T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİNCİ BASAMAKTAN YARI LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI ÜZERİNE

Tezi Hazırlayan
Esra AKTAŞ

Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. M. Tamer ŞENEL

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Eylül 2009
KAYSERİ

Yrd. Doç. Dr. M. Tamer ŞENEL danışmanlığında **Esra AKTAŞ** tarafından hazırlanan **"İkinci Mertebeden Yarı-lineer Diferensiyel Denklemlerin Çözümlerinin Davranışı Üzerine"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

03.09.2009

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. Fuat GÜRCAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. M. Tamer ŞENEL

Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 17/09/2009 tarih ve 2009/32-08 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

17/09/2009

Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde, değerli bilgileri ve deneyimlerinden yararlandığım, bana her zaman her türlü konuda yol gösteren ve yardımcı olan, çok değerli hocam ve danışmanım Erciyes Üniversitesi öğretim elemanı sayın Yrd. Doç. Dr. M. Tamer ŞENEL`e katkılarından dolayı sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen canım aileme, teşekkürü bir borç bilirim.

İKİNCİ BASAMAKTAN YARI LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI ÜZERİNE

Esra AKTAŞ
Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Eylül 2009
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. M. Tamer ŞENEL

ÖZET

İkinci mertebeden yarı lineer diferensiyel denklemlerin çözümü oldukça zordur. Bu nedenle yarı lineer diferensiyel denklemlerin çözümlerinin davranışını incelemek son yıllarda önem kazanmıştır.

Bu tezde ikinci mertebeden yarı lineer diferensiyel denklem kavramı ve yarı lineer denklemlerin salınım ve salınımsızlığı ile ilgili temel teoremler ve tanımlar verildi.

Özellikle

$\left(r(t)\phi(x')\right)' + c(t)\phi(x) = 0$, $\qquad \phi(x) = |x|^{p-1}\operatorname{sgn} x$, $p > 1$

ve

$\left(\phi_p(x')\right)' + a(t)\phi_p(x') + b(t)\phi_p(x) = 0$, $\qquad \phi_p(x) = |x|^{p-2}x$, $p > 1$

şeklindeki denklemlerin çözümlerinin davranışı ile ilgili sonuçlar üzerinde duruldu. Verilen teoremler Riccati Tekniği ile ispatlandı.

Anahtar Kelimeler: Yarı-lineer diferensiyel denklem, Salınımlılık, Salınımsızlık, Riccati Tekniği.

A NONOSCILLATION TEOREM FOR HALF-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PERIODIC COEFFICIENTS

Esra AKTAŞ

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M.Sc. Thesis, September 2009

Thesis Supervisor: Assist. Prof. Dr. M. Tamer ŞENEL

ABSTRACT

The solutions of the second order half-linear differential equations is so hard to solve. Therefore in last years examine the behaviour of solutions of half-linear differential equations had acquired importance.

In this Thesis, fundamental definitions and theorems are given concerning concept of the second order half linear equations and oscillation and nonoscillation of the half linear equations.

Especially the behaviour of the solutions of differential equations in the form

$(r(t)\phi(x'))' + c(t)\phi(x) = 0 \quad , \quad \phi(x) = |x|^{p-1} \operatorname{sgn} x \, , \quad p > 1$

and

$\left(\phi_p(x')\right)' + a(t)\phi_p(x') + b(t)\phi_p(x) = 0 \quad , \quad \phi_p(x) = |x|^{p-2} x \, , \quad p > 1$

related results was emphasized. Theorems which are given proved with Riccati Tecnique.

Keywords: Half-Linear Differential Equation, Oscillation, Nonoscillation,Riccati Tecnique.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY i

TEŞEKKÜR ii

ÖZET iii

ABSTRACT iv

İÇİNDEKİLER v

1. BÖLÜM

GİRİŞ 1

2. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER 4

3. BÖLÜM

BİRİNCİ MERTEBEDEN YARI LİNEER SİSTEM VE YARI LİNEER DENKLEMLERİN DİĞER FORMLARI 16

4. BÖLÜM

YARI LİNEER RİCCATİ DÖNÜŞÜMÜ ve STURM TEORI 18

5.BÖLÜM

PERİYODİK KATSAYILI YARI LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEM 37

KAYNAKLAR 53

ÖZGEÇMİŞ 55

1. BÖLÜM

GİRİŞ

İkinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin çözümlerinin davranışı uygulamalı bilim dallarında geniş yer tutmaktadır. Diferensiyel denklemleri çözmeden çözümü hakkında konuşmak özellikle çözülemeyen diferensiyel denklemler için önemlidir. Lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümünü analitik olarak bulmak genelde mümkün olamamaktadır. Dolayısıyla çözümünün salınımlı ya da salınımsızlığının incelenmesi daha da zordur.

Diferensiyel denklem kuramı, vektör fonksiyonlarının üstün yanları nedeniyle en iyi biçimde birinci basamaktan eşdeğer bir sistem incelenir ve irdelenir. Her basamaktan lineer denklem ve en yüksek basamaktan türevi diğerleri cinsinden ayıklanabilen her lineer olmayan diferensiyel denklem,

$$x'(t) = F\left(t, x(t)\right) \tag{1.1}$$

biçiminde yazılabilir.

y herhangi skaler fonksiyon olmak üzere, $n \geq 1$ için n-inci basamaktan

$$y^{(n)} = G\left(t, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$$

diferensiyel denklemi,

$$x_1 = y, x_2 = y', x_3 = y'', ..., x_n = y^{(n-1)}$$

değişken değişimi yapılırsa;

$$x_1' = x_2, x_2' = x_3, x_3' = x_4, ..., x_{n-1}' = x_n$$
$$x_n' = y^{(n)} = G(t, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)$$

sistemi elde edilir.

Bu sistem

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n), x' = \left(x_1', x_2', ..., x_n'\right)$$

ve

$$F(t,x) = \left(f_1(t,x), f_2(t,x), ..., f_n(t,x)\right)$$

olmak üzere, $x'(t) = F(t,x)$ biçiminde yazılabilir. Ayrıca verilen

$$y(t_0) = \alpha_0, y'(t_0) = \alpha_1, y''(t_0) = \alpha_2, ..., y^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1}$$

başlangıç koşulları kısaca

$$x(t_0) = \left(x_1(t_0), x_2(t_0), ..., x_n(t_0)\right) = \left(y(t_0), y'(t_0), ..., y^{n-1}(t_0)\right) = x_0$$

yazılabileceğinden, birinci basamaktan

$$x'(t) = F\left(t, x(t)\right);\ x(t_0) = x_0 \qquad (1.2)$$

başlangıç değer problemine varılır.

Buna göre oldukça geniş bir denklem sınıfı içeren ve genelde $x = x(t)$ bilinmeyen n-boyutlu bir vektör fonksiyonu $F(t,x)$ `de $R^{n+1}$ `in bir alt cümlesinden R^n içine bir dönüşüm olmak üzere, sadece birinci basamaktan $x' = F(t,x)$ denklemini göz önüne

almak yetecektir. $n=1$ olduğunda $x'=F(t,x)$ denklemi birinci basamaktan skaler diferensiyel denklem, $n>1$ olduğunda sistem veya yüksek basamaktan denklemleri içeren vektör diferensiyel denklemidir. Bu nedenle diferensiyel denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliğine ilişkin Varlık ve Teklik Teoremi $x'=F(t,x)$ denklemi üzerine kuruludur.

2. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu kesimde, yeri geldikçe kullanılacak bazı önemli tanım, Teorem ve sonuçlar üzerinde durulacaktır.

Tanım 2.1: $\Omega \subset R^{n+1}$ açık irtibatlı bir küme olmak üzere, $(t, x(t)) \in \Omega$, $x(t_0) = x_0$, x türevlenebilir ve t_0`ı kapsayan bir $I$ aralığında her $t \in I$ için $x'(t) = F(t, x(t))$ denklemini özdeş olarak sağlayan fonksiyonuna, $I$ üzerinde (1.2)`nin bir çözümüdür denir.

(1.2) başlangıç-değer probleminin çözümüne ilişkin olarak iki temel yapıya dayalı Varlık ve Teklik Teoremleri vardır. Bunlardan biri, bir bölgede $\frac{\partial F}{\partial x_i}(i = 1, 2, ..., n)$ fonksiyonlarının sürekliliğine, diğeri de aynı bölgede $F(t, x)$ fonksiyonunun bir Lipschitz Koşulunu sağlaması durumuna dayanır.

Tanım 2.2: $F : R^{n+1} \to R^n$ vektör değerli fonksiyonuna R^{n+1}`in $n+1$ boyutlu,

$$D = \{(t, x) = (t, x_1, x_2, ..., x_n) : |t - t_0| \le r_0, |x_1 - a_1| \le r_1, ..., |x_n - a_n| \le r_n\}$$

bölgesinde her (t, x), $(t, y) \in D$ için

$$\|F(t, x) - F(t, y)\| \le L\|x - y\|$$

olacak şekilde pozitif bir L sayısı mevcut ise; D bölgesinde bir Lipschitz şartını sağlıyor denir.

Buradaki norm Öklid normu olabileceği gibi amaca yönelik olmak üzere başka normlar da olabilir.

Teorem 2.3: F fonksiyonu, R^{n+1}`de kapsanan $D$ bölgesinde sürekli ve Lipschitz şartını sağlasın. Bu durumda $D$`de her (t_0, x_0) noktasına karşılık $x' = F(t,x)$ denkleminin $x(t_0) = x_0$ koşulunu sağlayan bir tek $x = x(t)$ çözümü vardır.

Teorem 2.4: F ve $i = 1,2,...,n$ için $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ fonksiyonları, R^{n+1}`de kapsanan $D$ bölgesinde sürekli olsun. Bu durumda $D$`de her (t_0, x_0) noktasına karşılık $x' = F(t,x)$ denkleminin $x(t_0) = x_0$ koşulunu sağlayan bir tek $x = x(t)$ çözümü vardır.

Bir $I \subset R$ için $a_0(t) \in C^2(I)$, $a_1(t) \in C^1(I)$, $a_2(t) \in C(I)$ ve I`da $a_0(t) \neq 0$ olmak üzere;

$$a_0(t)y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = 0 \tag{2.1}$$

ikinci basamaktan lineer diferansiyel denklemine ilişkin çözümlerin özelliklerinin incelenmesinde yerine göre kullanışlı olan iki temel(standart) form mevcuttur.

Bir $[a,b]$ aralığı üzerinde $a_0(t) \neq 0$ ise, (2.1) denklemi,

$$y(t) = u(t)e^{\left\{-1/2\int_a^t \frac{a_1(s)}{a_0(s)}ds\right\}} \tag{2.2}$$

dönüşümü yardımıyla

$$u'' + c(t)u = 0 \tag{2.3}$$

şeklinde bulunan kanonik(normal) biçimine dönüştürülebilir, burada

$$c(t) = 1/a_0^{\,2}\left[a_2a_0 - (1/4)a_1^{\,2} - (1/2)\left(a_1'a_0 - a_1a_0'\right)\right]$$

dır.

Belirtelim ki; üstel ifade sıfırdan farklı olduğundan (2.2) dönüşümü, (2.1) denkleminin çözümündeki köklerin sayısı ya da konumunu etkilemez.

Eğer $[a,b]$ aralığı üzerinde $a_0(t) \neq 0$ ise, (2.1) denklemi,

$$h(t) = 1/a_0(t) \int_a^t \frac{a_1(s)}{a_0(s)} ds$$

çarpanıyla çarpılarak,

$$\left(p(t)u'\right)' + q(t)u = 0 \tag{2.4}$$

öz eşlenik forma dönüştürülebilir. Burada $p(t) = a_0 h(t)$, $q(t) = a_2 h(t)$ dir.

Belirtelim ki; (2.4) denklemi, (2.1) denklemine göre daha geneldir, çünkü (2.1) denklemi (2.4) biçimine her zaman dönüştürülebildiği halde, tersinin olabilmesi için $p(t) \in C^1([a,b])$ olmalıdır. Şimdi, amacımıza yönelik olarak (2.3) ve (2.4) denklemlerine ilişkin iki önemli sonucu verelim.

Teorem 2.5: $r(t) > 0$ ve $r_1(t) > 0$ olmak üzere $r(t),\ r_1(t) \in C^1(a,b]$ ve $q(t), q_1(t) \in C[a,b]$ olsun. Eğer

$$\begin{cases} \left[r_1(t)w'(t)\right]' + q_1(t)w(t) = 0 \\ w(a) = w(b) = 0 \end{cases}$$

Sınır-değer probleminin, (a,b) üzerinde

$$\int_a^b \left[(r - r_1)w'^2 - (q - q_1)w^2\right] dt \leq 0$$

eşitsizliğini sağlayan $u(t)$`den bağımsız bir $w(t) \neq 0$ çözümü var ise;

$$\left[r(t) \cdot u'(t)\right]' + q(t) \cdot u(t) = 0 \tag{2.5}$$

denkleminin her $u(t)$ çözümünün (a,b) aralığında bir sıfırı vardır.

Teorem 2.6: $q \in C((a,b);[0,\infty))$, (a,b)`nin herhangi bir alt aralığında özdeş olarak sıfır olmamak üzere u,

$$u''(t)+q(t)u(t)=0$$

denkleminin $t=a$, $t=b$`de ardışık sıfırları olan bir çözümü olsun.
Bu durumda,

$$(b-a)\int_a^b q(t)\,dt > 4$$

dir.

Tanım 2.7 (Gronwall Eşitsizliği): C negatif olmayan bir sabit, u ve v`de $t \in [t_0, t_0+a]$ için

$$u(t) \le C + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)\,ds$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $t_0 \le t \le t_0+a$ aralığı üzerinde negatif olmayan sürekli fonksiyonlar olsun. Bu durumda $t \in [t_0, t_0+a]$ için,

$$u(t) \le Ce^{\left\{\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right\}}$$

dir.

