left(\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right)\right)=\left(\begin{matrix}n+k-1\\k\end{matrix}\right)$ dir. ■

Kombiratoriyal Yorum : k özdeş objenin n tane farklı kutuya yerleştirilme sayısı $\left(\begin{matrix}n+k-1\\k\end{matrix}\right)$ olduğundan Teorem 2.1.10 dan bu sayının $\left(\left(\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right)\right)$ ya eşit olduğu görülür.

Örnek 2.1.11. $A=\{a,b,c\}$ kümesinin elemanları ile oluşturulan 2 elemanlı çoklu kümelerin koleksiyonu

$$\left(\left(\begin{matrix}\{a,b,c\}\\2\end{matrix}\right)\right)=\{\{\{a,a\}\},\{\{a,b\}\},\{\{a,c\}\},\{\{b,b\}\},\{\{b,c\}\},\{\{c,c\}\}\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.12. (Çoklu Kümelerin Permütasyonları) $M=\{1^{a_1},\cdots,m^{a_m}\}$ eleman sayısı $n=a_1+\cdots+a_m$ olan bir çoklu küme olsun. M üzerindeki bütün permütasyonların kümesi $\mathfrak{S}_M$ olmak üzere $\mathfrak{S}_M$ nin elemanları birer tekrarlı permütasyon olduğu için $|\mathfrak{S}_M|=\left(\begin{matrix}n\\a_1,\cdots,a_m\end{matrix}\right)=\dfrac{n!}{a_1!\cdots a_m!}$ dir [35].

Örnek 2.1.13. $M=\{1^2,2^3,3^3\}$ kümesinin bir permütasyonu $w=21331223$ dür.

Tanım 2.1.14. $M=\{1^{a_1},\cdots,m^{a_m}\}$ eleman sayısı $n=a_1+\cdots+a_m$ olan bir çoklu küme ve $w=w_1w_2\cdots w_n\in\mathfrak{S}_M$ olsun. w elemanının bir *inversiyon*u, $i<j$ ve $w_i>w_j$ olacak şekilde (i,j,w_i,w_j) sıralı dörtlü biçiminde tanımlanır [35]. Tanım 2.1.2 deki gibi, $inv(w)$ yi w nin inversiyonlarının sayısı olarak tanımlarız. Permütasyonların durumundan farklı olarak, çoklu bir kümenin tekrarlı permütasyonunda bir inversiyonu sadece (w_i,w_j) çifti olarak tanımlayamayız. Çünkü $(i,j)\neq(k,l)$ iken $(w_i,w_j)=(w_k,w_l)$ olabilir [35].

Örnek 2.1.15. $M=\{1^2,2^3,3^3\}$ kümesinin $w=21331223$ permütasyonunun bütün inversiyonlarının kümesi

$Inv(w)=\{(1,2,2,1),(1,5,2,1),(3,5,3,1),(3,6,3,2),(3,7,3,2),(4,5,3,1),(4,6,3,2),(4,7,3,2)\}$ şeklinde olup $inv(w)=8$ bulunur.

Tanım 2.1.16. $M=\{1^{a_1},\cdots,m^{a_m}\}$ eleman sayısı $n=a_1+\cdots+a_m$ olan bir çoklu küme ve $w=w_1w_2\cdots w_n\in\mathfrak{S}_M$ olsun. $Des(w)=\{i\in[1,n-1]:w_i>w_{i+1}\}$ kümesine w nin descent *kümesi* denir. Bu kümenin elemanlarının toplamına da w nin *major indeksi* denir ve $maj(w)$ ile gösterilir. Böylece $maj(w)=\sum_{i\in Des(w)} i$ yazabiliriz [35].

Örnek 2.1.17. $M=\{1^2,2^3,3^3\}$ kümesi ve bu kümenin bir $w=21331223$ permütasyonu verilsin. Bu taktirde $Des(w)=\{1,4\}$ olup $maj(w)=1+4=5$ bulunur.

Teorem 2.1.18. (MacMahon) $M=\{1^{a_1},\cdots,m^{a_m}\}$ eleman sayısı $n=a_1+\cdots+a_m$ olan bir çoklu küme ve $w=w_1w_2\cdots w_n\in\mathfrak{S}_M$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{w\in\mathfrak{S}_M} q^{inv(w)}=\begin{bmatrix} n \\ a_1,\cdots,a_m \end{bmatrix}_q$$

şeklindedir. Burada $\begin{bmatrix} n \\ a_1,\cdots,a_m \end{bmatrix}_q := \dfrac{[n]_q!}{[a_1]_q!\cdots[a_m]_q!}$ olarak tanımlanır [17, 26, 35].

İspat. w_0 daki a_i tane i leri w_i tarafından belirtilen sıraya göre $a_1+\cdots+a_{i-1}+1$,

$a_1+\cdots+a_{i-1}+2$, $\cdots$, $a_1+\cdots+a_{i-1}+a_i$ sayılarına dönüştüren bir

$$\phi:\mathfrak{G}_M\times\mathfrak{G}_{a_1}\times\cdots\times\mathfrak{G}_{a_m}\to\mathfrak{G}_n$$
$$(w_0,w_1,\cdots,w_m)\mapsto w$$

fonksiyonu tanımlayalım. Örneğin, $\phi(21331223,21,231,312)=(42861537)\in\mathfrak{G}_8$ dir. Burada $w_0=21331223$ tekrarlı permütasyonundaki 11 i, $w_1=21$ permütasyonunun terim sırasını koruyarak 21 e, w_0 daki 222 yi $w_2=231$ permütasyonunun terim sırasını koruyarak 453 e ve son olarak w_0 daki 333 ü $w_3=312$ permütasyonunun terim sırasını koruyarak 867 ye dönüştürdük. Dolayısıyla

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & 1 & 3 & 3 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ & 2 & & & 1 & & & \\ 4 & & & & & 5 & 3 & \\ & & 8 & 6 & & & & 7 \end{array}$$

olup bu değişmeler $w=(42861537)\in\mathfrak{G}_8$ permütasyonunu vermektedir. Hatta $inv(w)=13=8+1+2+2=inv(w_0)+inv(w_1)+inv(w_2)+inv(w_3)$ eşitliği de sağlanır. Böylece her bir $(w_0,w_1,\cdots,w_m)\in\mathfrak{G}_M\times\mathfrak{G}_{a_1}\times\cdots\times\mathfrak{G}_{a_m}$ için

$$inv(w)=inv(w_0)+inv(w_1)+\cdots+inv(w_m)$$

eşitliğini sağlayan bir tek $w\in\mathfrak{G}_n$ olduğu açıktır. Buradan ϕ birebir bir fonksiyondur.

Aynı zamanda $\left|\mathfrak{G}_M\times\mathfrak{G}_{a_1}\times\cdots\times\mathfrak{G}_{a_m}\right|=\dfrac{n!}{a_1!\cdots a_m!}a_1!\cdots a_m!=n!=\left|\mathfrak{G}_n\right|$ olduğu için ϕ örtendir. Dolayısıyla Teorem 2.1.6 dan

$$\left(\sum_{w\in\mathfrak{G}_M} q^{inv(w)}\right)[a_1]_q!\cdots[a_m]_q![n]_q!$$

elde edilir ki, bu da ispatı tamamlar. ■

Sonuç 2.1.19. $M=\{1^m,2^n\}$ olmak üzere

$$\sum_{w\in\mathfrak{G}_M} q^{inv(w)}=\begin{bmatrix} n+m \\ n \end{bmatrix}_q$$

dir [17, 27].

Örnek 2.1.20. $M=\{1^3,2^5\}$ için $\phi:\mathfrak{G}_M\times\mathfrak{G}_3\times\mathfrak{G}_5\to\mathfrak{G}_8,\ (w_0,w_1,w_2)\mapsto w$ fonksiyonu ve $w_0=12211222\in\mathfrak{G}_M, w_1=312\in\mathfrak{G}_3,\ w_2=24153\in\mathfrak{G}_5$ elemanları verilsin. O halde $\phi(w_0,w_1,w_2)=(35712486)=w\in\mathfrak{G}_8$ ve $inv(w)=10=inv(w_0)+inv(w_1)+inv(w_2)$ olduğu görülür. Aynı zamanda

$$\sum_{w\in\mathfrak{G}_M} q^{inv(w)}=\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}_q=1+q+2q^2+2q^3+3q^4+3q^5+4q^6+3q^7+3q^8+2q^9+2q^{10}+q^{11}+q^{12}$$

elde edilir.

