T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KATEGORİK GRUPLARIN ÖRTÜLERİ ÜZERİNE

Tezi Hazırlayan
Tunçar ŞAHAN

Tezi Yöneten
Prof. Dr. Osman MUCUK

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Temmuz 2010
KAYSERİ

Prof. Dr. Osman MUCUK danışmanlığında **Tunçar ŞAHAN** tarafından hazırlanan **"Kategorik Grupların Örtüleri Üzerine"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

23/07/2010

JÜRİ :

Başkan : Prof. Dr. Mehmet ÖZDEMİR

Üye : Prof. Dr. Osman MUCUK

Üye : Prof. Dr. Mehmet BARAN

ONAY :

Bu tezin kabülü Enstitü Yönetim Kurulunun 30.07.2010 tarih ve 2010/26-06 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

30 / 07 / 2010

Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

“Kategorik Grupların Örtüleri Üzerine” konulu tez çalışmasının seçiminde, yürütülmesinde, sonuçlandırılmasında ve sonuçlarının değerlendirilmesinde her türlü destek ve yardımlarını esirgemeyen, engin bilgisi ile beni yönlendiren değerli hocam sayın Prof.Dr. Osman MUCUK’a teşekkür ederim.

Yapılan çalışmalarda her türlü yardımı yapan, zaman harcayan, emek veren, tecrübesini paylaşan hocam sayın Yrd.Doç.Dr. Nazmiye ALEMDAR’a teşekkür ederim.

Tüm hayatım boyunca bana verdikleri manevi destek, göstermiş oldukları sabır ve anlayıştan dolayı aileme teşekkür ederim.

Göreve başladığım ilk günden beri beni hiç yalnız bırakmayan abim Arş. Gör. Dr. Halis BİLGİL’e çok teşekkür ederim.

Tezimi daha kolay, daha düzenli ve daha hızlı yazmama olanak sağlayan, tezimi yazarken kullandığım LaTeX programında karşılaştığım problemlerde benden yardımlarını esirgemeyen sayın Arş.Gör. Mustafa YILDIRIM’a teşekkür ederim.

KATEGORİK GRUPLARIN ÖRTÜLERİ ÜZERİNE

Tunçar ŞAHAN
Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Temmuz 2010
Tez Danışman : Prof. Dr. Osman MUCUK

ÖZET

Grupoid örtü morfizmleri grupoidlerin uygulamalarında önemli bir yere sahiptir. Bunların en önemli özelliklerinden biri bazı cebirsel yapılarla ve örtü uzayları ile uyumlu olmasıdır.

Örtü uzayları teorisinden bilindiği üzere eğrisel irtibatlı bir topolojik grubun grup yapısı basit irtibatlı bir örtü uzayına yükselir. Buna paralel olarak groupoid örtü morfizmleri ile ilgili olarak irtibatlı bir grup-grupoidin grup yapısı evrensel örtü grupoidine yükselir, yani $\widetilde{\mathbb{G}}$ basit irtibatlı bir grupoid, $\mathbb{G}$ irtibatlı bir grup-grupoid, $e \in \mathbb{G}_0$ birim eleman ve $p : (\widetilde{\mathbb{G}}, \widetilde{e}) \to (\mathbb{G}, e)$ bir grupoid örtü morfizmi ise $\widetilde{\mathbb{G}}$ grupoidi, $\widetilde{e}$ birim eleman ve p bir grup-grupoid morfizmi olacak şekilde bir grup-groupoid olur. Bu tür yükseltme problemleri grup-grupoidden daha genel olan iç kategoriler için bazı çalışmalarda ele alınmıştır.

Diğer yandan literatürde, sürekli fonksiyonların homotopisine benzer olarak fanktorların homotopisi tanımlanmıştır. Bu kavram fanktorların doğal izomorf olmasına denk olup homotopi teorisindeki bazı sonuçların fanktorların homotopisi cinsinden verilmesine imkan sağlamaktadır. Bu tezde öncelikle fanktorların homotopisi ele alınmış ve bu kavram ile ilgili bazı temel özellikler incelenmiştir. İkinci olarak monoidal kategori ve kategorik grup kavramları tanıtılmış ve kategorik grup ve H-Grup-Grupoid yapıları arasındaki benzerlikler araştırılmıştır.

Son olarak, Grup-Grupoidlerin, H-grup-grupoidlerin ve Kategorik Grupların örtü grupoidlerine yükselmeleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Örtü Grupoidi; Grup-Grupoid; Monoidal Kategori; Kategorik Grup.

ON THE COVERINGS OF CATEGORICAL GROUPS

Tunçar ŞAHAN
Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M.Sc. Thesis, July 2009
Thesis Supervisor: Prof. Dr. Osman MUCUK

ABSTRACT

Covering morphisms of groupoids have an important role in the applications of groupoids. One of the most important property of these morphisms is that they are compatible with some algebraic structures and covering spaces.

It is well known from the theory of covering spaces that the group structure of a path connected topological group lifts to its simply-connected covering space. Also the group structure of a group-groupoid whose underlying groupoid is connected lifts to its universal cover, i.e., if $\widetilde{\mathbb{G}}$ is a simply-connected groupoid, $\mathbb{G}$ a connected group-groupoid, $e \in G_0$ identity object and $p:(\widetilde{\mathbb{G}},\widetilde{e}) \to (\mathbb{G},e)$ a covering morphism of groupoids, then $\widetilde{\mathbb{G}}$ becomes a group-groupoid such that $\widetilde{e} \in \widetilde{G}_0$ is the identity object and p is a morphism of group-groupoids. These kind of lifting problems were considered in some studies for internal categories which are more general than group-groupoids.