Tanım 2.8 (Hölder Eşitsizliği):

$$L_p = \left\{ f : \int_a^b |f|^p < \infty,\ p \in R^+ \right\},\ \|f\| = \|f\|_p = \left\{ \int_a^b |f|^p \right\}^{\frac{1}{p}},$$

$f(x)\in L_p$, $g(x)\in L_q$, $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere;

$$\left|\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

dır.

Tanım 2.9 (Yarı-lineer denklem): En yüksek mertebeden türeve göre lineer olan denklemlere yarı-lineer denklem adı verilir.

Örnek 2.1 $(r(t)\phi(x'))'+c(t)\phi(x)=0$ $\qquad \phi(x):=|x|^{p-1}\operatorname{sgn} x \qquad p>1$

$(r(t)|x'|^{p-1}\operatorname{sgn} x')'+c(t)|x|^{p-1}\operatorname{sgn} x=0$

Örnek 2.2 $(\phi_p(x'))'+a(t)\phi_p(x')+b(t)\phi_p(x)=0$ $\quad \phi_p(x)=|x|^{p-2}x \qquad p>1$

$(|x'|^{p-2}x')'+a(t)|x'|^{p-2}x'+b(t)|x|^{p-2}x=0$

Tanım 2.10 (Yarı-lineer denklemlerin Sınıflandırılması):

Yarı lineer denklemler özel olarak aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir.

$(r(t)\phi_p(x'))'+c(t)\phi_q(x)=0$, $\qquad \phi_p(s)=|s|^{p-2}\mathrm{s}$, $\qquad \phi_q(s)=|s|^{q-2}\mathrm{s}$

Denklemini göz önüne alalım. Burada $p,q>1$ dir.

(i) p ve q herhangi sayılar $(p,q>1)$ ise denkleme quasilineer denklem

(ii) $p=q$ veya $q=\frac{p}{p-1}$ $(p,q>1)$ ise denkleme yarı lineer denklem

(iii) $(p,q>1)$ $p=2$ ve $q>1$ ise denkleme semilineer denklem

adı verilir.

Örnek 2.3 $\left(e^t\phi_2(x')\right)' + c(t)\phi_3(x) = 0$, $\phi_2(s) = |s|^{p-2}s$, $\phi_3(s) = |s|^{q-2}$s, $p = 2$, $q = 3$ olup denklem quasilineerdir.

Örnek 2.4 $\left(e^t\phi_3(x')\right)' + c(t)\phi_2(x) = 0$ quasilineer denkleminde $\phi_3(s) = |s|^{p-2}$s, $\phi_2(s) = |s|^{q-2}$s , $p = 3$, $q = 2$ olup denklem açılınca

$$\left(e^t |x'|^{3-2} x'\right)' + c(t)|x|^{2-2} x = 0$$

$$\left(e^t |x'| x'\right)' + c(t)x = 0$$

$$e^t |x''| x' + e^t |x'| x'' + e^t |x'| x' + c(t)x = 0$$

şekline gelir.

Örnek 2.5 $\left(e^t\phi_2(x')\right)' + c(t)\phi_2(x) = 0$ $p = 2$ ve $q = 2$ ise

$$\left(e^t |x'|^{2-2} x'\right)' + c(t)|x|^{2-2} x = 0$$

$$e^t x'' + e^t x' + c(t)x = 0$$

lineer denklem elde edilir.

Örnek 2.6 $\left(e^t\phi_3(x')\right)' + c(t)\phi_{3/2}(x) = 0$ $p = 3$, $q = \dfrac{p}{p-1} = \dfrac{3}{2}$

yarı lineer denklemdir.

Örnek 2.7 $\left(e^t\phi_2(x')\right)' + c(t)\phi_{3/2}(x) = 0$, $p = 2$, $q = \dfrac{3}{2} > 1$

semi lineer denklemdir.

2.1 Çözümlerin Global Varlığı ve Tekliği

$$\left(|y'|^{\alpha-1} \cdot y'\right)' + q(t)|y|^{\beta-1} \cdot y = 0 \qquad (2.6)$$

biçimindeki denklemlerin, $\alpha = \beta$ özel durumunda çözümlerinin salınımlılığına ilişkin kriterler üzerinde durulacağından bu kesimde, (2.6)`nın çözümlerine ilişkin global varlık sonuçlarına yer verilecektir.

Tanım 2.1.1: (2.6) diferansiyel denkleminin belirgin olmayan bir çözümü, $[t_0, \infty)$ aralığında keyfi sayıda yeterince büyük sıfırlara sahipse bu aralıkta salınımlıdır. Tersine olarak söz konusu çözüm $[t_0, \infty)$ aralığında sonlu sayıda sıfırlara sahipse bu aralıkta salınımsızdır. Buna göre salınımlı bir çözüm için $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ olacak şekilde çözümün sıfırlarının bir $\{t_n\}$ dizisi mevcuttur. Çözüm salınımsız ise her $t \geq t_1 \geq t_0$ için çözüm, ya pozitif ya da negatif olacak şekilde bir t_1 sayısı mevcuttur.
$\alpha = \beta$ alınırsa; bu denklem yarı-lineer diferansiyel denklem adını alır.

α ve β pozitif sabitler ve $q : [a, \infty) \to R$ bir sürekli fonksiyon olmak üzere;
(2.6) denklemi,

$$(|y'|^{\alpha} \operatorname{sgn} y')' + q(t)|y|^{\beta} \operatorname{sgn} y = 0$$

şeklinde de yazılabilir.

Bu denkleme ilişkin başlangıç koşulları

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1 \qquad (2.7)$$

olsun. $y' \in C^1(I)$ ve her $t \in I$ için (2.6) denklemi sağlanacak şekilde bir $y \in C^1(I)$ fonksiyonu varsa; bu fonksiyona (2.6) denkleminin $I \subset [a, \infty)$ aralığı üzerindeki bir çözümü denir. Eğer bu çözüm, bütün $[a, \infty)$ aralığı üzerinde mevcut ise; buna global çözüm adı verilir.

(2.6) denkleminde, $\alpha = 1$ alınırsa; Emden-Fowler Denklemi olarak bilinen

$$y'' + q(t)|y|^{\beta-1} \cdot y = 0 \tag{2.8}$$

denklemi elde edilir.

(2.8) denklemi için Butler ve Naito`nun elde ettikleri sonuçlar, $\alpha \neq 1$ olmak üzere (2.6) denklemine M. Kitano ve T. Kusano $[7]$ tarafından genelleştirilmiştir.
Kolaylık olması için,

$$\xi^{\alpha^*} = |\xi|^{\alpha-1}\xi = |\xi|^{\alpha} \operatorname{sgn}\xi,\ \xi \in R,\ \alpha > 0 \tag{2.9}$$

notasyonu kullanılırsa; (2.6) denklemi,

$$\left((y')^{\alpha^*}\right)' + q(t)\, y^{\beta^*} = 0$$

biçiminde yazılabilir. Bu da (2.7) ile birlikte

$$y' = z^{\frac{1}{\alpha^*}},\ z' = -q(t)\, y^{\beta^*} \tag{2.10}$$

$$y(t_0) = y_0,\ z(t_0) = y_1^{\alpha^*} \tag{2.11}$$

başlangıç değer problemine denk olup, Teorem 2.3`den lokal çözüme sahiptir.
Ayrıca,

$$\left(f(t,y,z), g(t,y,z)\right) = \left(z^{\frac{1}{\alpha^*}}, -q(t)\, y^{\beta^*}\right)$$

vektör fonksiyonu,

$D = [a,\infty) \times R \times R$ eğer $\alpha \leq 1$ ve $\beta \geq 1$,
$D = [a,\infty) \times \left(R - \{0\}\right) \times R$ eğer $\alpha \leq 1$ ve $\beta < 1$,
$D = [a,\infty) \times R \times \left(R - \{0\}\right)$ eğer $\alpha > 1$ ve $\beta \geq 1$,

$D=[a,\infty)\times(R-\{0\})\times(R-\{0\})$ eğer $\alpha>1$ ve $\beta<1$,

olmak üzere üzerinde lokal Lipschitz Koşulunu sağladığı için Teorem 2.3`den,

$y_0\in R$ ve $y_1\in R$, $\alpha\le 1$ ve $\beta\ge 1$ için,

$y_0\in R-\{0\}$ ve $y_1\in R$, $\alpha\le 1$ ve $\beta<1$ için,

$y_0\in R$ ve $y_1\in R-\{0\}$, $\alpha>1$ ve $\beta\ge 1$ için,

$y_0\in R-\{0\}$ ve $y_1\in R-\{0\}$, $\alpha>1$ ve $\beta<1$ için,

(2.6)-(2.7)`nin lokal çözümünün tekliği,

$(\mathrm{i})\,\beta<1$ ve $y_0=0$ ve $(\mathrm{ii})\,\alpha>1,\beta\ge 1$ ve $y_1=0$

durumları dışındada elde edilebilir. Bu durumlara ilişkin M. Kitano ve T. Kusano tarafından kanıtlanan sonuçlar aşağıdadır.

Teorem 2.1.2: $\beta<1$ olmak üzere;

$$\left(|y'|^{\alpha-1}\cdot y'\right)'+q(t)|y|^{\beta-1}\cdot y=0 \tag{2.6}$$

$$y(t_0)=0,\ y'(t_0)=y_1\neq 0 \tag{2.12}$$

başlangıç-değer probleminin çözümü, t_0 `in yeterince küçük bir komşuluğunda tektir.

Teorem 2.1.3: $\alpha>1$ ve $\beta\ge 1$ ve $q(t_0)\neq 0$ olmak üzere

$$\left(|y'|^{\alpha-1}\cdot y'\right)'+q(t)|y|^{\beta-1}\cdot y=0 \tag{2.6}$$

$$y(t_0)=y_0\neq 0,\ y'(t_0)=0 \tag{2.13}$$

başlangıç-değer problemi, t_0`in yeterince küçük bir komşuluğunda tek bir çözüme sahiptir.

Teorem 2.1.4: $\beta<1$ olsun. $q(t)$ pozitif ve $q\in C^1\in[a,\infty)$ olmak üzere;

$$\left(|y'|^{\alpha-1}\cdot y'\right)'+q(t)|y|^{\beta-1}\cdot y=0 \tag{2.6}$$

$$y(t_0)=0,\ y'(t_0)=0 \tag{2.14}$$

başlangıç-değer probleminin bir tek $y(t)\equiv 0$ aşikâr çözümü vardır.

Bir $I\subset[a,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı (2.6)`nın bir $y(t)$ çözümü için, $V[y]$ ve $W[y]$ fonksiyonları,

$$V[y](t)=\frac{\alpha}{\alpha+1}|y'(t)|^{\alpha+1}+\frac{q(t)}{\beta+1}|y(t)|^{\beta+1},\ t\in I \tag{2.15}$$

$$W[y](t)=\frac{\alpha}{\alpha+1}\frac{|y'(t)|^{\alpha+1}}{q(t)}+\frac{1}{\beta+1}|y(t)|^{\beta+1},t\in I \tag{2.16}$$

biçiminde tanımlansın. Türev alınırsa;

$$\frac{d}{dt}V[y](t)=\frac{q'(t)}{\beta+1}|y(t)|^{\beta+1},\ t\in I,$$

ve

$$\frac{d}{dt}W[y](t)=-\frac{\alpha}{\alpha+1}\frac{q'(t)}{(q(t))^2}|y'(t)|^{\alpha+1},\ t\in I,$$

olup,

$$-\frac{q_-'(t)}{q(t)}V[y](t) \le \frac{d}{dt}V[y](t) \le \frac{q_+'(t)}{q(t)}V[y](t),\ t \in I \tag{2.17}$$

$$-\frac{q_+'(t)}{q(t)}W[y](t) \le \frac{d}{dt}W[y](t) \le \frac{q_-'(t)}{q(t)}W[y](t), t \in I \tag{2.18}$$

elde edilir. Burada; $q_+'(t) = \text{maks}\{q'(t), 0\}$ ve $q_-'(t) = \text{maks}\{-q'(t), 0\}$`dır. (2.17) ve (2.18) birinci basamaktan diferensiyel eşitsizlikleri integrallenebilirse; $V[y](t)$ ve $W[y](t)$ için aşağıdaki temel eşitsizlikler elde edilir.

Lemma 2.1.5: $q \in C^1[a,\infty)$ ve $[a,b)$ üzerinde $q(t) > 0$ olsun. I üzerinde, $y(t)$, (2.6)`nın bir çözümü olmak üzere aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir:

(i) $V[y](t) \le V[y](t_0)e^{\left(\int_{t_0}^{t} \frac{q_+'(s)}{q(s)}ds\right)},\ t \ge t_0,\ t \in I$

(ii) $V[y](t) \ge V[y](t_0)e^{\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{q_-'(s)}{q(s)}ds\right)},\ t \ge t_0,\ t \in I$

(iii) $V[y](t) \le V[y](t_0)e^{\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{q_-'(s)}{q(s)}ds\right)},\ t \le t_0,\ t \in I$

(iv) $V[y](t) \ge V[y](t_0)e^{\left(\int_{t_0}^{t} \frac{q_+'(s)}{q(s)}ds\right)},\ t \le t_0,\ t \in I$

Lemma 2.1.6: $q \in C^1[a,\infty)$ ve $[a,b)$ üzerinde $q(t) > 0$ olsun. I üzerinde, $y(t)$, (2.6)`nın bir çözümü olmak üzere aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir:

(i) $W[y](t) \le W[y](t_0)e^{\left(\int_{t_0}^{t} \frac{q_-'(s)}{q(s)}ds\right)},\ t \ge t_0,\ t \in I$

(ii) $W[y](t) \ge W[y](t_0)e^{\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{q_+'(s)}{q(s)}ds\right)},\ t \ge t_0,\ t \in I$

(iii) $W[y](t) \le W[y](t_0) e^{\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{q_+'(s)}{q(s)} ds \right)}$, $t \le t_0$, $t \in I$

(iv) $W[y](t) \ge W[y](t_0) e^{\left(\int_{t_0}^{t} \frac{q_-'(s)}{q(s)} ds \right)}$, $t \le t_0$, $t \in I$

Lemma 2.1.5 ve 2.1.6`dan (2.6)-(2.14) probleminin tek çözümünün $y(t) \equiv 0$ aşikâr çözümü olduğu görülür. Böylece, Teorem 2.1.4 doğrudan sağlanır.