Aşağıdaki önermeyi, iki elemanlı bir küme yardımıyla oluşturulan bir çoklu kümenin permütasyonlarının kümesi üzerinde inversiyonun etkimesi yardımıyla Önerme 1.1.17 nin yeniden yorumlanması olarak göz önüne alınabiliriz.

Önerme 2.1.21. m ve n birer pozitif tamsayılar olmak üzere

$$\begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix}_q=\begin{bmatrix} m+n-1 \\ n-1 \end{bmatrix}_q+q^n\begin{bmatrix} m+n-1 \\ n \end{bmatrix}_q$$

dir [17, 33].

İspat. $M=\{1^m,2^n\}$ olmak üzere M üzerindeki çoklu permütasyonların kümesi olan $\mathfrak{G}_M$ yi $\mathfrak{G}_{m,n}$ şeklinde gösterelim. İlk olarak, $\mathfrak{G}_{m,n}$ deki çoklu permütasyonları 2 ile

bitenler ve 1 ile bitenler olarak sınıflandırdığımızda $\mathfrak{G}_{m,n} = \mathfrak{G}_{m,n-1} \cdot 2 \uplus \mathfrak{G}_{m-1,n} \cdot 1$ ayrık birleşimini yazabiliriz. Burada $\mathfrak{G}_{m,n-1}$ ve $\mathfrak{G}_{m-1,n}$ sırasıyla $\{1^m, 2^{n-1}\}$ ve $\{1^{m-1}, 2^n\}$ çoklu kümelerinin permütasyonlarının kümeleridir. Böylece her bir $w \in \mathfrak{G}_{m,n-1}$ için $inv(w \cdot 2) = inv(w)$ dir. Diğer taraftan herhangi bir $w \in \mathfrak{G}_{m-1,n}$ için $inv(w \cdot 1) = inv(w) + n$ dir, çünkü $w \cdot 1$ tekrarlı permütasyonunun son terimi olan 1 aslında w da bulunan 2 sayısının sağ tarafında yer aldığı için $w \cdot 1$ daki inversiyon sayısı w daki inversiyon sayısından n tane fazladır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix}_q &= \sum_{w \in \mathfrak{G}_{m,n}} q^{inv(w)} = \sum_{w \in \mathfrak{G}_{m,n-1}} q^{inv(w)} + \sum_{w \in \mathfrak{G}_{m-1,n}} q^{inv(w)+n} \\ &= \sum_{w \in \mathfrak{G}_{m,n-1}} q^{inv(w)} + q^n \sum_{w \in \mathfrak{G}_{m-1,n}} q^{inv(w)} \\ &= \begin{bmatrix} m+n-1 \\ n-1 \end{bmatrix}_q + q^n \begin{bmatrix} m+n-1 \\ n \end{bmatrix}_q \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Önerme 2.1.22. q bir asal sayı olmak üzere F_q cismi üzerindeki $n-$boyutlu bir $V = F_q^n$ vektör uzayın $k-$boyutlu alt uzaylarının sayısı $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ dur [27, 33, 35].

İspat. Öncelikle $V = F_q^n$ deki k tane lineer bağımsız $(v_1, \cdots, v_k)$ vektörlerinin sayısını hesaplayacağız. $|V| = |F_q^n| = q^n$ olduğu için sıfırdan faklı v_1 vektörünü $q^n - 1$ farklı şekilde seçebiliriz. v_1 vektörünün gerdiği alt uzay $span(v_1)$ olsun. $|span(v_1)| = q$ olduğunu göz önüne aldığımızda, v_2 vektörünü v_1 vektörününün gerdiği alt uzayda olmayacak şekilde $q^n - q$ farklı şekilde seçebiliriz. Benzer şekilde v_1 ve v_2 vektörlerinin gerdiği alt uzay $span(v_1, v_2)$ olmak üzere, v_3 vektörünü $span(v_1, v_2)$ de olmayacak şekilde $q^n - q^2$ farklı şekilde seçebiliriz. Bu şekilde devam edildiğinde $V = F_q^n$ deki k tane lineer bağımsız $(v_1, \cdots, v_k)$ vektörlerinin sayısını

$$\left(q^n-1\right)\left(q^n-q\right)\cdots\left(q^n-q^{k-1}\right)$$

olarak buluruz. Şimdi $V=F_q^n$ nin $k-$boyutlu bir alt uzayı W olsun. W yi geren farklı sıralı bazların sayısı yukarıdaki yaklaşıma benzer olarak

$$\left(q^k-1\right)\left(q^k-q\right)\cdots\left(q^k-q^{k-1}\right)$$

olarak bulunur. Böylece $V=F_q^n$ vektör uzayının $k-$boyutlu farklı W alt uzaylarının sayısı

$$\begin{aligned}\frac{\left(q^n-1\right)\left(q^n-q\right)\cdots\left(q^n-q^{k-1}\right)}{\left(q^k-1\right)\left(q^k-q\right)\cdots\left(q^k-q^{k-1}\right)} &= \frac{q^{\binom{k}{2}}\left(q^n-1\right)\left(q^{n-1}-1\right)\cdots\left(q^{n-k+1}-1\right)}{q^{\binom{k}{2}}\left(q^k-1\right)\left(q^{k-1}-1\right)\cdots\left(q-1\right)} \\ &= \frac{\left(q-1\right)^k\left[n\right]_q\left[n-1\right]_q\cdots\left[n-k+1\right]_q}{\left(q-1\right)^k\left[k\right]_q\left[k-1\right]_q\cdots\left[1\right]_q} \\ &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q\end{aligned}$$

olarak bulunur. ■

Tanım 2.1.23. α bir reel sayı ve n pozitif bir tam sayı olmak üzere, $\alpha^{\underline{n}} := \alpha\left(\alpha-1\right)\cdots\left(\alpha-n+1\right)$ açılımına α nın *düşen faktöriyeli* (*falling factorial*) denir [17, 33].

Tanım 2.1.24. k negatif olmayan bir tamsayı ve α herhangi bir reel sayı olmak üzere,

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\cdots\left(\alpha-k+1\right)}{k!} = \frac{\alpha^{\underline{k}}}{k!}$$

sayısına *genelleştirilmiş binom katsayısı* denir [33].

Örnek 2.1.25. $\binom{-4}{3} = \frac{\left(-4\right)\left(-4-1\right)\left(-4-2\right)}{3!} = \frac{\left(-1\right)^3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{3!} = \left(-1\right)^3\binom{6}{3} = -20$ dir.

Örnek 2.1.26. n ve k negatif olmayan tamsayılar olmak üzere, Teorem 2.1.10 dan

$$\begin{aligned}\binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \\ &= (-1)^k \left(\!\binom{n}{k}\!\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2.1.27. Tanım 2.1.24 te $\alpha = \frac{-1}{2}$ ve $k = 4$ alınırsa

$$\begin{aligned}\binom{-1/2}{4} &= \frac{\left(-1/2\right)\left(-1/2-1\right)\left(-1/2-2\right)\left(-1/2-3\right)}{4!} \\ &= (-1)^4 \frac{1/2 \cdot 3/2 \cdot 5/2 \cdot 7/2}{4!} = (-1)^4 \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4 \cdot 4!} \\ &= (-1)^4 \frac{8!}{2^4 \cdot 4! \cdot 2^4 \cdot 4!} = (-1)^4 \frac{8!}{4^4 \cdot 4! \cdot 4!} \\ &= \frac{(-1)^4}{4^4}\binom{8}{4}\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 2.1.28. (Genelleştirilmiş Binom Teoremi) Herhangi bir α reel sayısı için

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

dir, burada $\binom{\alpha}{k}$ genelleştirilmiş binom katsayısıdır [36].

İspat. $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun Maclaurin seri açılımı

$$f(x)=(1+x)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^{k}$$

şeklinde olup f fonksiyonunun her bir k doğal sayısı için $k-$yinci mertebeden türevi

$$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}=\alpha^{\underline{k}}(1+x)^{\alpha-k}$$

formundadır. Dolayısıyla $f^{(k)}(0)=\alpha^{\underline{k}}(1+0)^{\alpha-k}=\alpha^{\underline{k}}$ olup Tanım 2.1.24 ten

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{\underline{k}}}{k!}x^{k}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^{k}$$

elde edilir. ■

n sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere $\left(\left(\binom{n}{k}\right)\right)_{k\geq 0}$ dizisinin adi üretici fonksiyonu aşağıdaki sonuçta verilmiştir.

Sonuç 2.1.29. Her n pozitif tamsayısı için

$$\frac{1}{(1-x)^{n}}=\sum_{k\geq 0}\left(\binom{n}{k}\right)x^{k}$$

dir [33,35].

İspat. Teorem 2.1.28 de özel olarak, $\alpha:=-n$ alınırsa, Örnek 2.1.26 ve Teorem 2.1.10 dan

$$\begin{aligned}(1-x)^{-n}&=\sum_{k\geq 0}\binom{-n}{k}(-x)^{k}=\sum_{k\geq 0}(-1)^{k}\left(\binom{n}{k}\right)(-x)^{k}\\&=\sum_{k\geq 0}\left(\binom{n}{k}\right)x^{k}=\sum_{k\geq 0}\binom{n+k-1}{k}x^{k}\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 2.1.29 da $n=1$ alındığında bilinen $(1-x)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1+k-1}{k}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}x^k$

açılımı elde edilir.

Örnek 2.1.30. Sonuç 2.1.29 dan yaralanarak

$$(1-x)^{-3}=1+3x+6x^2+10x^3+\cdots,\qquad (1+2x)^{\frac{-3}{2}}=1-3x+\frac{15}{2}x^2-\frac{35}{2}x^3+\cdots,$$

$$(1+5x)^{\frac{1}{5}}=1+x-2x^2+6x^3-21x^4+\cdots \text{ ve } (1-4x)^{\frac{1}{2}}=1-2x-2x^2-4x^3-10x^4-\cdots$$

açılımları elde edilir.

2.2. Düzensizlikler

Eski bir Fransız kağıt oyunu olan rencontres (buluşma) oyununda, 52 kağıt bir sıra halinde yere açılır. İkinci bir deste kağıt, ilk destede açılmış her kağıdın üzerine birer kağıt gelecek şekilde yerleştirilir. Elde edilen puan, her iki destede de üst üste gelmiş aynı kağıdın geldiği durumların sayılması ile bulunur**.** 1708 yılında Pierre Rémond de Montmort $(1678-1719)$ "problème des rencontres: Rencontres oyununda hiç puan alamama olasılığı nedir?" sorusunu ortaya attı. Montmort sorunun cevabını "52 kağıdın rastgele seçilmiş permütasyonunun düzensizlik oluşturma olasılığıdır. Yani, 52 nci düzensizlik sayısı d_{52} olmak üzere $\frac{d_{52}}{52!}$ dir." şeklinde vermiştir.

Düzensizlik sayıları, Pierre Renomd de Montmort tarafından 1708 de yayınlanan "Essay d'analyse sur les jeux de hazard" adlı eserinde kombinasyonel olarak incelenmiştir.

Tanım 2.2.1. Bir $\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n\in\mathfrak{S}_n$ permütasyonu tek satır gösterimi ile verilsin. Eğer her bir i, $1\le i\le n$ için $\sigma_i\neq i$ olursa σ permütasyonuna $\mathfrak{S}_n$ simetrik grubunda bir *düzensizlik* denir. $\mathfrak{S}_n$ deki düzensizliklerin kümesi D_n ile ve düzensizliklerin sayısı da d_n sembolü ile gösterilir [32, 33, 35].

Örnek 2.2.2. $\mathfrak{S}_4$ simetrik grubundaki düzensizlikler, permütasyonların tek satır gösterimi kullanarak

$$D_4 = \{2341, 2413, 3412, 3142, 4312, 4123, 2143, 3412, 4321\}$$

şeklinde ifade edilir.

$\mathfrak{S}_n$ deki düzensizliklerin sayısını İçerme-Dışlama Prensibi olan Teorem 1.1.2 den yararlanarak aşağıdaki teoremde vereceğiz.

Teorem 2.2.3. $\mathfrak{S}_n$ deki düzensizliklerin sayısı $d_n = n!\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}$ dir [17, 32, 33].

İspat. Her bir $i = 1, 2, \ldots, n$ için $A_i := \{f \in \mathfrak{S}_n : f(i) = i\}$ kümesini tanımlayalım. Bu durumda $[n] - \{i_1, i_2, \cdots, i_j\}$ kümesinin permütasyonlarının sayısı $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j}| = (n-j)!$ ve $D_n = \mathfrak{S}_n - (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$ olduğu için Teorem 1.1.2 den

$$d_n = n! - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = n! - \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{n!}{j!} = n!\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}$$

elde edilir. ■

Her $x \in \mathbb{R}$ için $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!} = e^{-1} \approx 0,368$$

olduğu elde eldilir. Dolayısıyla $[n]$ üzerindeki permütasyonların düzensiz olma olasılığı yaklaşık $\frac{d_n}{n!}$ dir. Aşağıda bazı n değerleri için $\frac{d_n}{n!}$ sayılarının tablosunu vereceğiz.

Tablo 3. Düzensizlik Olasılığı

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{d_n}{n!}$	1	0	0,5	0,3333	0,375	0,36667	0,36806	0,36786

Verilen bir n pozitif tamsayısı için d_n değerini bulmak Teorem 2.2.3 ten gayet kolaydır.

$\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ ve $\mathfrak{G}_3$ deki düzensizlik sayıları sırasıyla $d_1 = 0$, $d_2 = 1$ ve $d_3 = 2$ olup $\mathfrak{G}_3$ deki düzensizlikler $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ve $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ şeklindedir. Benzer şekilde $\mathfrak{G}_5$ simetrik grubunda $d_5 = 5!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right] = 44$ tane düzensizlik vardır.

Önerme 2.2.4. Her n pozitif tamsayısı için

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k = n!$$

dir [17, 37].

İspat. **<u>Birinci ispat.</u>** $\mathfrak{G}_n$ de tam olarak $n-k$ tane elemanı sabit bırakan ve geriye kalan k tane noktanın hiçbirisini kendileri ile eşlemeyen $\binom{n}{k} d_k$ tane permütasyonu vardır.

$|\mathfrak{G}_n| = n!$ olduğu için $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k = n!$ elde edilir.

<u>İkinci ispat.</u> Teorem 2.2.3 ü göz önüne aldığımızda

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} (n-k)!$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k!$$

olup Teorem 1.1.11 deki Binomial İnversiyon'u kullandığımızda $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_k=n!$ eşitliğini elde ederiz. ■

Aşağıdaki önerme Euler tarafından 1753 te "Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre" eserinde kanıtlanmıştır.

Önerme 2.2.5. Her n pozitif tamsayısı için aşağıdaki bağıntılar sağlanır.

i. $d_n=n\,d_{n-1}+(-1)^n$

ii. $d_n=(n-1)\left[d_{n-1}+d_{n-2}\right]$

şeklindedir [5,17,33].

İspat. i) Teorem 2.2.3 ü göz önüne aldığımızda

$$\begin{aligned} d_n &= n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}=n!\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i}{i!}+\frac{(-1)^n}{n!}\right] \\ &= n\left[(n-1)!\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i}{i!}\right]+(-1)^n \\ &= nd_{n-1}+(-1)^n \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) Yukarıdaki (i) maddesinden $d_n=nd_{n-1}+(-1)^n$ ve $d_{n-1}=(n-1)d_{n-2}+(1)^{n-1}$ bağıntılarını yazabiliriz. Bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa,

$$d_n+d_{n-1}=nd_{n-1}+(n-1)d_{n-2}+(-1)^n+(-1)^{n-1}=nd_{n-1}+(n-1)d_{n-2}$$

olup buradan $d_n=(n-1)\left[d_{n-1}+d_{n-2}\right]$ bağıntısı elde edilir. ■

Teorem 2.2.6. (d_n) dizisine ait üstel üretici fonksiyon

$$G(x)=\sum_{n\geq 0}\left(d_n\frac{x^n}{n!}\right)=\frac{e^{-x}}{1-x}$$

şeklindedir [5, 33].