Yukarıdaki Lemmaların diğer önemli iki sonucu, (2.6)`in çözümlerinin global varlığıdır. Gerçekten, $q(t)$, C^1 sınıfından ve $[a,\infty)$ üzerinde pozitif olduğundan, verilen y_0 ve y_1 başlangıç verileri için (2.6)-(2.7) başlangıç değer probleminin bir lokal çözümü, bütün $[a,\infty)$ aralığına sürdürülebilir. Bu sonuçlar birleştirilirse; aşağıdaki önemli sonuç elde edilir.

Teorem 2.1.7: $q \in C^1[a,\infty)$ ve $[a,\infty)$ üzerinde $q(t) > 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda herhangi bir y_0 ve y_1 için (2.6)-(2.7) başlangıç değer problemi $[a,\infty)$ üzerinde bir ve yanlız bir tek çözüme sahiptir.

Uyarı 2.1.8: Belirtelim ki; Teorem 2.1.7, daha zayıf koşullar altında örneğin $q \in C[a,\infty), q(t) > 0$ ve $[a,\infty)$`da lokal sınırlı değişimli bir fonksiyon olmak üzere; M. Kitano ve T. Kusano [7] tarafından kanıtlanmıştır.

3. BÖLÜM

BİRİNCİ MERTEBEDEN YARI LİNEER SİSTEM VE YARI LİNEER DENKLEMLERİN DİĞER FORMLARI

$$(r(t)\phi(x'))' + c(t)\phi(x) = 0 \qquad \phi(x) = |x|^{p-1}\operatorname{sgn} x \qquad p > 1 \tag{3.1}$$

denklemini ve

$$(r(t)x')' + c(t)x = 0 \tag{3.2}$$

Sturm – Liouville lineer diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklem (3.1) denkleminin p=2 özel durumunda elde edilir. r(t)>0 ve r,c sürekli fonksiyon olduğu tam aralık üzerine genişletildiği, verilen $t_0, x_0, x_1 \in R$, $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_1$ başlangıç şartlarını sağlayan (3.2) denkleminin tek çözümü vardır. (3.2) denkleminin şartlarıyla beraber bu denklem birinci mertebeden

$$x' = \frac{1}{r(t)}u \ , \ u' = -c(t)x$$

lineer sistemi gibi yazılabilir ve bu sistemin lineerliği (burada Lipschitz özelliğinden) (3.2) denkleminin tek çözümlü olmasını gerektirir. Diğer taraftan, eğer birinci mertebeden sistem içinde $u = r\phi(x')$ yazarak (3.1) denklemini yeniden yazarsak

$$\begin{aligned} x' &= r^{1-q}(t)\phi^{-1}(u) \quad , \\ u' &= -c(t)\phi(x) \end{aligned} \tag{3.3}$$

sistemini elde ederiz. Burada q, p`nin konjugate sayısı yani $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve ϕ^{-1}, ϕ nin ters fonksiyonudur. (3.3) denkleminin sağ tarafı x, u ile daha çok Lipschitz olamaz, buradan standart Varlık ve Teklik Teoremleri bu sisteme doğrudan uygulanamaz.

$$(r(t)|x'|^{\alpha-1}\operatorname{sgn} x')' + p(t)|x|^{\beta-1}\operatorname{sgn} x = 0 \ , \ \ \alpha,\beta>1 \qquad (3.4)$$

Emden-Fowler tip diferansiyel denklem olarak bilinir, (net olarak (3.1) denklemine benzer olarak bakılabilir.) singüler çözüm olarak adlandırılmasına izin verilebilir yani; çözümler; (3.4) denkleminin çözümlerinin tekliği ve sürekliliği ihlal eden çözümlerdir. Bu denklemde $\alpha=\beta$ olduğunda denklem yarı-lineer denklemdir.

Tanım 3.1: Eğer $x(a)=0,\ r(a)\phi(x'(a))=1$ başlangıç şartları ile verilen x çözümü [a,b]de sıfıra sahip değilse (3.1) denklemine [a,b] kapalı aralığında **disconjugate**dir denir. Bir x çözümünün bir sıfırı ile kasıt $x(t_0)=0$ olacak şekilde bir t_0`ın varlığıdır. (3.1) denkleminde karşıt durum **conjugate** olarak adlandırılır.

Tanım 3.2: (3.1) denklemi eğer her $T_1>T_0$ için $[T_0,T_1]$ üzerinde (3.1) denklemi disconjugate olacak şekilde $T_0\in R$ varsa **salınımsız**dır denir (daha kesin olarak ∞`da salınımsızdır). Aksi halde, (3.1) denklemine **salınımlı**dır denir.

Tanım 3.3 (3.1) Denklemi eğer onun her aşikâr olmayan çözümü $I\in R$'da en fazla bir sıfıra sahipse böyle bir I aralığı üzerinde disconjugatedir.

4. BÖLÜM

YARI LİNEER RİCATTİ DÖNÜŞÜMÜ VE STURM TEORİ

4.1 Yarı Lineer Riccati Dönüşümü

(3.1) denklemine ilişkin salınımlılık teorisinde oldukça yararlı bir dönüşüm Riccati dönüşümüdür. x, $x(t) \neq 0$ olacak şekilde bir $I \in R$ aralığında (3.1) denkleminin bir çözümü olsun. Böylece

$$w(t) = r(t)\frac{\phi(x'(t))}{\phi(x(t))}$$

genelleştirilmiş

$$w' + c(t) + (p-1)r^{1-q}(t)|w|^q = 0 \qquad (4.1)$$

Riccati denklemin bir çözümüdür

q, p'nin conjugate sayısı, yani , $q = \frac{p}{p-1}$ dir. Gerçekten (3.1) denklemini göz önünde tutarak

$$w' = \frac{(r\phi(x'))'\phi(x) - (p-1)r\phi(x')|x|^{p-2}x'}{\phi^2(x)} = -c - (p-1)\frac{r|x'|^p}{|x|^p} = -c - (p-1)r^{1-q}|w|^q$$

bulunur. (3.1) denkleminde yerine yazılırsa;

$$w' = \frac{-c\phi^2(x) - (p-1)r\phi(x')|x|^{p-2}x'}{\phi^2(x)}$$

$$w' = -c - \frac{(p-1)r|x'|^{p-1}|x|^{p-2}x'}{\left\{|x|^{p-1}\right\}^2}$$

$$w' = -c - (p-1)r|x'|^{p-1}|x|^{p-2}x'|x|^{-2p+2}$$

$$w' = -c - (p-1)r|x'|^p|x|^{-p}$$

$$w' = -c - (p-1)r\left|\frac{x'}{x}\right|^p$$

olur.

$$w = r\frac{\phi(x')}{\phi(x)} = r\frac{|x'|^{p-1}}{|x|^{p-1}} \Rightarrow |w|^{\frac{p}{p-1}} = r^{\frac{p}{p-1}}\frac{|x'|^p}{|x|^p}$$

$$|w|^q = r^q\frac{|x'|^p}{|x|^p} \Rightarrow \frac{|x'|^p}{|x|^p} = \frac{|w|^q}{r^q}$$

olduğundan

$$w' = -c - (p-1)r\frac{|w|^q}{r^q} = -c - (p-1)r^{1-q}|w|^q$$

olarak bulunur.

4.2 Sturm Teori

Bu bölümde (3.1) yarı lineer denklemin basit salınımlılık özelliklerini kuracağız. Özellikle, göstereceğiz ki (3.2) Sturm-Liouville lineer denklemlerinin salınım teorisinin bazı özellikleri yarı lineer salınımın ana methodlarına benzerdir ve Sturm Teori (3.1) denklemine harfi harfine genişletilir.

4.2.1 Picone Özdeşliği

Orijinal Picone'un Özdeşliği (3.2) ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklem için 1910'da kuruldu. Bu zamandan sonra, bu özdeşlik çeşitli yönlerde genişletildi ve bu özdeşliğin yarı lineer versiyonu aşağıdaki gibidir.

Teorem 4.2.1 Yarı lineer diferansiyel operatörlerin bir çiftini

$$L[x]=L_{r,c}[x]=\left(r(t)\phi(x')\right)'+c(t)\phi(x) \qquad L_{R,C}[y]=\left(R(t)\phi(y')\right)'+C(t)\phi(y)$$

olarak göz önüne alalım ve x,y bir $I\subset R$ aralığında $y(t)\neq 0$ ve sürekli türevlenebilen $r\phi(x'),R\phi(y')$ fonksiyonları olacak şekilde sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Bu aralıkta

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{x}{\phi(y)}\left[\phi(y)r\phi(x')-\phi(x)R\phi(y')\right]\right\}' =(r-R)|x'|^p+(C-c)|x|^p\\&+pR^{1-q}P(R^{q-1}x',R\phi(\frac{xy'}{y}))+\frac{x}{\phi(y)}\left[\phi(y)L_{r,c}[x]-\phi(x)L_{R,C}[y]\right]\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$P(u,v):=\frac{|u|^p}{p}-uv+\frac{|v|^p}{q}\geq 0 \tag{4.3}$$

ancak ve ancak $v=\phi(u)$ eşitliği ile olur.

İspat: (4.2) Özdeşliği doğrudan bir hesaplama ile doğrulanabilir, (4.3) eşitsizliği klasik Young eşitsizliğidir.

Özellikle durum r=R, C=c olduğu zaman, y; $L_{r,c}[y]=0$ denkleminin sıfır olmayan bir çözümüdür ve $w=\dfrac{r\phi(y')}{\phi(y)}$, (4.2) özdeşliği

$$r(t)|x'|^p - c(t)|x|^p = \left(w(t)|x|^p\right)' + pr^{1-q}(t)P(r^{q-1}(t)x', \phi(x)w(t)) \tag{4.4}$$

denklemine indirgenir.

4.2.2 Enerji Fonksiyoneli

p dereceli

$$F(y;a,b) = \int \left[r(t)|y'|^p - c(t)|y|^p \right] dt \tag{4.5}$$

fonksiyonu $w_0^{1,p}(a,b)$ Sobolev uzayı üzerinde göz önüne alınan genellikle (3.1) denkleminin enerji fonksiyonu olarak adlandırılır. Sobolev uzayını hatırlarsak, $w_0^{1,p}(a,b)$ kesin sürekli $\|x\| = \left(\int_a^b \left[|x'|^p + |x|^p \right] dt \right)$ normu veya $\|x\| = \left(\int_a^b |x'|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$ eş normu ile tanımlı x fonksiyonlarından oluşan uzaydır ve bu x`lerin ilk türevi $x(a) = 0 = x(b)$ olmak üzere $L^p(a,b)$ dedir. Bu cümle bazen kabul edilebilir fonksiyonların sınıfı olarak adlandırılır. (3.1) denklemi F fonksiyonelinin Euler-Lagrange denklemidir. Zaten, eğer x, $x(a) = 0 = x(b)$ sağlayan (3.1) denkleminin bir çözümü ise kısmi integrasyon kullanarak

$$F(x;a,b) = \left[r(t)x(t)\phi(x'(t)) \right]_a^b - \int x(t) \left[\left(r(t)\phi(x') \right)' + c(t)\phi(x) \right] dt = 0 \tag{4.6}$$

elde ederiz.

Teorem 4.2.2 (Roundabout Teoremi):

Bu Teorem (4.1) Riccati denklemi, (4.5) enerji fonksiyoneli ve (3.1) denkleminin çözümlerinin temel salınımlılık özellikleri ile ilgilidir.

Aşağıdaki durumlar eşittir.

(i) (3.1) denklemi I=[a,b] aralığı üzerinde disconjugatedir.

(ii) (3.1) denkleminin [a,b]de sıfırı olmayan bir çözümü vardır.

(iii) Genelleştirilmiş (4.1) Riccati denkleminin [a,b] tam aralığında tanımlı bir w çözümü vardır.

(iv) F(y;a,b) enerji fonksiyoneli her $0 \not\equiv y \in w_0^{1,p}(a,b)$ için pozitiftir.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\varepsilon > 0$ olduğunda , $\tilde{x}(a) = \varepsilon$, $r(a)\phi(x'(a)) = 1$ başlangıç şartı ile verilen (3.1) denkleminin bir $\tilde{x}$ çözümünü göz önüne alalım. Başlangıç şartları üzerinde (3.1) denkleminin çözümlerinin sürekli bağımlılığına göre, (3.1) denkleminin disconjugatesi [a,b] üzerinde ε yeterince küçük ise bu aralık üzerinde bu çözümün pozitif olmasını gerektirir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Bu gerektirme 4.1 Yarı lineer Riccati dönüşümünün doğrudan sonucudur.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Eğer [a,b] aralığının tümünde tanımlı (4.1)`in bir w çözümü varsa, $x \in w_0^{1,p}(a,b)$ ile (4.4) indirgenmiş Picone Özdeşliğinin integrasyonu ile [a,b] aralığında $\phi\left(r^{q-1}(t)x'\right) = \phi(x)w(t)$ eşitliği ile yani, $x' = \phi^{-1}\left(\frac{w(t)}{r(t)}\right)x$ eşitlikleri geçerli olmak üzere,

$$F(x;a,b) = p\int r^{1-q}(t)P\left(r^{q-1}(t)x', \phi(x)w(t)\right)dt \geq 0$$

elde ederiz. $x(a) = 0$ olduğundan;

$$x(t) = x(a)e^{\left\{\int_a^t \phi^{-1}\left(\frac{w(s)}{r(s)}\right)ds\right\}} \equiv 0$$

dir. Bunun anlamı $w_0^{1,p}(a,b)$ üzerinde $F(x;a,b) \geq 0$ yalnızca eğer $x(t) \equiv 0$ eşitliği iledir.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Farz edelim ki F>0 aşikâr olmayan $y \in w_0^{1,p}(a,b)$ için ve (3.1) [a,b]`de disconjugate değildir, yani $x(a)=0,\ r(a)\phi(x'(a))=1$ başlangıç şartları ile verilen (3.1) denkleminin çözümü $d \in [a,b]$ bir sıfıra sahiptir.

$y \in w_0^{1,p}(a,b)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$y(t)=\begin{cases} x(t) & , \quad t \in [a,d] \\ 0 & , \quad t \in [d,b] \end{cases}$$

(4.6) ile $F(y;a,b)=F(y;a,d)=F(x;a,d)=0$

F'nin pozitifliğiyle çelişir.

Uyarı 4.2.3

(i) Görülür ki Picone Özdeşliği F'nin pozitif kesinliğini gerektiren (3.1) denkleminin bir sıfır olmayan çözümünün varlığını göstermekte kullanılabilir. Fakat Raundabout Teoremi içinde teorimizin uygulanması için önemli bir eşitlikten genelleştirilmiş Riccati denklemini içerir.

(ii) Eğer (a,b) üzerinde $y(t) \neq 0$ olacak şekilde (3.1) denkleminin bir y çözümü varsa, bu takdirde her $u \in w_0^{1,p}(a,b)$ için $F(u;a,b) \geq 0$ olur. Eğer y ve u orantılı ise eşitlik vardır. Bu özellik Raundabout Teoremi (i) $\Rightarrow$ (iv) gerektirmesi ile aynı durumdur.

Aşağıdaki lemma çözümlerin sıfırlarının şartları için alternatif tanım verir.

Lemma 4.2.4 (3.1) denklemi [a,b] üzerinde disconjugatedir ancak ve ancak aşikâr olmayan her çözümü [a,b]'de en fazla bir sıfıra sahip ise.

İspat: İspatın ise $(:\Rightarrow)$ kısmı aşikâr. Ancak ve ancak $(\Leftarrow:)$ kısmı bir çelişki ile ispatlanacaktır. Buradan farz edelim ki (3.1) denklemi [a,b] üzerinde disconjugatedir ve $y(c_1)=0=y(c_2)$, $a \leq c_1 < c_2 \leq b$ olacak şekilde (3.1) denkleminin bir y çözümü vardır.

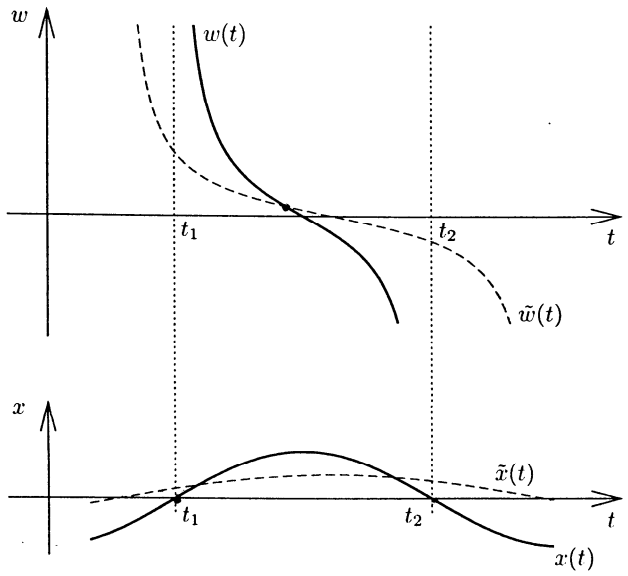
Çözüm uzayı homojen olduğundan, $z(c_1)=0=z(c_2)$ ve $z'(c_1)=\phi^{-1}\left(\frac{1}{r(c_1)}\right)$ ile (3.1) denklemini sağlayan $z=\lambda y$ olacak şekilde $\lambda\in R$ vardır. Raundabout Teoreminin $(\text{ii})\Rightarrow(\text{i})$ gerektirmesinden $[c_1,c_2]$ üzerinde sıfırı olmaksızın (3.1) denkleminin hiç çözümü yoktur. Böylece [a,b]`de sıfırı olmayan (3.1) denkleminin çözümü olmaz. Raundabout Teoreminin söyleyebiliriz ki $x(a)=0, x'(a)=\phi^{-1}\left(\frac{1}{r(a)}\right)$ durumunu sağlayan x çözümü bir sıfıra sahiptir, ve böylece (3.1) [a,b]`de disconjugate değildir, bu çelişkidir.

4.2.3 Sturm Ayırma ve Karşılaştırma Teoremleri

Lineer denklemlerin lineer bağımsız çözümlerinin sıfırlarının iç içe geçmesi özelliği denklemlerin salınım/salınımsızlığının tanımları arasında en karakteristik özelliklerinden biridir. Aşağıdaki Sturm tipi ayırma Teoremi (3.1) denklemine genişletileceğini iddia eder. İspat Riccati dönüşümüne dayalıdır.

Teorem 4.2.5 (Sturm Ayırma Teoremi): (3.1) denkleminin aşikâr olmayan bir x çözümünün ardışık iki sıfırı $t_1<t_2$ olsun. Bu takdirde denklemin herhangi bir x`den lineer bağımsız çözümü (t_1,t_2) üzerinde kesinlikle bir sıfıra sahiptir.

İspat: $w=\frac{r\phi(x')}{\phi(x)}$ olsun, bu takdirde w, (4.1) denkleminin (t_1,t_2) üzerinde tanımlı bir çözümüdür ve $w(t_1+)=\infty,\ w(t_2-)=-\infty$ sağlanır. Farz edelim ki (3.1) denkleminin bir $\tilde{x}$ çözümü; x ile lineer bağımsız ve (t_1,t_2)`de sıfırı olmayacak şekilde var olsun. $\tilde{w}=r\phi\left(\frac{\tilde{x}'}{\tilde{x}}\right)$ olsun. Şekil 4.2'ye bakınız. $\tilde{x}(t_1)\neq 0,\ \tilde{x}(t_2)\neq 0$ (diğer durumda $\tilde{x}$,x'in bir katı olabilir) olduğundan, $\tilde{w}(t_1)<\infty, \tilde{w}(t_2)>-\infty$ olur. Buradan $\tilde{w}$'nin grafiği (t_1,t_2)`de bazı noktalarda w'nin grafiğini kesmek zorundadır, fakat bu (4.1)`in tek çözülebilirliğinden çelişir $(c+(p-1)r^{1-q}|w|^q$ fonksiyonunun w`ye göre Lipschitzian olmasından görülür).



Şekil 4.2. Riccati tekniğine dayalı ayırma teoremi

Teorem 4.2.5'e göre, (3.1) denkleminin bir çözümü salınımlıdır ancak ve ancak (3.1) denkleminin herhangi bir diğer çözümü salınımlı ise. (3.1) denkleminin (aşikâr olmayan) bir çözümünün salınımlılığının anlamı bu çözümün sıfırlarının dizisi ∞'a yaklaştığı anlamındadır. Dikkat etmeliyiz ki lineer durumla benzer olarak, eğer r,c sürekli fonksiyonlar ve bir $[T,\infty)$ aralığında r(t)>0 ise, (3.1) denklemi ile ilgili başlangıç değer probleminin tek çözülebilirliğine göre, (3.1) denkleminin herhangi bir aşikâr olmayan çözümünün sıfırlarının dizisi sonlu yığılma noktasına sahip olamaz.

(3.1) denklemi ile aynı formda başka bir

$$\left(R(t)\phi(y')\right)' + C(t)\phi(y) = 0 \qquad (4.7)$$

denklemini göz önüne alalım. R,C ; (3.1) denkleminde sıra ile r,c gibi aynı şartları sağlar.

Teorem 4.2.6 (Sturm Karşılaştırma Teoremi): $\left(r(t)\phi(x')\right)' + c(t)\phi(x) = 0$ denkleminin bir çözümü x ve

$\left(R(t)\phi(y')\right)' + C(t)\phi(y) = 0$

denkleminin de bir çözümü $\tilde{x}$ olsun. Kabul edelim ki $t \in [t_1, t_2]$ için $C(t) \geq c(t)$, $r(t) \geq R(t) > 0$ olsun. $t_1 < t_2$ `ler x`in ardışık iki sıfırı ise bu durumda (t_1, t_2) aralığında $\tilde{x}$ `in en az bir sıfırı vardır.

Tanım 4.2.7 Eğer $C(t) \geq c(t), r(t) \geq R(t) > 0$ şartı verilen bir I aralığında sağlanırsa, (4.7) denklemine I üzerinde (3.1) denkleminin Majorant denklemi (veya Sturm Majorantı) denir ve (3.1) I üzerinde (4.7) denkleminin Minorant denklemi (veya Sturm Minorantı) denir.

Lemma 4.2.8 (3.1)'in aşikâr olmayan ve lineer bağımsız iki x ve y çözümü ortak bir sıfıra sahip olamazlar.

İspat: Tersine olarak kabul edelim ki x ve y, $x(t_0) = 0 = y(t_0)$ ile lineer bağımsız çözümlerdir. Bu takdirde $x'(t_0) = A \neq 0$ ve $y'(t_0) = B \neq 0$ dir. $z(t_0) = 0, z(t_0) = 1$ sağlayan (3.1)'in z çözümünü göz önüne alalım. Az ve Bz homojenlik özelliğinden dolayı $Az(t_0) = 0 = Bz(t_0), Az'(t_0) = A, Bz'(t_0) = B$ sağlayan (3.1)'in çözümleridir. Teklikten dolayı $x = (A/B)y$ gerektiren $x = Az$ ve $y = Bz$ sahip oluruz. Sonuç olarak, x ve y orantılıdır, bu çelişkidir.

4.2.3 Çeşitli Aralık Tipleri Üzerinde Disconjugate

Disconjugate kavramını genel I aralığında I kapalı, açık veya yarı açık olmasına bakmaksızın genişleteceğiz.
Bununla beraber, I aralığının değişimi bazı özellikleri etkileyebileceğini göstereceğiz; özellikle , (3.1) denkleminin bir çözümünün varlığı sıfırları olmaksızın I`nın genel durumunun disconjugate için gerekli olmadığını söyleyeceğiz.

Teorem 4.2.9 (3.1) Denklemi eğer I üzerinde sıfırları olmayan bir çözüme sahipse I üzerinde disconjugatedir. Bu şart bir açık veya bir kompakt aralık içinde geçerlidir.

Teorem 4.2.10 (3.1) Denklemi eğer (a, b) iç bölgesi üzerinde disconjugate ise $I = [a, b)$ yarı açık aralık üzerine disconjugatedir.

Teorem 4.2.11 **A**şağıdaki durumlar denktir.

(i) (3.1) Denklemi (a,b) aralığı üzerinde disconjugatedir.

(ii) (3.1) Denkleminin (a,b)'de sıfırı olmayan bir çözümü vardır.

(iii) (a,b) tam aralığı üzerinde tanımlı (4.1) Genelleştirilmiş Riccati Denkleminin bir w çözümü vardır.

(iv) F(y;a,b) enerji fonksiyoneli her $y \in w_0^{1,p}(a,b)$ için nonnegatiftir.

4.2.4 Bağımsız Değişken Dönüşümü

Yeni $s = \varphi(t)$ bağımsız değişkeni ve $y(s) = x(t)$ yeni fonksiyonu ele alalım burada φ bazı I aralığında $\varphi'(t) \neq 0$ olacak şekilde bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda (3.1) denklemini göz önüne alalım. Sonra $\frac{d}{dt} = \varphi'(t)\frac{d}{ds}$ ve buradan bu dönüşüm aynı formun denklemi içindeki (3.1) denklemi

$$\frac{d}{ds}\left[r(t)\phi(\varphi'(t))\phi\left(\frac{d}{ds}y\right)\right] + \frac{c(t)}{\varphi'(t)}\phi(y) = 0 \quad , \quad t = \varphi^{-1}(s) \tag{4.8}$$

dönüştürür, φ^{-1} , φ'nin ters fonksiyonudur. Özellikle, eğer

$$\varphi(t) = \int_T^t r^{1-q}(\tau)\,d\tau \quad , \quad T \in I \tag{4.9}$$

ise (3.1) denklemi $r(t) \equiv 1$ ile $\left(\phi(x')\right)' + (p-1)\phi(x) = 0$ denklemine dönüşür.

Tersine olarak eğer $\int^{\infty} r^{1-q}(t)\,dt = \infty$ ise, (4.7) dönüşümü $(T,\infty]$ sınırsız aralığını $(0,\infty]$ aralığına dönüştürür ki o $[T,\infty)$`daki formla aynıdır. Eğer $\int^{\infty} r^{1-q}(t)\,dt < \infty$ ise $[T,\infty)$ aralığı $[0,b)$ sınırlı aralığı içine dönüştürülür, $b = \int_T^{\infty} r^{1-q}(t)\,dt$ `dir.

4.3 Daha Genel Riccati Dönüşümü

$$R[w] = w' + c(t) + (p-1)r^{1-q}(t)|w|^q \tag{4.10}$$

Riccati operatörünü göz önüne alalım.
Bazen daha genel bir Riccati dönüşümü kullanmak daha uygundur.

$$v(t) = \frac{f(t)r(t)\phi(x'(t))}{\phi(x(t))} \ ,$$

buradan f diferensiyellenebilir bir fonksiyondur. Direkt bir hesaplamadan görülebilir ki v birinci mertebeden Riccati tipi

$$v' - \frac{f'(t)}{f(t)}v + f(t)c(t) + (p-1)r^{1-q}(t)f^{1-q}(t)|v|^q = 0 \tag{4.11}$$

denklemini sağlar.