İspat. $d_0 = 1$ ve Önerme 2.2.5 ten her n pozitif tamsayısı için $d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$ olduğundan

$$G(x) = \sum_{n\geq 0}\left(d_n \frac{x^n}{n!}\right) = 1 + \sum_{n\geq 1}\left(d_n \frac{x^n}{n!}\right) = 1 + \sum_{n\geq 1} nd_{n-1}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

olup

$$G(x) = x\sum_{n\geq 1} d_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + e^{-x} = x\sum_{n\geq 0} d_n \frac{x^n}{n!} + e^{-x} = xG(x) + e^{-x}$$

bulunur. Buradan $G(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$ üretici fonksiyonu elde edilir. ■

Örnek 2.2.7. (Vestiyer - Şapka Kontrolü Problemi) Bir yeni vestiyer çalışanı, restorana gelen n müşterinin şapkalarını dalgınlıkla kendilerine birer vestiyer numarası vermeden vestiyere asmıştır. Müşteriler şapkalarını geri almak için geldiklerinde, vestiyer çalışanı vestiyerdeki şapkaları rastgele müşterilere dağıtmıştır. Hiç kimsenin kendi şapkasını geri almama olasılığı $n-$yinci düzensizlik sayısı d_n olmak üzere $\dfrac{d_n}{n!}$ dir.

Örnek 2.2.8. $1, 2, \ldots, n$ pozitif tam sayıları için $1, 2, 3, 4, 5$ ilk beş pozisyonda görünecek şekilde toplam 11660 düzensizlik varsa bu durumda n sayısını Teorem 2.2.3 ü kullanarak aşağıdaki şekilde bulabiliriz: $1, 2, 3, 4, 5$ tam sayıları ilk beş pozisyonda olacak şekilde $d_5 = 44$ farklı şekilde düzensizliğe sahiptir. Böylece geriye kalan $n-5$ tane tamsayı da d_{n-5} farklı şekilde düzensizleştirilebilir. Böylece $d_5 \cdot d_{n-5} = 11160$ olup

$$d_5 \cdot d_{n-5} = 11160 \Rightarrow d_{n-5} = \frac{11660}{d_5} = \frac{11660}{44} = 265$$

dir. Teorem 2.2.3 yardımıyla $n = 11$ olduğu görülür.

Örnek 2.2.9. 8 farklı mektup 8 farklı adresteki 8 kişiye gönderilecektir. En az bir mektup doğru kişiye gidecek şekilde bu işlemi kaç farklı yol ile yapılabileceğini düzensizlik yardımıyla aşağıdaki şekilde bulabiliriz: 8 farklı zarfa 8 mektubu yerleştirmenin toplam sayısı 8! dir.8 mektubu hiçbir mektup doğru kişiye gitmeyecek şekilde 8 zarfa yerleştirme işleminin sayısı d_8 dir. O halde, en az bir mektup doğru kişiye gidecek şekilde 8 mektubu 8 zarfa yerleştirmenin sayısı

$$8!-d_8 = 8!-\left(8!e^{-1}\right) = 25487$$

olarak bulunur.

3. BÖLÜM

SİMETRİK GRUPLARDAKİ DÜZENSİZLİK POLİNOMLARI

3.1. Major İndeksinin Simetrik Gruplardaki Düzensizlikler Üzerindeki Etkimesi

Bu bölümde düzensizlik sayılarının q analogu olarak bilinen düzensizlik polinomlarını Wachs [37] çalışması temelinde ele alacağız. Wachs, major indeksinin simetrik gruplardaki düzensizlikler üzerindeki etkimesine ve Gauss Binomial Teoremine dayalı olarak q bilinmeyen olmak üzere $d_n(q)=\sum_{\sigma\in D_n} q^{maj(\sigma)}=[n]_q!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{[k]_q!}q^{\binom{k}{2}}$ polinomunu elde etmiştir.

Tanım 3.1.1. A kümesi n tane pozitif tamsayıdan oluşmak üzere, A üzerindeki permütasyonların veya A daki n farklı harften oluşan kelimelerin kümesi $\mathfrak{S}_A$ olsun. $\sigma\in\mathfrak{S}_A$ ve $i\in A$ için $\sigma(i)=i$ oluyorsa bu durumda $i\in A$ ya σ permütasyonunun bir *sabit noktası* denir [37].

Tanım 3.1.2. $A=\{a_1<a_2<\cdots<a_k : a_i\in\mathbb{Z}^+, i=1,\cdots,k\}$ ve $\sigma\in\mathfrak{S}_A$ permütasyonu verilsin. σ daki her bir a_i terimini $i=1,\cdots,k$ olmak üzere i pozitif tamsayısı ile değiştirmek suretiyle elde edilen $\mathfrak{S}_k$ daki permütasyona σ nın *indirgenmesi* (*reduction*) denir [37].

Örnek 3.1.3. $A=\{1,2,3,5,7\}$ kümesi üzerindeki bir $\sigma\in\mathfrak{S}_A$ permütasyonu tek satır gösterimi ile $\sigma=53172$ şeklinde verilsin. σ permütasyonunun $\mathfrak{S}_5$ üzerindeki indirgenmesi 43152 şeklindedir.

Tanım 3.1.4. $\sigma \in \mathfrak{G}_n$ permütasyonu verilsin. σ altındaki görüntüsü sabit olmayan pozitif tamsayılarından oluşan alt dizinin indirgenmesine σ permütasyonunun *düzensizlik parçası* denir ve $dp(\sigma)$ ile gösterilir [37]. $\mathfrak{G}_n$ deki birim permütasyonun düzensizlik parçası boş kelime olan Λ olarak kabul edilir.

Örnek 3.1.5. Tek satır gösterimi ile verilen $\sigma = 5314762 \in \mathfrak{G}_7$ permütasyonu 4 ve 6 elemanlarını sabit bırakmaktadır. σ altındaki görüntüsü sabit olmayan pozitif tamsayılarından oluşan alt dizi $\alpha = 53172$ şeklinde olup α nın indirgenmesi 43152 şeklindedir. Dolayısıyla $dp(\sigma) = 43152 \in \mathfrak{G}_5$ dir [37].

Not 3.1.6. $\mathfrak{G}_n$ deki bir permütasyonun düzensizlik parçası yine bir düzensizliktir. Tersine, D_k daki herhangi bir düzensizlik ve $[n]$ nin k elemanlı bir alt kümesi $\mathfrak{G}_n$ simetrik grubunda $n-k$ tane noktayı sabit bırakan bir permütasyon belirler. Dolayısıyla D_k da verilen bir düzensizlik parçasına sahip $\mathfrak{G}_n$ deki permütasyonların sayısı $\binom{n}{k}$ olarak bulunur. Böylece Önerme 2.2.4 den $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} d_k = n! = |\mathfrak{G}_n|$ yazılır.

Bölümdeki asıl amacımız verilen belirli bir düzensizlik parçasına sahip permütasyonları $q-$formda polinomial anlamda saymaktır.

Tanım 3.1.7. $\pi = \pi_1 \cdots \pi_m \in \mathfrak{G}_m$ ve $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n \in \mathfrak{G}_n$ iki ayrık permütasyon olsun. Yani tek satır gösterimlerinde ortak eleman bulunmasın. Bir $\tau \in \mathfrak{G}_{m+n}$ permütasyonu eğer π ve σ permütasyonlarını kendi tek satır gösterimlerindeki elemanların sırası korunacak şekilde birer alt dizi olarak içeriyorsa bu takdirde $\tau \in \mathfrak{G}_{m+n}$ permütasyonuna π ve σ permütasyonlarının *karılması* (*shuffle*) denir ve $\tau = shuff(\pi, \sigma)$ ile gösterilir. π ve σ permütasyonlarının karılmalarıyla oluşan permütasyonların kümesi $Sh(\pi, \sigma)$ ile gösterilir [19,22,33,34].

Teorem 3.1.8. $\pi = \pi_1 \cdots \pi_m \in \mathfrak{G}_m$ ve $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n \in \mathfrak{G}_n$ iki ayrık permütasyon olsun. Bu durumda $|Sh(\pi, \sigma)| = \binom{m+n}{m}$ dir [22].