Başka bir genelleştirme biraz daha genel bir yarı lineer denklem göz önüne alarak

$$(r(t)\phi(x'))' + b(t)\phi(x') + c(t)\phi(x) = 0 \tag{4.12}$$

üzerine kurulabilir. $w = r\dfrac{\phi(x')}{\phi(x)}$ Riccati dönüşümü ile denklem

$$w' + c(t) + \frac{b(t)}{r(t)}w(p-1)r^{1-q}(t)|w|^q = 0 \tag{4.13}$$

denklemine dönüşür. Bu denklemi $e^{\left\{\int^t \frac{b(s)}{r(s)}ds\right\}} = g(t)$ ile çarparak ve $v = g.w$ dersek, (4.13) denklemi (4.1) gibi aynı formda yazılabilir, yani,

$$v' + c(t)g(t) + (p-1)r^{1-q}(t)g^{1-q}(t)|v|^q = 0\,.$$

dir. Aynı etki eğer (4.12) orijinal denklemi g ile çarparsak bu denklem tekrar (3.1) formunda yazılabilir.

4.3.1 Ricatti Eşitsizliği

Raundabout Teoreminden biliyoruz ki (3.1)'in salınımsızlığı bir sonsuz komşuluğunda (4.1) genelleştirilmiş Riccati denkleminin çözülebilirliğine denktir. Sturm karşılaştırma Teoreminden dolayı, (3.1)'in salınımsızlığı aslında genelleştirilmiş Riccati eşitsizliğinin çözülebilirliğine denktir. İspatında göstereceğiz ki $y \neq 0$ şartıyla $yL[y] = |y|^p R\left[r\phi\left(\frac{y'}{y} \right) \right]$ dir. Hatırlayalım ki L operatörü Teorem 4.2.1'de ve R operatörü (4.1) ile tanımlandı.

Teorem 4.3.1 Aşağıdaki durumlar denktir:

(i) (3.1) denklemi salınımsızdır.

(ii) $a \in R$ ve $w:[a,\infty) \to R$ bir (sürekli türevlenebilir) fonksiyon

$$R[w](t) = 0 \text{ her } t \in [a,\infty)$$

olacak şekilde vardır.

(iii) $a \in R, A \in R$ bir sabit $w:[a,\infty) \to R$ bir (sürekli) fonksiyon $t \in [a,\infty)$ için

$$w(t) = A - \int_a^t \{c + S[w,r]\}(s)\, ds$$

olacak şekilde vardır. Burada $S[w,r] = r^{1-q} \cdot |w|^q \cdot (p-1)$ `dir.

(iv) $a \in R$ ve $w:[a,\infty) \to R$ bir (sürekli türevlenebilir) fonksiyon $t \in [a,\infty)$ için

$$R[w](t) \leq 0 \tag{4.14}$$

olacak şekilde vardır.

(v) $a \in R$ ve $y:[a,\infty) \to R$ bir pozitif fonksiyon ($r\Phi(y')$ ile sürekli türevlenebilir) $t \in [a,\infty)$ için

$$L[y](t) \le 0 \tag{4.15}$$

olacak şekilde vardır.

İspat: $(\mathrm{i}) \Rightarrow (\mathrm{ii})$**:** Bu gerektirme Teorem 4.2.2 Raundabout Teoreminden gelir, (3.1)'in salınımsızlığından (3.1) $[a,\infty)$ üzerinde disconjugate olacak şekilde $a \in R$'nın varlığını gerektirir.

$(\mathrm{ii}) \Rightarrow (\mathrm{iii})$: aşikâr,

$(\mathrm{iii}) \Rightarrow (\mathrm{iv})$: aşikâr,

$(\mathrm{iv}) \Rightarrow (\mathrm{v})$: $[a,\infty)$ üzerinde w $R[w](t) \le 0$ sağlasın.

$$y = e^{\left\{\int_a^t \phi^{-1}\left(\frac{w(s)}{r(s)}\right)ds\right\}}$$

fonksiyonu $y' = \phi^{-1}\left(\dfrac{w(t)}{r(t)}\right)y$, $y(a)=1$ başlangıç değer probleminin pozitif bir çözümüdür.

$$\begin{aligned} yL[y] &= y(r\phi(y'))' + yc\phi(y) - (p-1)r|y'|^p + (p-1)r|y'|^p \\ &= |y|^p \frac{(r\phi(y'))'\phi(y) - (p-1)r\phi(y')|y|^{p-2}y'}{\phi(y)\phi(y)} + |y|^p c + |y|^p (p-1) r^{1-q}\left(\frac{r|y'|^{p-1}}{|y|^{p-1}}\right)^q \\ &= |y|^p R[w] \le 0 \end{aligned}$$

buradan (v) sağlanır.

$(\mathrm{v}) \Rightarrow (\mathrm{i})$: Farz edelim ki bir y fonksiyonu (4.15)'i $[a,\infty)$ üzerinde sağlasın.

$$\varphi(t) = -\{yL[y]\}(t)$$

bu aralık üzerinde negatif olmayan bir fonksiyondur. $\bar{c}(t)=c(t)-\varphi(t)/|y|^{p}$ olarak belirleyelim. $\bar{c}\geq c$ ve

$$\left(r(t)\phi(y')\right)'+\bar{c}(t)\phi(y)=\left(r(t)\phi(y')\right)'+\left(c(t)-\frac{\varphi(t)}{|y|^{p}}\right)\Phi(y)=0$$

dir.

Böylece $\left(r(t)\phi(y')\right)'+\bar{c}(t)\phi(y)=0$ $[a,\infty)$ üzerinde disconjugatedir. Bu yüzden (3.1) $[a,\infty)$ üzerinde disconjugatedir ve Sturm Karşılaştırma Teoreminden (Teorem 4.2.6) salınımsızdır.

Uyarı 4.3.2 $(\mathrm{iv})\Rightarrow(\mathrm{i})$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Gerçekten w, $R[w](t)\leq 0$'ın bir çözümü olsun. $C(t):=-w'-(p-1)r^{1-q}(t)|w|^{q}$ olarak alalım. w, $w'+C(t)+(p-1)r^{1-q}(t)|w|^{q}=0$'ın bir çözümüdür ve bu (3.1)'in bir Sturm Majorantı olmakla beraber Riccati denklemidir. ($C(t)\geq c(t)$ olduğundan). Bu majorant denklem salınımsızdır ve buradan (3.1) denklemi de salınımsızdır.

Teorem 4.3.3 Kabul edelim ki $a\in R$, $A\in R$ bir sabit $w:[a,\infty)\to R$ bir (sürekli) fonksiyonu $t\in[a,\infty)$ için

ya

$$w(t)\geq A-\int_{a}^{t}\{c+S[w,r]\}(s)\,ds\geq 0$$

ya da

$$w(t)\leq A-\int_{a}^{t}\{c+S[w,r]\}(s)\,ds\leq 0$$

olacak şekilde vardır, $S[w,r]=(p-1)\cdot r^{1-q}\cdot|w|^{q}$ `dir. Teorem 4.3.1 Teoremindeki (i)-(v) sağlanır. Eğer, ek olarak $\int_{a}^{\infty}c(t)\,dt=\infty$ ise yukarıdaki şart (i)-(iv) için gereklidir.

4.4 Salınımlılık Kriterleri

Teorem 4.4.1 (Leighton-Wintner Salınımlılık Kriteri):

(3.1) denklemi

$$\int^{\infty} r^{1-q}(t)\,dt = \infty \qquad \text{ve} \qquad \int^{\infty} c(t)\,dt = \lim_{b\to\infty}\int^{b} c(t)\,dt = \infty \tag{4.16}$$

şartıyla salınımlıdır.

İspat: (3.1)'in salınımlılık tanımına göre, göstermemiz gerekir ki $[T,\infty)$ formunun herhangi bir aralığı üzerine bu denklem disconjugate değildir.
Farz edelim ki, tersine olarak, (4.16) sağlansın ve (3.1) salınımsız olsun. Bu takdirde $T \in R$ var ve $[T,\infty)$ aralığının bütününde tanımlı (4.1) denkleminin bir w çözümü vardır. (4.1)`i integre ederek

$$w(t) = w(T) - \int_T^t c(s)\,ds - (p-1)\int_T^t r^{1-q}(s)\left|w(s)\right|^q ds$$

elde ederiz. (4.16)'da ikinci şart $t > T_1$ için $w(T) - \int_T^t c(s)\,ds \le 0$ sahip olacak şekilde $T_1 > T$ 'nin varlığını gerektirir ve buradan $t > T_1$ için

$$w(t) \le -(p-1)\int_T^t r^{1-q}(s)\left|w(s)\right|^q ds$$

dir.

$G(t) = \int_T^t r^{1-q}(s)\left|w(s)\right|^q ds$ dersek, bu takdirde $|w| = \left[G' r^{q-1}\right]^{1/q}$ ve son eşitsizlik

$$\frac{G'(t)}{G^q(t)} \ge (p-1)^q r^{1-q}(t)$$

olur. T_1 'den t'ye bu eşitsizliği integre ederek

$$\frac{1}{q-1}G^{1-q}(T_1) > \frac{1}{q-1}\left[G^{1-q}(T_1) - G^{1-q}(t)\right] \geq (p-1)^q \int_{T_1}^{t} r^{1-q}(s)\,ds$$

elde edilir. $t \to \infty$ iken (4.16)'da ilk şart ile bir çelişki elde ederiz.

Teorem 4.4.2 (Yarı-Lineer Hartman-Wintner Teoremi):

Aşağıdaki Teorem klasik Hartman-Wintner Teoreminin bir yarı-lineer denklemine genişletmesidir ki o $r(t) \equiv 1$ ile (3.2) denklemine karşılık gelen $w' + c(t) + w^2 = 0$ Riccati denkleminin çözümlerinin karesel integrallenebilirliği ile ilgilidir.

Teorem 4.4.3 Kabul edelim ki

$$\int^{\infty} r^{1-q}(t)\,dt = \infty \tag{4.17}$$

olsun ve (3.1) denklemi salınımsızdır. Bu takdirde aşağıdaki durumlar denktir.

(i) (4.1) Riccati denkleminin her w çözümü için

$$\int^{\infty} r^{1-q}(t)\left|w(t)\right|^q dt < \infty \tag{4.18}$$

sağlanır.

(ii) Bir sonlu

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_t^t r^{1-q}(s)\left(\int_s^s c(\tau)\,d\tau\right)ds}{\int_t^t r^{1-q}(s)\,ds} \tag{4.19}$$

limiti vardır.

(iii) Alt limit için

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\int_t^t r^{1-q}(s)\left(\int_s^s c(\tau)\,d\tau\right)ds}{\int_t^t r^{1-q}(s)\,ds} > -\infty \tag{4.20}$$

elde edilir.

Hartman-Wintner Teoremine göre, (3.1)'in salınımsızlığı, genelleştirilmiş integraller içeren Riccati integral denklemlerinin çözülebilirliğinin şartları ile ifade edilebilir.

Teorem 4.4.4 Farz edelim ki (4.17) sağlansın ve $\int_t^\infty c(t)\,dt$ integrali yakınsak olsun. (3.1) denklemi salınımsızdır ancak ve ancak $a\in R$ olmak üzere $t\ge a$ için

$$w(t)=\int_t^\infty c(s)\,ds+(p-1)\int_t^\infty r^{1-q}(s)\left|w(s)\right|^q ds \tag{4.21}$$

Riccati denklemini sağlayan $w:[a,\infty)\to R$ bir (sürekli) fonksiyon varsa.

Teorem 4.4.5 Farz edelim ki $\int_t^\infty c(t)dt$ integrali yakınsak olsun ve (4.17) sağlansın. Bu takdirde $a\in R$ olmak üzere
ya

$$w(t)\ge\int_t^\infty c(s)\,ds+(p-1)\int_t^\infty r^{1-q}(s)\left|w(s)\right|^q ds\ge 0 \tag{4.22}$$

ya da

$$w(t) \le \int_t^\infty c(s)\,ds + (p-1)\int_t^\infty r^{1-q}(s)\left|w(s)\right|^q ds \le 0 \qquad (4.23)$$

eşitsizliklerini sağlayan $w:[a,\infty)\to R$ bir (sürekli) fonksiyon varsa ancak ve ancak (3.1) denklemi salınımsızdır.

Uyarı 4.4.6 Eğer (4.22) ve (4.23) `ü

$$\left|w(t)\right| \ge \left|\int_t^\infty c(s)\,ds + (p-1)\int_t^\infty r^{1-q}(s)\left|w(s)\right|^q ds\right| \qquad (4.24)$$

şartıyla yer değiştirirsek Teorem 1.8.5 geçerlidir. Gerçekten eğer $v(t)=\int_t^\infty \{c+S[w,r]\}(s)\,ds$ ise, bu takdirde $|v|\le|w|$ ve $v'+c(t)+S[w,r](t)=0$ `dır ve böylece $R[v](t)\le 0$ elde ederiz. Teorem 4.4.4'ü de göz önüne alarak, Aşağıdaki durumlar denk olduğunu söyleriz.

(i) (3.1) Denklemi salınımsızdır.
(ii) (4.21) Denklemi sonsuzun bir komşuluğunda çözülebilirdir.
(iii) (4.24) Eşitsizliği sonsuzun bir komşuluğunda çözülebilirdir.

Teorem 4.4.7 Farz edelim ki $a\in R$, $A\in R$ bir sabit ve $t\in[a,\infty)$ için $w:[a,\infty)\to R$ fonksiyonu
ya

$$w(t) \ge A - \int_a^t c(s)\,ds + \int_t^\infty S[w,r](s)\,ds \ge 0$$

ya da

$$w(t) \le A - \int_a^t c(s)\,ds + \int_t^\infty S[w,r](s)\,ds \le 0$$

sağacak şekilde varsa bu takdirde (3.1) denklemi salınımsızdır. Eğer, ek olarak (4.17) ve (4.20) sağlanırsa, bu takdirde yukarıdaki şart (3.1) denkleminin salınımsızlığı için gereklidir.