İspat. Karma işleminde π ve σ permütasyonlarında bulunan her bir terimin sırası korunacağı için π ve σ permütasyonlarının karılması olan bir τ permütasyonu oluşturulurken π ve σ permütasyonları ayrık olduğu için τ permütasyonunda toplam $m+n$ tane pozisyon vardır. Bu pozisyonlardan herhangi m tanesi seçilip, seçilen bu pozisyonlara $\pi_1,\cdots,\pi_m$ elemanlarını π deki orijinal sıralamasına göre yerleştirildiğinde geriye kalan n pozisyona da $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ elemanlarını σ deki orijinal sıralamasına göre yerleştirilir. Bu işlem $\binom{m+n}{m}$ tane farklı biçimde yapılacağı için $\left|Sh(\pi,\sigma)\right|=\binom{m+n}{m}$ bulunur. ■

Örnek 3.1.9. $\pi=31$ ve $\sigma=24$ ayrık permütasyonlarının karılmalarının kümesi $Sh(31,24)=\{3124,3214,3241,2314,2341,2431\}$ şeklinde olup $\left|Sh(31,24)\right|=\binom{4}{2}=6$ dır [33].

Örnek 3.1.10. 52 farklı karttan oluşan bir iskambil destesini 30 ve 22 karttan oluşan iki alt desteye ayırdığımızda bu iki alt deste toplam $\binom{52}{30}$ farklı şekilde karılır.

id_n, $\mathfrak{S}_n$ simetrik grubundaki $123\cdots n$ birim permütasyonu olmak üzere $\left|Sh(id_n,id_n)\right|=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=C_n$ dir [6]. Gerçekten, $id_n=12\cdots n$ permütasyonunu kendisi ile kararken karma sonucu elde edilen $2n$ uzunluklu tekrarlı permütasyonda ilk görülen $1,2,\cdots,n$ elemanları 1 ile ikinci kez görülen aynı elemanları -1 ile kodladığımız zaman $2n$ uzunluklu bir seçim dizisi elde ederiz. Tersine $2n$ uzunluklu herhangi bir seçim dizisi de $id_n=12\cdots n$ permütasyonunun kendisi ile shuffle biçiminde yazılabilir. Seçim dizisinde soldan sağa doğru görülen 1 terimlerinin yerine sırasıyla $1,2,\cdots,n$ yazılır. Daha sonra seçim dizisinde yer alan -1 terimlerinin yerine de soldan sağa doğru sırasıyla yine $1,2,\cdots,n$ yazıldığında id_n permütasyonunun kendisi ile bir karılması elde edilmiş olur. Böylece $2n$ uzunluklu bir seçim dizilerinin kümesi olan $B(n)$ ile $Sh(id_n,id_n)$ kümesi arasında birebir bir eşleşme olduğu görülür. Teorem 1.2.15 den

$\left|Sh\left(id_n, id_n\right)\right| = \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n$ elde eldir. Örneğin, $2n = 6$ uzunluklu seçim dizilerinin $B(3)$ kümesi ile $Sh\left(id_3, id_3\right)$ kümesi arasındaki eşleşme görsel olarak aşağıdaki gibidir:

$$\begin{array}{c} Sh(1\ \ 2\ \ 3\ ,\ 1\ \ 2\ \ 3) \\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow \\ 1\ \ 1\ \ 1\ -1\ -1\ -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & \\ \downarrow & 1 & \downarrow & 2 & \downarrow & 3 & , & \downarrow & 1 & \downarrow & \downarrow & 2 & 3 & , \downarrow & \downarrow & 1 & 2 & \downarrow & 3 & , \downarrow & \downarrow & 1 & \downarrow & 2 & 3 & \text{ve} \\ 1 & & 2 & & 3 & & & 1 & & 2 & 3 & & & 1 & 2 & & & 3 & & 1 & 2 & & 3 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 1\ \ 1\ \ 1\ -1\ -1\ -1 \\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow \\ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 1\ \ 2\ \ 3 \end{array}$$

Önerme 3.1.11. Bir $\alpha \in D_k$ düzensizliği verilsin. α ve $\beta = k+1, k+2, \ldots, n$ nın elemanlarının bütün karılmalarının kümesi $Sh\left(\alpha, \beta\right)$ olsun. Burada $\left|Sh\left(\alpha, \beta\right)\right| = \binom{n}{k}$ dır. Yani $Sh\left(\alpha, \beta\right)$, her bir elemanı α ve β yı tamamlayıcı alt diziler olarak içeren $\mathfrak{S}_n$ deki permütasyonların kümesidir. Bu durumda $\left\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid dp\left(\sigma\right) = \alpha\right\}$ ve $Sh\left(\alpha, \beta\right)$ kümeleri arasında birebir ve örten bir fonksiyon vardır [37].

İspat. $\left\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid dp\left(\sigma\right) = \alpha\right\}$ ve $Sh\left(\alpha, \beta\right)$ kümeleri arasındaki fonksiyon aşağıdaki şekilde tanımlanır: $\left\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid dp\left(\sigma\right) = \alpha\right\}$ kümesindeki her bir σ permütasyonu için; σ altındaki görüntüsü sabit olmayan noktaları α ile ve σ nın sabit bıraktığı noktaları da α nın tamamlayıcı alt dizisi olan β ile yer değiştiren fonksiyon $f\left(\sigma\right) = shuff\left(\alpha, \beta\right) \in Sh\left(\alpha, \beta\right)$ kuralı ile verilsin. f fonksiyonunun birebir olduğu açıktır. Teorem 3.1.8 den $\left|\left\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid dp\left(\sigma\right) = \alpha\right\}\right| = \left|Sh\left(\alpha, \beta\right)\right| = \binom{n}{k}$ olduğu için f örtendir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Örnek 3.1.12. Wachs'un [37] deki çalışmasına dayanarak $\gamma = 5314762 \in \{\sigma \in \mathfrak{S}_7 \mid dp(\sigma) = \alpha = 43152\}$ permütasyonunun descent kümesi $Des(\gamma) = \{1,2,5,6\}$ olup $maj(\gamma) = 14$ tir. Burada $\gamma = 5314762$ permütasyonunun sabit bırakmadığı noktalardan oluşan alt dizi 53172 ve sabit bıraktığı noktalardan oluşan alt dizi 46 olduğu için $53172 \to \alpha = 43152$ ve $46 \to \beta = 67$ olmak üzere $f(\gamma) = shuff(\alpha = 43152, \beta = 67) = 4316572$ olarak elde edilir. Buradan $Des(f(\gamma)) = \{1,2,4,6\}$ olup $maj(f(\gamma)) = 13$ bulunur. Dolayısıyla f fonksiyonu major indeksini korumaz.

Garsia ve Gessel'in formülü aynı zamanda Chu-Vandermonde toplamının [4] $q-$analogu olan

$$\sum_{k=0}^{h} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m \\ h-k \end{bmatrix}_q q^{(n-k)(h-k)} = \begin{bmatrix} m+n \\ h \end{bmatrix}_q$$

özdeşliğini Stanley'in [34] shuffle teoreminde uygulayarak türetebilir.

Teorem 3.1.13. (Garsia ve Gessel) $\mathfrak{S}_n$ simetrik grubunun ayrık iki permütasyonu α ve β olsun. Bu durumda $\sum_{\sigma \in Sh(\alpha,\beta)} q^{maj(\sigma)} = \begin{bmatrix} n \\ \mu \end{bmatrix}_q q^{maj(\alpha)+maj(\beta)}$ dır. Burada α permütasyonun tek satır gösteriminde bulunan eleman sayısı μ dür [8, 19, 34].

Not 3.1.14. Teorem 3.1.13 $Sh(\alpha,\beta)$ kümesini $q-$formda saymamıza izin verir. Fakat Önerme 3.1.11 in ispatında tanımlanan birebir ve örten olan f fonksiyonu major indeksini korumadığından, bu fonksiyon belirli bir düzensizlik parçasına sahip permütasyonları major indeksi yardımıyla $q-$formda saymak için kullanışlı değildir.

Tanım 3.1.15. $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n \in \mathfrak{S}_n$ permütasyonu verilsin. Eğer $\sigma_i > i$ ise σ_i elemanına *aşan eleman* (*excedant*) denir. Eğer $\sigma_i < i$ ise σ_i elemanına *altta kalan eleman* (*subcedant*) denir. σ permütasyonunun aşan ve altta kalan elemanlarının kümelerini sırasıyla $e(\sigma)$ ve $s(\sigma)$ sembolleri ile göstereceğiz [37].

Şimdi n yi sabitleyelim ve $k \le n$ olsun. $\tilde{\sigma} \in \mathfrak{S}_k$ permütasyonu $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ permütasyonundan aşağıdaki şekilde elde edilmek üzere, $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid dp(\sigma) = \alpha\}$ ve $Sh(\tilde{\alpha}, \beta)$ permütasyon kümeleri arasında descentleri koruyan başka bir birebir ve örten dönüşümün mevcut olduğunu göstereceğiz. Bunun için öncelikle $\tilde{\sigma}$ permütasyonun nasıl elde edildiğinden bahsetmek gerekir. $\tilde{\sigma}$ permütasyonu;

a) σ nın $i-$yinci <u>en küçük</u> altta kalan elemanını (subcedant element) $i,\ i = 1, 2, \cdots, s(\sigma)$ ile,

b) σ nın $i-$yinci <u>en küçük</u> sabit noktasını (fixed point) $s(\sigma)+i,\ i = 1, 2, \cdots, k - s(\sigma) - e(\sigma)$ ile ve

c) σ nın $i-$yinci <u>en büyük</u> aşan elemanını (excedant element) $n-i+1,\ i = 1, 2, \cdots, e(\sigma)$ ile

yer değiştirerek $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ permütasyonundan elde edilir. Burada dikkat edilmelidir ki, $\tilde{\sigma}$ permütasyonu σ nın yanı sıra n değerine de bağlıdır. Eğer özel olarak $k = n$ alınırsa $\tilde{\sigma} \in \mathfrak{S}_n$ olduğu görülür. Ayrıca σ bir düzensizlikse $\tilde{\sigma} \in \mathfrak{S}_A$ dir, ki burada $A = \{1, 2, \cdots, s(\sigma)\} \cup \{n - e(\sigma) + 1,\ n - e(\sigma) + 2, \cdots, n\}$ dir.

Örnek 3.1.16. $\sigma = \bar{3}2\bar{6}\bar{5}\underline{4}\,\underline{1} \in \mathfrak{S}_6$ permütasyonu verilsin. Görüleceği üzere σ nın tek satır gösteriminde altta kalan elemanlar altı çizili ve aşan elemanlar ise üstü çizili olarak belirtilmiştir. Çünkü $\sigma(1) = 3 > 1,\ \sigma(3) = 6 > 3$ ve $\sigma(4) = 5 > 4$ olduğu için σ nın aşan elemanları $\sigma_1,\ \sigma_3$ ve σ_4 dür. Benzer şekilde $\sigma(5) = 4 < 5$ ve $\sigma(6) = 1 < 6$ olup σ nın altta kalan elemanları σ_5 ve σ_6 dır. Ayrıca $\sigma(2) = 2$ olup σ nın sabit kalan elemanı σ_2 dir. Yukarıdaki metoda dayanarak, $n = 8$ alındığında $\tilde{\sigma} = 638721$ elde edilir. σ ve $\tilde{\sigma}$ permütasyonlarının descent kümeleri eşit olup $Des(\sigma) = Des(\tilde{\sigma}) = \{1, 3, 4, 5\}$ dir. Dolayısıyla $maj(\sigma) = maj(\tilde{\sigma}) = 1 + 3 + 4 + 5 = 13$ dür.

Lemma 3.1.17. $k \le n$ olmak üzere $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ olsun. Bu durumda $Des(\sigma) = Des(\tilde{\sigma})$ dır [37].

İspat. $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ ve $\sigma = \tilde{\sigma}_1 \cdots \tilde{\sigma}_k$ olduğunu varsayalım. Her bir $i \in [k-1]$ için, $i \in Des(\sigma)$ olması için gerek ve yeter şartın $i \in Des(\tilde{\sigma})$ olduğunu göstermek için, σ_i ve σ_{i+1} in altta kalan (s), aşan (e) ve sabit nokta (f) olma durumlarını göz önünde bulundurarak toplam dokuz olası durumu ele almalıyız. Sayfa 64 te verilen σ permütasyonundan $\tilde{\sigma}$ nın elde edilmesi metodunun (a) ve (c) maddelerine dayanarak; sırasıyla eğer σ_i, σ nın bir altta kalan elemanı ise $\tilde{\sigma}_i \leq \sigma_i$ dir ve eğer σ_i, σ nın bir aşan elemanı ise $\tilde{\sigma}_i \geq \sigma_i$ dir.

Durum 1. (σ_i, σ_{i+1}) ikilisi (s,s) çifti formunda olsun. Bu takdirde $\sigma_i < \sigma_{i+1}$ ise $\tilde{\sigma}_i < \tilde{\sigma}_{i+1}$ dir. Çünkü σ_i ve σ_{i+1} birer aşan eleman ve $\sigma_i < \sigma_{i+1}$ olduğu için sayfa 63 madde (a) dan $\tilde{\sigma}_i < \tilde{\sigma}_{i+1}$ olduğu görülür. Bu durumda $i \notin Des(\sigma)$ iken $i \notin Des(\tilde{\sigma})$ dır. Tersine $\tilde{\sigma}_i < \tilde{\sigma}_{i+1}$ ise sayfa 64 madde (a) dan σ_i ve σ_{i+1} elemanları birer aşan elemanlarının $\sigma_i < \sigma_{i+1}$ eşitsizliğini sağladığı görülür. Böylece $i \notin Des(\tilde{\sigma})$ iken $i \notin Des(\sigma)$ dır.

Durum 2. Şimdi (σ_i, σ_{i+1}) ikilisi (e,e) çifti formunda olsun. Bu takdirde $\sigma_i < \sigma_{i+1}$ ise $\tilde{\sigma}_i < \tilde{\sigma}_{i+1}$ dir. Gerçekten $\sigma_i < \sigma_{i+1}$ olduğu için σ_{i+1} elemanı σ_i elemanından daha büyük bir aşan eleman olduğundan sayfa 64 madde (c) den $\tilde{\sigma}_i < \tilde{\sigma}_{i+1}$ olduğu görülür. Bu durumda $i \notin Des(\sigma)$ iken $i \notin Des(\tilde{\sigma})$ dır. Tersine $\tilde{\sigma}_i < \tilde{\sigma}_{i+1}$ iken $\sigma_i < \sigma_{i+1}$ olduğu yine sayfa 64 madde (c) göz önüne alınarak hemen görülür.

Durum 3. (σ_i, σ_{i+1}) ikilisi (f, f) çifti formunda olsun. Böylece sayfa 64 madde (b) gereğince $i = \sigma_i < \sigma_{i+1} = i+1$ dir ancak ve ancak $\tilde{\sigma}_i = s(\sigma) + j < \tilde{\sigma}_{i+1} = s(\sigma) + j + 1$ dir (σ_i j yinci sabit kalan eleman olup $j = 1, 2, \cdots, k - s(\sigma) - e(\sigma)$ dir).

Durum 4. (σ_i, σ_{i+1}) ikilisi (s,e) çifti formunda olsun. Durum 1 in hemen üzerindeki açıklama göz önüne alındığında;

$$\tilde{\sigma}_i \leq \sigma_i < i < i+1 < \sigma_{i+1} \leq \tilde{\sigma}_{i+1}$$

olduğu görülür ki, bu da $i \notin Des(\sigma)$ ve $i \notin Des(\tilde{\sigma})$ olduğu anlamına gelir.

Durum 5. (σ_i, σ_{i+1}) ikilisi (e,s) çifti formunda olsun. Durum 1 in hemen üzerindeki açıklama dikkate alındığında;

$$\tilde{\sigma}_i \geq \sigma_i > \sigma_{i+1} \geq \tilde{\sigma}_{i+1}$$

olduğu görülür ki, bu da $i \in Des(\sigma)$ ve $i \in Des(\tilde{\sigma})$ olduğu anlamına gelir.