Teorem 4.4.8 (Leighton Salınımlılık Kriteri):

(3.1) diferensiyel denklemi $0 < t < \infty$ aralığında r, r' ve c sürekli fonksiyonlar ve bu aralıkta $r(t) > 0$ şartları altında verilsin.

$$r_\infty = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{ds}{a(s)} \qquad , \qquad c_\infty = \lim_{t\to\infty} \int_1^t c(s)\,ds$$

Olarak tanımlansın. Eğer $r_\infty = c_\infty = \infty$ ise (3.1) denklemi $(1,\infty)$ aralığında salınımlıdır.

4. BÖLÜM

YARI LİNEER RİCATTİ DÖNÜŞÜMÜ VE STURM TEORİ

4.1 Yarı Lineer Riccati Dönüşümü

(3.1) denklemine ilişkin salınımlılık teorisinde oldukça yararlı bir dönüşüm Riccati dönüşümüdür. x, $x(t) \neq 0$ olacak şekilde bir $I \in R$ aralığında (3.1) denkleminin bir çözümü olsun. Böylece

$$w(t) = r(t)\frac{\phi(x'(t))}{\phi(x(t))}$$

genelleştirilmiş

$$w' + c(t) + (p-1)r^{1-q}(t)|w|^q = 0 \qquad (4.1)$$

Riccati denklemin bir çözümüdür

q, p'nin conjugate sayısı, yani , $q = \frac{p}{p-1}$ dir. Gerçekten (3.1) denklemini göz önünde tutarak

$$w' = \frac{(r\phi(x'))'\phi(x) - (p-1)r\phi(x')|x|^{p-2}x'}{\phi^2(x)} = -c - (p-1)\frac{r|x'|^p}{|x|^p} = -c - (p-1)r^{1-q}|w|^q$$

bulunur. (3.1) denkleminde yerine yazılırsa;

$$w' = \frac{-c\phi^2(x) - (p-1)r\phi(x')|x|^{p-2}x'}{\phi^2(x)}$$

$$w' = -c - \frac{(p-1)r|x'|^{p-1}|x|^{p-2}x'}{\left\{|x|^{p-1}\right\}^2}$$

$$w' = -c - (p-1)r|x'|^{p-1}|x|^{p-2}x'|x|^{-2p+2}$$

$$w' = -c - (p-1)r|x'|^p|x|^{-p}$$

$$w' = -c - (p-1)r\left|\frac{x'}{x}\right|^p$$

olur.

$$w = r\frac{\phi(x')}{\phi(x)} = r\frac{|x'|^{p-1}}{|x|^{p-1}} \Rightarrow |w|^{\frac{p}{p-1}} = r^{\frac{p}{p-1}}\frac{|x'|^p}{|x|^p}$$

$$|w|^q = r^q\frac{|x'|^p}{|x|^p} \Rightarrow \frac{|x'|^p}{|x|^p} = \frac{|w|^q}{r^q}$$

olduğundan

$$w' = -c - (p-1)r\frac{|w|^q}{r^q} = -c - (p-1)r^{1-q}|w|^q$$

olarak bulunur.

4.2 Sturm Teori

Bu bölümde (3.1) yarı lineer denklemin basit salınımlılık özelliklerini kuracağız. Özellikle, göstereceğiz ki (3.2) Sturm-Liouville lineer denklemlerinin salınım teorisinin bazı özellikleri yarı lineer salınımın ana methodlarına benzerdir ve Sturm Teori (3.1) denklemine harfi harfine genişletilir.

4.2.1 Picone Özdeşliği

Orijinal Picone'un Özdeşliği (3.2) ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklem için 1910'da kuruldu. Bu zamandan sonra, bu özdeşlik çeşitli yönlerde genişletildi ve bu özdeşliğin yarı lineer versiyonu aşağıdaki gibidir.

Teorem 4.2.1 Yarı lineer diferansiyel operatörlerin bir çiftini

$$L[x]=L_{r,c}[x]=\left(r(t)\phi(x')\right)'+c(t)\phi(x) \qquad L_{R,C}[y]=\left(R(t)\phi(y')\right)'+C(t)\phi(y)$$

olarak göz önüne alalım ve x,y bir $I\subset R$ aralığında $y(t)\neq 0$ ve sürekli türevlenebilen $r\phi(x'),R\phi(y')$ fonksiyonları olacak şekilde sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Bu aralıkta

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{x}{\phi(y)}\left[\phi(y)r\phi(x')-\phi(x)R\phi(y')\right]\right\}'=(r-R)|x'|^p+(C-c)|x|^p\\&+pR^{1-q}P(R^{q-1}x',R\phi(\frac{xy'}{y}))+\frac{x}{\phi(y)}\left[\phi(y)L_{r,c}[x]-\phi(x)L_{R,C}[y]\right]\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$P(u,v):=\frac{|u|^p}{p}-uv+\frac{|v|^p}{q}\geq 0 \tag{4.3}$$

ancak ve ancak $v=\phi(u)$ eşitliği ile olur.

İspat: (4.2) Özdeşliği doğrudan bir hesaplama ile doğrulanabilir, (4.3) eşitsizliği klasik Young eşitsizliğidir.

Özellikle durum r=R, C=c olduğu zaman, y; $L_{r,c}[y]=0$ denkleminin sıfır olmayan bir çözümüdür ve $w=\dfrac{r\phi(y')}{\phi(y)}$, (4.2) özdeşliği

$$r(t)|x'|^p - c(t)|x|^p = \left(w(t)|x|^p\right)' + pr^{1-q}(t)P(r^{q-1}(t)x', \phi(x)w(t)) \tag{4.4}$$

denklemine indirgenir.

4.2.2 Enerji Fonksiyoneli

p dereceli

$$F(y;a,b) = \int \left[r(t)|y'|^p - c(t)|y|^p \right] dt \tag{4.5}$$

fonksiyonu $w_0^{1,p}(a,b)$ Sobolev uzayı üzerinde göz önüne alınan genellikle (3.1) denkleminin enerji fonksiyonu olarak adlandırılır. Sobolev uzayını hatırlarsak, $w_0^{1,p}(a,b)$ kesin sürekli $\|x\| = \left(\int_a^b \left[|x'|^p + |x|^p \right] dt \right)$ normu veya $\|x\| = \left(\int_a^b |x'|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$ eş normu ile tanımlı x fonksiyonlarından oluşan uzaydır ve bu x`lerin ilk türevi $x(a) = 0 = x(b)$ olmak üzere $L^p(a,b)$ dedir. Bu cümle bazen kabul edilebilir fonksiyonların sınıfı olarak adlandırılır. (3.1) denklemi F fonksiyonelinin Euler-Lagrange denklemidir. Zaten, eğer x, $x(a) = 0 = x(b)$ sağlayan (3.1) denkleminin bir çözümü ise kısmi integrasyon kullanarak

$$F(x;a,b) = \left[r(t)x(t)\phi(x'(t)) \right]_a^b - \int x(t) \left[\left(r(t)\phi(x') \right)' + c(t)\phi(x) \right] dt = 0 \tag{4.6}$$

elde ederiz.

Teorem 4.2.2 (Roundabout Teoremi):

Bu Teorem (4.1) Riccati denklemi, (4.5) enerji fonksiyoneli ve (3.1) denkleminin çözümlerinin temel salınımlılık özellikleri ile ilgilidir.

Aşağıdaki durumlar eşittir.

(i) (3.1) denklemi I=[a,b] aralığı üzerinde disconjugatedir.

(ii) (3.1) denkleminin [a,b]de sıfırı olmayan bir çözümü vardır.

(iii) Genelleştirilmiş (4.1) Riccati denkleminin [a,b] tam aralığında tanımlı bir w çözümü vardır.

(iv) F(y;a,b) enerji fonksiyoneli her $0 \not\equiv y \in w_0^{1,p}(a,b)$ için pozitiftir.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\varepsilon > 0$ olduğunda , $\tilde{x}(a) = \varepsilon$, $r(a)\phi(x'(a)) = 1$ başlangıç şartı ile verilen (3.1) denkleminin bir $\tilde{x}$ çözümünü göz önüne alalım. Başlangıç şartları üzerinde (3.1) denkleminin çözümlerinin sürekli bağımlılığına göre, (3.1) denkleminin disconjugatesi [a,b] üzerinde ε yeterince küçük ise bu aralık üzerinde bu çözümün pozitif olmasını gerektirir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Bu gerektirme 4.1 Yarı lineer Riccati dönüşümünün doğrudan sonucudur.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Eğer [a,b] aralığının tümünde tanımlı (4.1)`in bir w çözümü varsa, $x \in w_0^{1,p}(a,b)$ ile (4.4) indirgenmiş Picone Özdeşliğinin integrasyonu ile [a,b] aralığında $\phi\left(r^{q-1}(t)x'\right) = \phi(x)w(t)$ eşitliği ile yani, $x' = \phi^{-1}\left(\frac{w(t)}{r(t)}\right)x$ eşitlikleri geçerli olmak üzere,

$$F(x;a,b) = p\int r^{1-q}(t)P\left(r^{q-1}(t)x', \phi(x)w(t)\right)dt \geq 0$$

elde ederiz. $x(a) = 0$ olduğundan;

$$x(t) = x(a)e^{\left\{\int_a^t \phi^{-1}\left(\frac{w(s)}{r(s)}\right)ds\right\}} \equiv 0$$

dir. Bunun anlamı $w_0^{1,p}(a,b)$ üzerinde $F(x;a,b) \geq 0$ yalnızca eğer $x(t) \equiv 0$ eşitliği iledir.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Farz edelim ki F>0 aşikâr olmayan $y \in w_0^{1,p}(a,b)$ için ve (3.1) [a,b]`de disconjugate değildir, yani $x(a)=0,\ r(a)\phi(x'(a))=1$ başlangıç şartları ile verilen (3.1) denkleminin çözümü $d \in [a,b]$ bir sıfıra sahiptir.

$y \in w_0^{1,p}(a,b)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$y(t)=\begin{cases} x(t) & , \quad t \in [a,d] \\ 0 & , \quad t \in [d,b] \end{cases}$$

(4.6) ile $F(y;a,b)=F(y;a,d)=F(x;a,d)=0$

F'nin pozitifliğiyle çelişir.

Uyarı 4.2.3

(i) Görülür ki Picone Özdeşliği F'nin pozitif kesinliğini gerektiren (3.1) denkleminin bir sıfır olmayan çözümünün varlığını göstermekte kullanılabilir. Fakat Raundabout Teoremi içinde teorimizin uygulanması için önemli bir eşitlikten genelleştirilmiş Riccati denklemini içerir.

(ii) Eğer (a,b) üzerinde $y(t) \neq 0$ olacak şekilde (3.1) denkleminin bir y çözümü varsa, bu takdirde her $u \in w_0^{1,p}(a,b)$ için $F(u;a,b) \geq 0$ olur. Eğer y ve u orantılı ise eşitlik vardır. Bu özellik Raundabout Teoremi (i) $\Rightarrow$ (iv) gerektirmesi ile aynı durumdur.

Aşağıdaki lemma çözümlerin sıfırlarının şartları için alternatif tanım verir.

Lemma 4.2.4 (3.1) denklemi [a,b] üzerinde disconjugatedir ancak ve ancak aşikâr olmayan her çözümü [a,b]'de en fazla bir sıfıra sahip ise.

İspat: İspatın ise $(:\Rightarrow)$ kısmı aşikâr. Ancak ve ancak $(\Leftarrow:)$ kısmı bir çelişki ile ispatlanacaktır. Buradan farz edelim ki (3.1) denklemi [a,b] üzerinde disconjugatedir ve $y(c_1)=0=y(c_2)$, $a \leq c_1 < c_2 \leq b$ olacak şekilde (3.1) denkleminin bir y çözümü vardır.

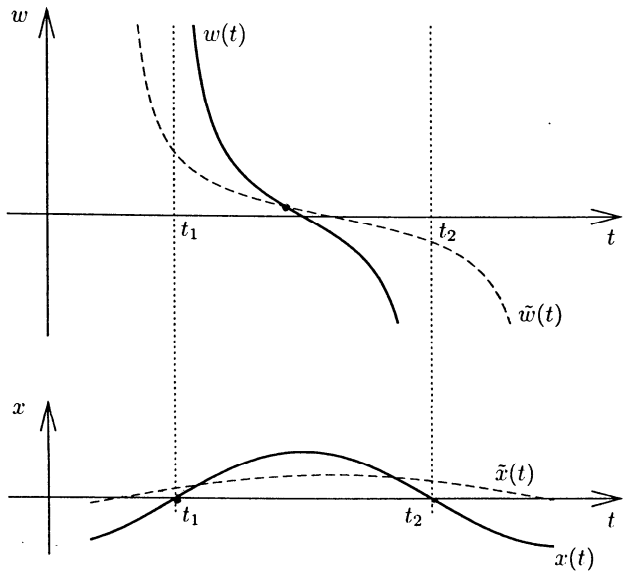
Çözüm uzayı homojen olduğundan, $z(c_1)=0=z(c_2)$ ve $z'(c_1)=\phi^{-1}\left(\frac{1}{r(c_1)}\right)$ ile (3.1) denklemini sağlayan $z=\lambda y$ olacak şekilde $\lambda\in R$ vardır. Raundabout Teoreminin $(\text{ii})\Rightarrow(\text{i})$ gerektirmesinden $[c_1,c_2]$ üzerinde sıfırı olmaksızın (3.1) denkleminin hiç çözümü yoktur. Böylece [a,b]`de sıfırı olmayan (3.1) denkleminin çözümü olmaz. Raundabout Teoreminin söyleyebiliriz ki $x(a)=0, x'(a)=\phi^{-1}\left(\frac{1}{r(a)}\right)$ durumunu sağlayan x çözümü bir sıfıra sahiptir, ve böylece (3.1) [a,b]`de disconjugate değildir, bu çelişkidir.