Durum 6. (σ_i, σ_{i+1}) ikilisi (s, f) çifti formunda olsun. Bu durumda $\sigma_i < i < i+1 = \sigma_{i+1}$ olup $i \notin Des(\sigma)$ dir. Sayfa 64 madde (a) ve (b) göz önünde bulundurulduğunda

$$\tilde{\sigma}_i \leq s(\sigma) < s(\sigma)+1 \leq \tilde{\sigma}_{i+1}$$

olduğundan $\tilde{\sigma}_i < \tilde{\sigma}_{i+1}$ olup $i \notin Des(\tilde{\sigma})$ dır.

Durum 7. (σ_i, σ_{i+1}) ikilisi (f,s) çifti formunda olsun. $\sigma_{i+1} < i+1$ ve $\sigma_i = i$ olduğu için $\sigma_{i+1} < \sigma_i$ olup $i \in Des(\sigma)$ dir. Sayfa 64 madde (a) ve (b) göz önünde bulundurulduğunda

$$\tilde{\sigma}_{i+1} \leq s(\sigma) < s(\sigma)+1 \leq \tilde{\sigma}_i$$

olup $\tilde{\sigma}_{i+1} < \tilde{\sigma}_i$ elde edilir. Böylece $i \in Des(\tilde{\sigma})$ dır.

Durum 8. (σ_i, σ_{i+1}) ikilisi (e, f) çifti formunda olsun. $\sigma_{i+1} = i+1$ ve $\sigma_i > i$ olduğu için $\sigma_{i+1} < \sigma_i$ olup $i \in Des(\sigma)$ dir. Sayfa 64 madde (b) ve (c) göz önüne alındığında

$$\tilde{\sigma}_{i+1} \leq k - e(\sigma) \leq n - e(\sigma) < n - e(\sigma) + 1 \leq \tilde{\sigma}_i$$

elde edilir. Böylece $\tilde{\sigma}_{i+1} < \tilde{\sigma}_i$ olup $i \in Des(\tilde{\sigma})$ dır.

Durum 9. (σ_i, σ_{i+1}) ikilisi (f,e) çifti formunda olsun. Bu durumda $\sigma_i = i < i+1 < \sigma_{i+1}$ olup $i \notin Des(\sigma)$ dir. Sayfa 64 madde (b) ve (c) göz önüne alındığında

$$\tilde{\sigma}_i \le k - e(\sigma) \le n - e(\sigma) < n - e(\sigma) + 1 \le \tilde{\sigma}_{i+1}$$

elde edilir. Böylece $\tilde{\sigma}_i < \tilde{\sigma}_{i+1}$ olup $i \notin Des(\tilde{\sigma})$ dır. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 3.1.18. $\alpha \in D_k$, $k \le n$ ve $\gamma = s(\alpha)+1, \gamma = s(\alpha)+2, \cdots, n-e(\alpha)$ olsun. Bu durumda $\varphi : \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid dp(\sigma) = \alpha\} \to Sh(\tilde{\alpha}, \gamma)$, $\varphi(\sigma) = \tilde{\sigma}$ dönüşümü descent kümelerini korur, yani, $Des(\sigma) = Des(\varphi(\sigma))$ dir. Sonuç olarak, her $J \subseteq [n-1]$ için

$$\left|\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid dp(\sigma) = \alpha,\ Des(\sigma) = J\}\right| = \left|\{\sigma \in Sh(\tilde{\alpha}, \gamma) \mid Des(\sigma) = J\}\right|$$

dir [37].

İspat. Lemma 3.1.17 göz önüne alındığında, teoremi ispatlamak için φ nin görüntüsü $Sh(\tilde{\alpha}, \gamma)$ olan tersinir bir fonksiyon olduğunu göstermemiz yeterlidir. Öncelikle, eğer $dp(\sigma) = \alpha$ ise, $\tilde{\sigma}$ permütasyonunun σ nın sabit olmayan noktalarını $\tilde{\alpha}$ ile σ nın sabit noktalarını γ ile değiştirerek elde edildiğini iddia ediyoruz. Gerçekten σ nın sabit noktaları $s(\sigma)+1, s(\sigma)+2, \cdots, n-e(\sigma)$ kelimesi ile yerdeğiştirilir, çünkü $e(\sigma) = e(\alpha)$ ve $s(\sigma) = s(\alpha)$ olduğu için $s(\sigma)+1, s(\sigma)+2, \cdots, n-e(\sigma)$ kelimesi kesinlikle $\gamma = s(\alpha)+1, s(\alpha)+2, \cdots, n-e(\alpha)$ dır. Ayrıca σ nın sabit olmayan noktalarının alt kelimesinin indirgenmesi yani düzensizlik parçası α olduğundan dolayı, sabit olmayan elemanların bu alt kelimesinde α nın altta kalan $i-$ninci en küçük elemanının konumu, σ nın altta kalan $i-$ninci en küçük elemanının konumu ile aynıdır. Aynı durum $i-$ninci en küçük aşan eleman için de geçerlidir. Bu durum, σ nın her bir altta kalan ve her bir aşan elemanının; α nın altta kalan ve aşan elemanları yerine geçen $\tilde{\alpha}$ daki altta kalan ve aşan elemanlar ile değiştirilmesine izin verir. Bu ise σ nın altta kalan ve aşan elemanlarının alt kelimesinin $\tilde{\alpha}$ ile değiştirildiği anlamına gelir. Böylece $\tilde{\sigma} \in Sh(\tilde{\alpha}, \gamma)$ olduğu sonucuna varmış oluruz.

$\tilde{\sigma}$ nın $\tilde{\alpha}$ ve γ nın bir karılması olarak yukarıdaki şekilde inşa edilmesi aynı zamanda φ fonksiyonunun tersinir olduğunu gösterir. Gerçekten $\tau \in Sh(\tilde{\alpha}, \gamma)$ olsun. $\tilde{\alpha}$ alt

kelimesini, indirgemesi α olan ve $\tilde{\alpha}$ ile aynı alt kelime konumlarına sahip bir permütasyon ile ve γ alt kelimesinin her bir harfini de bulundukları pozisyonlar ile değiştirdiğimizde $dp(\sigma)=\alpha$ ve $\varphi(\sigma)=\tau$ olacak şekilde bir tek $\sigma\in\mathfrak{G}_n$ permütasyonu elde edilir. Dolayısıyla φ örtendir. $\left|\{\sigma\in\mathfrak{G}_n \mid dp(\sigma)=\alpha\}\right|=\left|Sh(\tilde{\alpha},\gamma)\right|=\binom{n}{k}$ olduğu için φ birebirdir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Örnek 3.1.19. $\sigma=\overline{3}2\overline{6}\overline{5}\underline{4}\,\underline{1}\in\mathfrak{G}_6$ alınırsa $dp(\sigma)=\overline{2}\overline{5}\overline{4}\underline{3}\,\underline{1}=\alpha\in D_5$ olup $e(\sigma)=e(\alpha)=3$, $s(\sigma)=s(\alpha)=2$ ve $\gamma=3$ dür. Böylece $\tilde{\alpha}=\overline{4}\overline{6}\overline{5}\underline{2}\,\underline{1}$ ve $\tilde{\sigma}=\overline{4}3\overline{6}\overline{5}\underline{2}\,\underline{1}\in Sh(\tilde{\alpha},\gamma)$ olup Teorem 3.1.18 deki $\varphi:\{\sigma\in\mathfrak{G}_6 \mid dp(\sigma)=\alpha\}\to Sh(\tilde{\alpha},\gamma)$ fonksiyonunu göz önüne alırsak $\varphi(\sigma)=\tilde{\sigma}$ olduğu görülür. Aynı zamanda $Des(\sigma)=Des(\tilde{\sigma})=\{1,3,4,5\}$ ve $Des(\alpha)=Des(\tilde{\alpha})=\{2,3,4\}$ olup $maj(\sigma)=maj(\tilde{\sigma})=13$ ve $maj(\alpha)=maj(\tilde{\alpha})=9$ olduğu görülür. Şimdi $\tau=\overline{4}\overline{6}\overline{5}\underline{2}3\,\underline{1}\in Sh(\tilde{\alpha}=\overline{4}\overline{6}\overline{5}\underline{2}\,\underline{1},\gamma=3)$ verilsin. $dp(\sigma)=\overline{2}\overline{5}\overline{4}\underline{3}\,\underline{1}=\alpha\in D_5$ ve $\varphi(\sigma)=\tau$ olacak şekildeki $\sigma\in\mathfrak{G}_6$ permütasyonu Teorem 3.1.18 in ispatına dayanarak $\sigma=\overline{2}\overline{6}\overline{4}\underline{3}5\,\underline{1}$ şeklinde elde edilir.