4.2.3 Sturm Ayırma ve Karşılaştırma Teoremleri

Lineer denklemlerin lineer bağımsız çözümlerinin sıfırlarının iç içe geçmesi özelliği denklemlerin salınım/salınımsızlığının tanımları arasında en karakteristik özelliklerinden biridir. Aşağıdaki Sturm tipi ayırma Teoremi (3.1) denklemine genişletileceğini iddia eder. İspat Riccati dönüşümüne dayalıdır.

Teorem 4.2.5 (Sturm Ayırma Teoremi): (3.1) denkleminin aşikâr olmayan bir x çözümünün ardışık iki sıfırı $t_1<t_2$ olsun. Bu takdirde denklemin herhangi bir x`den lineer bağımsız çözümü (t_1,t_2) üzerinde kesinlikle bir sıfıra sahiptir.

İspat: $w=\frac{r\phi(x')}{\phi(x)}$ olsun, bu takdirde w, (4.1) denkleminin (t_1,t_2) üzerinde tanımlı bir çözümüdür ve $w(t_1+)=\infty,\ w(t_2-)=-\infty$ sağlanır. Farz edelim ki (3.1) denkleminin bir $\tilde{x}$ çözümü; x ile lineer bağımsız ve (t_1,t_2)`de sıfırı olmayacak şekilde var olsun. $\tilde{w}=r\phi\left(\frac{\tilde{x}'}{\tilde{x}}\right)$ olsun. Şekil 4.2'ye bakınız. $\tilde{x}(t_1)\neq 0,\ \tilde{x}(t_2)\neq 0$ (diğer durumda $\tilde{x}$,x'in bir katı olabilir) olduğundan, $\tilde{w}(t_1)<\infty, \tilde{w}(t_2)>-\infty$ olur. Buradan $\tilde{w}$'nin grafiği (t_1,t_2)`de bazı noktalarda w'nin grafiğini kesmek zorundadır, fakat bu (4.1)`in tek çözülebilirliğinden çelişir $(c+(p-1)r^{1-q}|w|^q$ fonksiyonunun w`ye göre Lipschitzian olmasından görülür).



Şekil 4.2. Riccati tekniğine dayalı ayırma teoremi

Teorem 4.2.5'e göre, (3.1) denkleminin bir çözümü salınımlıdır ancak ve ancak (3.1) denkleminin herhangi bir diğer çözümü salınımlı ise. (3.1) denkleminin (aşikâr olmayan) bir çözümünün salınımlılığının anlamı bu çözümün sıfırlarının dizisi ∞'a yaklaştığı anlamındadır. Dikkat etmeliyiz ki lineer durumla benzer olarak, eğer r,c sürekli fonksiyonlar ve bir $[T,\infty)$ aralığında r(t)>0 ise, (3.1) denklemi ile ilgili başlangıç değer probleminin tek çözülebilirliğine göre, (3.1) denkleminin herhangi bir aşikâr olmayan çözümünün sıfırlarının dizisi sonlu yığılma noktasına sahip olamaz.

(3.1) denklemi ile aynı formda başka bir

$$\left(R(t)\phi(y')\right)' + C(t)\phi(y) = 0 \qquad (4.7)$$

denklemini göz önüne alalım. R,C ; (3.1) denkleminde sıra ile r,c gibi aynı şartları sağlar.

Teorem 4.2.6 (Sturm Karşılaştırma Teoremi): $\left(r(t)\phi(x')\right)' + c(t)\phi(x) = 0$ denkleminin bir çözümü x ve

$\left(R(t)\phi(y')\right)' + C(t)\phi(y) = 0$

denkleminin de bir çözümü $\tilde{x}$ olsun. Kabul edelim ki $t \in [t_1, t_2]$ için $C(t) \geq c(t)$, $r(t) \geq R(t) > 0$ olsun. $t_1 < t_2$ `ler x`in ardışık iki sıfırı ise bu durumda (t_1, t_2) aralığında $\tilde{x}$ `in en az bir sıfırı vardır.

Tanım 4.2.7 Eğer $C(t) \geq c(t), r(t) \geq R(t) > 0$ şartı verilen bir I aralığında sağlanırsa, (4.7) denklemine I üzerinde (3.1) denkleminin Majorant denklemi (veya Sturm Majorantı) denir ve (3.1) I üzerinde (4.7) denkleminin Minorant denklemi (veya Sturm Minorantı) denir.

Lemma 4.2.8 (3.1)'in aşikâr olmayan ve lineer bağımsız iki x ve y çözümü ortak bir sıfıra sahip olamazlar.

İspat: Tersine olarak kabul edelim ki x ve y, $x(t_0) = 0 = y(t_0)$ ile lineer bağımsız çözümlerdir. Bu takdirde $x'(t_0) = A \neq 0$ ve $y'(t_0) = B \neq 0$ dir. $z(t_0) = 0, z(t_0) = 1$ sağlayan (3.1)'in z çözümünü göz önüne alalım. Az ve Bz homojenlik özelliğinden dolayı $Az(t_0) = 0 = Bz(t_0), Az'(t_0) = A, Bz'(t_0) = B$ sağlayan (3.1)'in çözümleridir. Teklikten dolayı $x = (A/B)y$ gerektiren $x = Az$ ve $y = Bz$ sahip oluruz. Sonuç olarak, x ve y orantılıdır, bu çelişkidir.

4.2.3 Çeşitli Aralık Tipleri Üzerinde Disconjugate

Disconjugate kavramını genel I aralığında I kapalı, açık veya yarı açık olmasına bakmaksızın genişleteceğiz.
Bununla beraber, I aralığının değişimi bazı özellikleri etkileyebileceğini göstereceğiz; özellikle , (3.1) denkleminin bir çözümünün varlığı sıfırları olmaksızın I`nın genel durumunun disconjugate için gerekli olmadığını söyleyeceğiz.

Teorem 4.2.9 (3.1) Denklemi eğer I üzerinde sıfırları olmayan bir çözüme sahipse I üzerinde disconjugatedir. Bu şart bir açık veya bir kompakt aralık içinde geçerlidir.

Teorem 4.2.10 (3.1) Denklemi eğer (a, b) iç bölgesi üzerinde disconjugate ise $I = [a, b)$ yarı açık aralık üzerine disconjugatedir.

Teorem 4.2.11 **A**şağıdaki durumlar denktir.

(i) (3.1) Denklemi (a,b) aralığı üzerinde disconjugatedir.

(ii) (3.1) Denkleminin (a,b)'de sıfırı olmayan bir çözümü vardır.

(iii) (a,b) tam aralığı üzerinde tanımlı (4.1) Genelleştirilmiş Riccati Denkleminin bir w çözümü vardır.

(iv) F(y;a,b) enerji fonksiyoneli her $y \in w_0^{1,p}(a,b)$ için nonnegatiftir.

4.2.4 Bağımsız Değişken Dönüşümü

Yeni $s = \varphi(t)$ bağımsız değişkeni ve $y(s) = x(t)$ yeni fonksiyonu ele alalım burada φ bazı I aralığında $\varphi'(t) \neq 0$ olacak şekilde bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda (3.1) denklemini göz önüne alalım. Sonra $\frac{d}{dt} = \varphi'(t)\frac{d}{ds}$ ve buradan bu dönüşüm aynı formun denklemi içindeki (3.1) denklemi

$$\frac{d}{ds}\left[r(t)\phi(\varphi'(t))\phi\left(\frac{d}{ds}y\right)\right] + \frac{c(t)}{\varphi'(t)}\phi(y) = 0 \quad , \quad t = \varphi^{-1}(s) \tag{4.8}$$

dönüştürür, φ^{-1} , φ'nin ters fonksiyonudur. Özellikle, eğer

$$\varphi(t) = \int_T^t r^{1-q}(\tau)\,d\tau \quad , \quad T \in I \tag{4.9}$$

ise (3.1) denklemi $r(t) \equiv 1$ ile $\left(\phi(x')\right)' + (p-1)\phi(x) = 0$ denklemine dönüşür.

Tersine olarak eğer $\int^{\infty} r^{1-q}(t)\,dt = \infty$ ise, (4.7) dönüşümü $(T,\infty]$ sınırsız aralığını $(0,\infty]$ aralığına dönüştürür ki o $[T,\infty)$`daki formla aynıdır. Eğer $\int^{\infty} r^{1-q}(t)\,dt < \infty$ ise $[T,\infty)$ aralığı $[0,b)$ sınırlı aralığı içine dönüştürülür, $b = \int_T^{\infty} r^{1-q}(t)\,dt$ `dir.

4.3 Daha Genel Riccati Dönüşümü

$$R[w] = w' + c(t) + (p-1)r^{1-q}(t)|w|^q \tag{4.10}$$

Riccati operatörünü göz önüne alalım.
Bazen daha genel bir Riccati dönüşümü kullanmak daha uygundur.

$$v(t) = \frac{f(t)r(t)\phi(x'(t))}{\phi(x(t))} \ ,$$

buradan f diferensiyellenebilir bir fonksiyondur. Direkt bir hesaplamadan görülebilir ki v birinci mertebeden Riccati tipi

$$v' - \frac{f'(t)}{f(t)}v + f(t)c(t) + (p-1)r^{1-q}(t)f^{1-q}(t)|v|^q = 0 \tag{4.11}$$

denklemini sağlar.

Başka bir genelleştirme biraz daha genel bir yarı lineer denklem göz önüne alarak

$$(r(t)\phi(x'))' + b(t)\phi(x') + c(t)\phi(x) = 0 \tag{4.12}$$

üzerine kurulabilir. $w = r\dfrac{\phi(x')}{\phi(x)}$ Riccati dönüşümü ile denklem

$$w' + c(t) + \frac{b(t)}{r(t)}w(p-1)r^{1-q}(t)|w|^q = 0 \tag{4.13}$$

denklemine dönüşür. Bu denklemi $e^{\left\{\int^t \frac{b(s)}{r(s)}ds\right\}} = g(t)$ ile çarparak ve $v = g.w$ dersek, (4.13) denklemi (4.1) gibi aynı formda yazılabilir, yani,

$$v' + c(t)g(t) + (p-1)r^{1-q}(t)g^{1-q}(t)|v|^q = 0\,.$$

dir. Aynı etki eğer (4.12) orijinal denklemi g ile çarparsak bu denklem tekrar (3.1) formunda yazılabilir.

4.3.1 Ricatti Eşitsizliği

Raundabout Teoreminden biliyoruz ki (3.1)'in salınımsızlığı bir sonsuz komşuluğunda (4.1) genelleştirilmiş Riccati denkleminin çözülebilirliğine denktir. Sturm karşılaştırma Teoreminden dolayı, (3.1)'in salınımsızlığı aslında genelleştirilmiş Riccati eşitsizliğinin çözülebilirliğine denktir. İspatında göstereceğiz ki $y \neq 0$ şartıyla $yL[y] = |y|^p R\left[r\phi\left(\frac{y'}{y} \right) \right]$ dir. Hatırlayalım ki L operatörü Teorem 4.2.1'de ve R operatörü (4.1) ile tanımlandı.

Teorem 4.3.1 Aşağıdaki durumlar denktir:

(vi) (3.1) denklemi salınımsızdır.

(vii) $a \in R$ ve $w:[a,\infty) \to R$ bir (sürekli türevlenebilir) fonksiyon

$$R[w](t) = 0 \text{ her } t \in [a,\infty)$$

olacak şekilde vardır.

(viii) $a \in R, A \in R$ bir sabit $w:[a,\infty) \to R$ bir (sürekli) fonksiyon $t \in [a,\infty)$ için

$$w(t) = A - \int_a^t \{c + S[w,r]\}(s)\, ds$$

olacak şekilde vardır. Burada $S[w,r] = r^{1-q} \cdot |w|^q \cdot (p-1)$ `dir.

(ix) $a \in R$ ve $w:[a,\infty) \to R$ bir (sürekli türevlenebilir) fonksiyon $t \in [a,\infty)$ için

$$R[w](t) \leq 0 \qquad (4.14)$$

olacak şekilde vardır.

(x) $a \in R$ ve $y:[a,\infty) \to R$ bir pozitif fonksiyon ($r\Phi(y')$ ile sürekli türevlenebilir) $t \in [a,\infty)$ için

$$L[y](t) \le 0 \tag{4.15}$$

olacak şekilde vardır.

İspat: $(\mathrm{i}) \Rightarrow (\mathrm{ii})$**:** Bu gerektirme Teorem 4.2.2 Raundabout Teoreminden gelir, (3.1)'in salınımsızlığından (3.1) $[a,\infty)$ üzerinde disconjugate olacak şekilde $a \in R$'nın varlığını gerektirir.

$(\mathrm{ii}) \Rightarrow (\mathrm{iii})$: aşikâr,

$(\mathrm{iii}) \Rightarrow (\mathrm{iv})$: aşikâr,

$(\mathrm{iv}) \Rightarrow (\mathrm{v})$: $[a,\infty)$ üzerinde w $R[w](t) \le 0$ sağlasın.

$$y = e^{\left\{\int_a^t \phi^{-1}\left(\frac{w(s)}{r(s)}\right)ds\right\}}$$

fonksiyonu $y' = \phi^{-1}\left(\dfrac{w(t)}{r(t)}\right)y$, $y(a)=1$ başlangıç değer probleminin pozitif bir çözümüdür.

$$\begin{aligned} yL[y] &= y(r\phi(y'))' + yc\phi(y) - (p-1)r|y'|^p + (p-1)r|y'|^p \\ &= |y|^p \frac{(r\phi(y'))'\phi(y) - (p-1)r\phi(y')|y|^{p-2}y'}{\phi(y)\phi(y)} + |y|^p c + |y|^p (p-1) r^{1-q}\left(\frac{r|y'|^{p-1}}{|y|^{p-1}}\right)^q \\ &= |y|^p R[w] \le 0 \end{aligned}$$

buradan (v) sağlanır.