Sonuç 3.1.20. $\alpha\in D_k$, $k\le n$ olsun. Böylece

$$\sum_{\substack{dp(\sigma)=\alpha\\ \sigma\in\mathfrak{G}_n}} q^{maj(\sigma)}=q^{maj(\alpha)}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q$$

dır [37].

İspat. $maj(\sigma)$ sadece $Des(\sigma)$ kümesine bağlı olduğundan, $\tilde{\alpha}\in D_k$, $maj(\alpha)=maj(\tilde{\alpha})$ ve $maj(\gamma)=0$ olduğundan dolayı, Teorem 3.1.13 ve Teorem 3.1.19 dikkate alındığında

$$\sum_{\substack{dp(\sigma)=\alpha \\ \sigma\in\mathfrak{S}_n}} q^{maj(\sigma)} = \sum_{\tilde{\sigma}\in Sh(\tilde{\alpha},\gamma)} q^{maj(\tilde{\sigma})} = q^{maj(\tilde{\alpha})+maj(\gamma)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{maj(\alpha)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$$

elde edilir. ■

Teorem 3.1.21. Negatif olmayan her n tamsayısı için

$$d_n(q) = [n]_q ! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{[k]_q !} q^{\binom{k}{2}}$$

dir [37].

İspat. Düzensizlik parçasına göre $\mathfrak{S}_n$ deki permütasyonları major indeksi ile $q-$formda sayarak ve Teorem 2.1.7 ile Sonuç 3.1.20 yi göz önünde bulundurarak

$$\begin{aligned} [n]_q ! &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} q^{maj(\sigma)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\alpha\in D_k} \sum_{dp(\sigma)=\alpha} q^{maj(\sigma)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\alpha\in D_k} q^{maj(\alpha)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \\ &= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q d_k(q) \end{aligned}$$

elde edilir. $[n]_q ! = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q d_k(q)$ eşitliğine Teorem 1.1.19 daki Gauss inversiyon metodu uygulandığında,

$$\begin{aligned} d_n(q) &= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{n-k} q^{\binom{n-k}{2}} [k]_q ! \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{[n]_q !}{[n-k]_q !} (-1)^{n-k} q^{\binom{n-k}{2}} \\ &= [n]_q ! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{[k]_q !} q^{\binom{k}{2}} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

KAYNAKÇA

1. Adin, R. M., Roichman, Y., 2001. The flag major index and group actions on polynomial rings. **European Journal of Combinatorics, 22**: 431-446.
2. Aigner, M., 1979. Combinatorial Theory. Springer-Verlag, New York.
3. Altındiş, H., 1999. Sayılar Teorisi ve Uygulamaları. Nobel Yayınları, Ankara, 250.
4. Andrews, G. E., 1976. The Theory of Partitions Addison-Wesley Publishing Co.
5. Assaf, S. H., 2010. Cyclic derangements. **Electronic Journal of Combinatorics, 17**: R163.
6. Barnes, C. S., 2009. Enumeration of the distinct shuffles of permutations. **in: Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science Proceedings, vol. AK,** *21st International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*, FPSAC 2009, 155-166.
7. Biagioli, R., Caselli, F., 2004. Invartiant algebras and major indices for classical Weyl groups. **Proceedings London Mathematical Society, 88(3)**: 603-631
8. Björner, A., Wachs, M. L., 1989. q – Hook length formulas for forests. **Journal of Combinatorial Theory Series A, 52**: 165-187.
9. Björner, A., Brenti, F., 2005. Combinatorics of Coxeter Groups. Springer, New York, 349 pp.
10. Bona, M., 2022. Combinatorics of Permutations (3rd ed.), Chapman and Hall/CRC.
11. Carlitz, L., 1975. A combinatorial property of q – Eulerian numbers. **Proceedings of the American Mathematical Society, 82**: 51-54.
12. Chow, C.-O., 2006. On derangement polynomials of type B. **Seminaire Lotharingien de Combinatoire, 55**: Article B55b.
13. Chow, C.-O., 2009. On derangement polynomials of type B. II. **Journal of Combinatorial Theory Series A**, **116(4)**: 816-830.
14. Cramer, G., 1750. Introduction a I'Analyse des Lignes Courbes Algebriques. Geneva: 657-659.
15. Desarmeien, J., 1984. Une autre interpretation du nombre de derangements. **Actes 8^{e} Seminaire Lotharingien de Combinatoire**, I.R.M.A. Strasbourg,11-16.

16. Desarmeien, J., Wachs, M. L., 1988. Descentes des detangements et mots circulaires. **Actes 19 Seminaire Lotharingien de Combinatoire**, I.R.M.A. Strasbourg, , 13-21.
17. Eğecioğlu, Ö., Garsia, A. M., 2021. Lessons in Enumerative Combinatorics. Graduate Texts in Math., Vol. 290, Springer, 300 pp.
18. Foata, D., 1968. On the Netto inversion number of a sequence. **Proceedings of the American Mathematical Society, 19(1)**, 236-240.
19. Garsia, A. M., Gessel, I. M., 1979. Permutation statistics and partitions. **Advances in Mathematics, 31**: 288-305.
20. Garsia, A. M., Remmel, J., 1980. A combinatorial interpretation of $q-$ derangement and $q-$Laguerre numbers. **European Journal Combinatorics, 1:** 47-59.
21. Gessel, I. M., Reutenauer C., 1993. Counting permutations with given cycle structure and descent set. **Journal of Combinatorial Theory Series A**, **64(2)**: 189-215.
22. Gessel, I. M., Zhuang, Y., 2018. Shuffle-compatible permutation statistics. **Advances in Mathematics, 332**: 85-141.
23. Haukkanen, P., 1995. Some binomial inversions in terms of ordinary generating functions. **Publicationes Mathematicae Debrecen, 47/1-2**: 181-191.
24. Ji K. Q., Zhang D. T. X., 2025. Signed Mahonian polynomials on derangements in classical Weyl groups. **European Journal of Combinatoric, 124**: 104083.
25. Knuth, D. E., 1973. The Art of Computer Programming: Volume 3, Addison-Wesley, Reading, MA.
26. MacMahon P. A. 1915. Combinatory Analysis: Volume 1, Cambridge Univ. Press, London.
27. Mendes, A., Remmel, J., 2015. Counting with symmetric functions. Volume 43, Developments in Mathematics, Springer, Cham., 269 pp.
28. Nesin, A., 2022. Sayma-Kombinasyon Hesapları. Nesin Matematik Köyü 8. basım, 320 s.
29. Prodinger, H., 1994. Some information about the binomial transform. **The Fibonacci Quarterly, 32**: 412-415.

30. Rodriguez, O., 1839. Note sur les inversions, ou derangements produits dans les permutations. **Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, 4**: 236-240.
31. Roman, S., 2015. An Introduction to Catalan Numbers; with a foreword by Richard Stanley, Compact Texbook in Mathematics; Birkhauser-Springer: Cham, Switzerland, 269 pp.
32. Rossen, K. H., 2018. Discrete Mathematics and Its Applications (8th ed.), McGraw-Hill Education, 2240 pp.
33. Sagan, B. E., 2020. Combinatorics: The Art of Counting, Volume 210 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 269 pp.
34. Stanley, R. P., 1972. Ordered Structures and Partitions. **Memoirs of the American Mathematical Society**, **199**, American Mathematical Society, Providence.
35. Stanley, R. P., 2011. Enumerative Combinatorics: Volume 1, 2nd ed., Cambridge University Press, 785 pp.
36. Stanley, R. P., 2015. Catalan Numbers. Cambridge University Press, USA, 250 pp.
37. Wachs, M. L., 1989. On q – derangement numbers. **Proceedings of the American Mathematical Society**, **106 (1)**: 273-278.
38. Wilf, H. S., 1994. Generatingfunctionology (2nd edition), Academic Press, Boston.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Hasan Tahsin GÜRBÜZ
Uyruğu: Türkiye (T.C)
Doğum Tarihi ve Yeri: -
Medeni Durum: -
e-mail: -
Yazışma Adresi: -

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Erciyes Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, KAYSERİ	2008

YABANCI DİL

İngilizce