$(\mathrm{v}) \Rightarrow (\mathrm{i})$: Farz edelim ki bir y fonksiyonu (4.15)'i $[a,\infty)$ üzerinde sağlasın.

$$\varphi(t) = -\{yL[y]\}(t)$$

bu aralık üzerinde negatif olmayan bir fonksiyondur. $\bar{c}(t)=c(t)-\varphi(t)/|y|^p$ olarak belirleyelim. $\bar{c}\geq c$ ve

$$\left(r(t)\phi(y')\right)'+\bar{c}(t)\phi(y)=\left(r(t)\phi(y')\right)'+\left(c(t)-\frac{\varphi(t)}{|y|^p}\right)\Phi(y)=0$$

dir.

Böylece $\left(r(t)\phi(y')\right)'+\bar{c}(t)\phi(y)=0$ $[a,\infty)$ üzerinde disconjugatedir. Bu yüzden (3.1) $[a,\infty)$ üzerinde disconjugatedir ve Sturm Karşılaştırma Teoreminden (Teorem 4.2.6) salınımsızdır.

Uyarı 4.3.2 $(\mathrm{iv})\Rightarrow(\mathrm{i})$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Gerçekten w, $R[w](t)\leq 0$'ın bir çözümü olsun. $C(t):=-w'-(p-1)r^{1-q}(t)|w|^q$ olarak alalım. w, $w'+C(t)+(p-1)r^{1-q}(t)|w|^q=0$'ın bir çözümüdür ve bu (3.1)'in bir Sturm Majorantı olmakla beraber Riccati denklemidir. ($C(t)\geq c(t)$ olduğundan). Bu majorant denklem salınımsızdır ve buradan (3.1) denklemi de salınımsızdır.

Teorem 4.3.3 Kabul edelim ki $a\in R$, $A\in R$ bir sabit $w:[a,\infty)\to R$ bir (sürekli) fonksiyonu $t\in[a,\infty)$ için

ya

$$w(t)\geq A-\int_a^t\{c+S[w,r]\}(s)\,ds\geq 0$$

ya da

$$w(t)\leq A-\int_a^t\{c+S[w,r]\}(s)\,ds\leq 0$$

olacak şekilde vardır, $S[w,r]=(p-1)\cdot r^{1-q}\cdot|w|^q$ `dir. Teorem 4.3.1 Teoremindeki (i)-(v) sağlanır. Eğer, ek olarak $\int_a^\infty c(t)\,dt=\infty$ ise yukarıdaki şart (i)-(iv) için gereklidir.

4.4 Salınımlılık Kriterleri

Teorem 4.4.1 (Leighton-Wintner Salınımlılık Kriteri):

(3.1) denklemi

$$\int^{\infty} r^{1-q}(t)\,dt = \infty \qquad \text{ve} \qquad \int^{\infty} c(t)\,dt = \lim_{b\to\infty}\int^{b} c(t)\,dt = \infty \tag{4.16}$$

şartıyla salınımlıdır.

İspat: (3.1)'in salınımlılık tanımına göre, göstermemiz gerekir ki $[T,\infty)$ formunun herhangi bir aralığı üzerine bu denklem disconjugate değildir.
Farz edelim ki, tersine olarak, (4.16) sağlansın ve (3.1) salınımsız olsun. Bu takdirde $T \in R$ var ve $[T,\infty)$ aralığının bütününde tanımlı (4.1) denkleminin bir w çözümü vardır. (4.1)`i integre ederek

$$w(t) = w(T) - \int_T^t c(s)\,ds - (p-1)\int_T^t r^{1-q}(s)\left|w(s)\right|^q ds$$

elde ederiz. (4.16)'da ikinci şart $t > T_1$ için $w(T) - \int_T^t c(s)\,ds \le 0$ sahip olacak şekilde $T_1 > T$ 'nin varlığını gerektirir ve buradan $t > T_1$ için

$$w(t) \le -(p-1)\int_T^t r^{1-q}(s)\left|w(s)\right|^q ds$$

dir.

$G(t) = \int_T^t r^{1-q}(s)\left|w(s)\right|^q ds$ dersek, bu takdirde $|w| = \left[G' r^{q-1}\right]^{1/q}$ ve son eşitsizlik

$$\frac{G'(t)}{G^q(t)} \ge (p-1)^q r^{1-q}(t)$$

olur. T_1 'den t'ye bu eşitsizliği integre ederek

$$\frac{1}{q-1}G^{1-q}(T_1) > \frac{1}{q-1}\left[G^{1-q}(T_1) - G^{1-q}(t)\right] \geq (p-1)^q \int_{T_1}^{t} r^{1-q}(s)\,ds$$

elde edilir. $t \to \infty$ iken (4.16)'da ilk şart ile bir çelişki elde ederiz.

Teorem 4.4.2 (Yarı-Lineer Hartman-Wintner Teoremi):

Aşağıdaki Teorem klasik Hartman-Wintner Teoreminin bir yarı-lineer denklemine genişletmesidir ki o $r(t) \equiv 1$ ile (3.2) denklemine karşılık gelen $w' + c(t) + w^2 = 0$ Riccati denkleminin çözümlerinin karesel integrallenebilirliği ile ilgilidir.

Teorem 4.4.3 Kabul edelim ki

$$\int^{\infty} r^{1-q}(t)\,dt = \infty \qquad (4.17)$$

olsun ve (3.1) denklemi salınımsızdır. Bu takdirde aşağıdaki durumlar denktir.

(i) (4.1) Riccati denkleminin her w çözümü için

$$\int^{\infty} r^{1-q}(t)\left|w(t)\right|^q dt < \infty \qquad (4.18)$$

sağlanır.

(ii) Bir sonlu

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int^{t} r^{1-q}(s)\left(\int^{s} c(\tau)\,d\tau\right)ds}{\int^{t} r^{1-q}(s)\,ds} \tag{4.19}$$

limiti vardır.

(iii) Alt limit için

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\int^{t} r^{1-q}(s)\left(\int^{s} c(\tau)\,d\tau\right)ds}{\int^{t} r^{1-q}(s)\,ds} > -\infty \tag{4.20}$$

elde edilir.

Hartman-Wintner Teoremine göre, (3.1)'in salınımsızlığı, genelleştirilmiş integraller içeren Riccati integral denklemlerinin çözülebilirliğinin şartları ile ifade edilebilir.

Teorem 4.4.4 Farz edelim ki (4.17) sağlansın ve $\int^{\infty} c(t)\,dt$ integrali yakınsak olsun. (3.1) denklemi salınımsızdır ancak ve ancak $a\in R$ olmak üzere $t\ge a$ için

$$w(t)=\int_{t}^{\infty} c(s)\,ds+(p-1)\int_{t}^{\infty} r^{1-q}(s)\left|w(s)\right|^{q}\,ds \tag{4.21}$$

Riccati denklemini sağlayan $w:[a,\infty)\to R$ bir (sürekli) fonksiyon varsa.

Teorem 4.4.5 Farz edelim ki $\int^{\infty} c(t)dt$ integrali yakınsak olsun ve (4.17) sağlansın. Bu takdirde $a\in R$ olmak üzere
ya

$$w(t)\ge\int_{t}^{\infty} c(s)\,ds+(p-1)\int_{t}^{\infty} r^{1-q}(s)\left|w(s)\right|^{q}\,ds\ge 0 \tag{4.22}$$

ya da

$$w(t) \le \int_t^\infty c(s)\,ds + (p-1)\int_t^\infty r^{1-q}(s)\left|w(s)\right|^q ds \le 0 \qquad (4.23)$$

eşitsizliklerini sağlayan $w:[a,\infty)\to R$ bir (sürekli) fonksiyon varsa ancak ve ancak (3.1) denklemi salınımsızdır.

Uyarı 4.4.6 Eğer (4.22) ve (4.23) `ü

$$\left|w(t)\right| \ge \left|\int_t^\infty c(s)\,ds + (p-1)\int_t^\infty r^{1-q}(s)\left|w(s)\right|^q ds\right| \qquad (4.24)$$

şartıyla yer değiştirirsek Teorem 1.8.5 geçerlidir. Gerçekten eğer $v(t)=\int_t^\infty \{c+S[w,r]\}(s)\,ds$ ise, bu takdirde $|v|\le|w|$ ve $v'+c(t)+S[w,r](t)=0$ `dır ve böylece $R[v](t)\le 0$ elde ederiz. Teorem 4.4.4'ü de göz önüne alarak, Aşağıdaki durumlar denk olduğunu söyleriz.

(i) (3.1) Denklemi salınımsızdır.
(ii) (4.21) Denklemi sonsuzun bir komşuluğunda çözülebilirdir.
(iii) (4.24) Eşitsizliği sonsuzun bir komşuluğunda çözülebilirdir.

Teorem 4.4.7 Farz edelim ki $a\in R$, $A\in R$ bir sabit ve $t\in[a,\infty)$ için $w:[a,\infty)\to R$ fonksiyonu
ya

$$w(t) \ge A - \int_a^t c(s)\,ds + \int_t^\infty S[w,r](s)\,ds \ge 0$$

ya da

$$w(t) \le A - \int_a^t c(s)\,ds + \int_t^\infty S[w,r](s)\,ds \le 0$$

sağacak şekilde varsa bu takdirde (3.1) denklemi salınımsızdır. Eğer, ek olarak (4.17) ve (4.20) sağlanırsa, bu takdirde yukarıdaki şart (3.1) denkleminin salınımsızlığı için gereklidir.

Teorem 4.4.8 (Leighton Salınımlılık Kriteri):

(3.1) diferensiyel denklemi $0 < t < \infty$ aralığında r, r' ve c sürekli fonksiyonlar ve bu aralıkta $r(t) > 0$ şartları altında verilsin.

$$r_{\infty} = \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{ds}{a(s)} \qquad , \qquad c_{\infty} = \lim_{t \to \infty} \int_1^t c(s)\, ds$$

Olarak tanımlansın. Eğer $r_{\infty} = c_{\infty} = \infty$ ise (3.1) denklemi $(1, \infty)$ aralığında salınımlıdır.

KAYNAKLAR

1. Došlý, O., Řehák, P., Half-Linear Differential Equations, North Holland Mathematics Studies 2002., Elsevier, Amsterdam, 2005.

2. Hartman, P., Ordinary Differential Equations, Wiley, New York, 1964.

3. Humi, M., Miller, W., Second Cource in Ordinary Differential Equations for Scientists and Engineers, Springer-Verlag, New York, 1988

4. Rio, R.M., Ordinary Differential Equations, Edward Arnold Limited, London, 1980.

5. Natanson, I.P., Theory of Functions of a Real Variable, F. Ungar, New York, 1955.

6. Swanson, C.A., Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equation, Academic Pres, New York and London, 1968.

7. Kitano, M., Kusono, On a Class of Second Order Quasilinear Ordinary Differential Equations, Hiroshima Math. J. 25 (1995), 321-355

8. Došlý, O., Half –linear differential equations, in: Handbook of Differential Equations: Ordinary Differential Equations I (eds. A. Cañada, P. Drábek and A. Fonda), Elsevier, 161-357, Amsterdam, 2004.

9. Elbert, Á., A half-linear second order differential equation, in: Qualitative Theory of differential Equations I (ed. M. Farkas), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 30, North-Holland, 153-180, Amsterdam and New York, 1981.

10. Mirzov, J.D., On some analogs of Sturm`s and Kneser`s theorems for nonlinear systems, J. Math. Anal. Appl. 53, 418-425, 1976

11. Kwong, M.K., Wong, J.S.W., Oscillation and nonoscillation of Hill's equations with periodic damping, J. Math. Anal. Appl. , 288, 15-19, 2003.

12. Došlý, O., Elbert, Á., Conjugasy of half-linear second-order differential equations, Proc. Roy. Soc. Edin. Sect. A 130, 517-525, 2000.

13. Agarwal, R.P., Grace, S.R., O'regan, D., Oscillation Theory for Second Order Linear, Half-Linear, Superlinear and Sublinear Dynamic Equations, Kluwer, Dordrecht, Boston and London, 2002.

14. Elbert, Á., Schneider, A., Perturbations of the half-linear Euler differential equation, Results Math. , 37, 56-63, 2000.

15. Kwong, M.K., On certain Riccati integral equations and second-order linear oscillation, J. Math. Anal. Appl. 85, 315-330, 1982.

16. Cecchi, M., Došlá, Z., Marini, M., Half-linear equations and characteristic properties of the principal solution, J. Differ. Eq., 208, 494-507, 2005; J. Differ. Eq., 221, 272-274, 2006

17. Coppel, W.A., Disconjugacy, Lecture Notes in Math. 220, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

18. Došlý, O., Pátíková, Hille-Wintner type comparison criteria for half-linear second order differential equations, Arch. Math. (Brno), 42, 185-194, 2006.

19. Hille, E., Non-oscillation theorems, Tran. Amer. Math. Soc., 64, 234-252, 1948.

20. Jaroš, J., Kusano, T., Tanigawa, T., Nonoscillatory half-linear differential equations and generalized Karamata functions, Nonlinear Anal., 64, 762-787, 2006.

21. Kwong, M.K., Wong, J.S.W., On the oscillation of Hill`s equations under periodic forcing, J. Math. Anal. Appl., 330, 37-55, 2006.

ÖZGEÇMİŞ

Esra AKTAŞ, 1983 yılında Kayseri'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kayseri'de tamamladı. 2001 yılında Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliğine girdi. 2005 yılında mezun olduktan sonra aynı yıl Milli Eğitim Bakanlığında öğretmen olarak göreve başladı. 2006 yılında yüksek lisans sınavına girerek Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tahsiline devam etti. Halen Sivas ili Şarkışla ilçesinde Şarkışla Mesleki Eğitim Merkezi`nde görev yapmaktadır.

İletişim Adresi

Adres : Mimarsinan Mah. Tarsus Cad. Gökşin Apt. 36/6
Kocasinan/KAYSERİ

e-mail : esraktas@hotmail.com

Tel : 0 506 898 04 19