On the other hand, in literature, homotopy of functors is defined in a sense as similar to the homotopy of continuous functions. This notion is equivalent to the natural isomorphism and enables to give some certain results for homotopies of functors.

In this thesis primarily homotopies of functors and relations between these homotopies and natural isomorphisms were investigated and some basic properties of these kind of homotopies have been studied. Secondly, monoidal category and categorical group notions were introduced and similarities between the structure of categorical groups and the structure of H-Group-Groupoids were mentioned.

Finally, the liftings of group-groupoids, H-Group-Groupoids and categorical groups to their covering groupoids were studied.

Keywords: Covering Groupoid; Group-Groupoid; Monoidal Category; Categorical Group.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY i

TEŞEKKÜR ii

ÖZET iii

ABSTRACT iv

1. BÖLÜM

GİRİŞ 1

2. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER 4

2.1. Temel Kavramlar 4

2.2. Temel Grup 6

2.3. Örtü Uzayları 11

2.4. Kategori 13

3. BÖLÜM

GRUPOİDLER VE ÖRTÜ GRUPOİDLERİ 25

3.1. Grupoid 25

3.2. Örtü Grupoidleri 29

4. BÖLÜM

BAZI CEBİRSEL YAPILARIN ÖRTÜ GRUPOİDLERİNE YÜKSELMELERİ 37

4.1. H-Grup-Grupoid Yükselmesi 37

4.2. Grup-Grupoid Yükselmesi 41

5. BÖLÜM

KATEGORİK GRUPLARIN ÖRTÜLERİ VE YÜKSELMELERİ 46

5.1. Fanktorların Homotopisi 46

5.2. Kategorik Gruplar 55

5.3. Kategorik Grupların Örtü Grupoidleri 67

KAYNAKLAR 69

ÖZGEÇMİŞ 72

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Kategori teorisi, tarihçesi çok eski olmamakla birlikte matematiğin bir çok sahasında önemli kullanım alanları bulmuştur. Her morfizmi bir izomorfizm olan özel bir kategoriye bir grupoid denir. Her grup tek objeli bir grupoid olarak düşünülebildiğinden, grupoid, gruptan daha genel bir kavramdır. Objeleri ve morfizmleri aynı kategorinin objeleri ve kategori yapısındaki dönüşümler ise bu kategorideki morfizmler olan iç kategoriler tanımlanabilir. Örneğin grupların kategorisindeki bir iç kategori grupoidlerin kategorisindeki bir grup objesi olup grup-grupoid olarak adlandırılır.

Topolojinin temel problemlerinden biri verilen iki topolojik uzayın homeomorf olup olmadığının belirlenmesidir. Homeomorf olmadıklarını göstermek için birinde olup diğerinde olmayan bir topolojik özellik bulmak yeterlidir. Bu topolojik özellikler kompaktlık, irtibatlılık, yerel irtibatlılık, metriklenebilme gibi özellikler olabilir. Fakat bu özellikler, örneğin, $\mathbb{R}^3$ ile $\mathbb{R}^2$ uzaylarının veya S^2 birim küresi, T torusu ve T#T çift torus uzaylarının homeomorf olmadıklarını göstermeye yetmez. Bunun için yeni topolojik özellikler tanımlanması gerekir. Bunlardan biri basit irtibatlılık kavramıdır. Basit irtibatlılık kavramı ile $\mathbb{R}^3$ ile $\mathbb{R}^2$ uzaylarının ve S^2 birim küresi ile T torusunun homemorf olmadıkları gösterilebilir. Fakat T torusu ve T#T çift torusu basit irtibatlı olmadığından burada yeni bir özelliğe daha gerek duyulur. Bunun için Kesim 2.2 de açıklanan temel grup kavramı kullanılır. Bu sayede bazı topolojik problemler çözülmesi daha basit cebirsel problemlere dönüşür. Benzer şekilde örtü grupları ve temel gruptan daha genel bir kavram olan temel grupoid kavramı da bu şekildeki problemlerin çözülmesine yardımcı olur.

Bu tezde Bölüm 2 de örtü uzayları ve kategori teorisinde yer alan ve tezin okunmasında kolaylık sağlayacak bazı temel kavramlar tanıtılmıştır. Daha sonra Bölüm 3 de grupoid tanımı [9] referansındaki gibi verilerek grupoidlerle ilgili bazı özellikler verilmiş ve örtü grupoidleri ile ilgili [10], [2] referanslarındaki bazı temel kavram ve teoremlerden bahsedilmiştir.

Grupoidlerin kategorisindeki bir grup objeye grup-grupoid denir [12]. Örneğin bir X topolojik grubunun $\pi_1 X$ temel grupoidi bir grup-grupoiddir. Benzer olarak eğer X çok işlemli bir topolojik grup ise X in temel grupoidi $\pi_1 X$ aynı tür kategoride bir iç kategori dolayısıyla iç grupoiddir. [26]. Aynı tip çok işlemli grupların kategorisinde tanımlanan iç grupoidlerin kategorisi ile aynı tip çok işlemli gruplar için crossed modüllerin kategorisinin denk olduğu Porter [13] referansında gösterilmiştir. Burada özel olarak grupların kategorisindeki iç kategorilerin kategorisi ile grupların kategorisindeki crossed modüllerin kategorisinin denk olduğu sonucuna varılır. Bu ise daha önceleri [12] da verilmiştir. Alemdar ve Mucuk [17] referansında grup-grupoidin grup yapısının bazı şartlar altında örtü grupoidine yükselmesi şu şekilde verilmiştir: $\widetilde{\mathbb{G}}$ bir grupoid ve $\mathbb{G}$ ise grupoidi irtibatlı olan bir grup-grupoid olsun. $p\colon \widetilde{\mathbb{G}} \to \mathbb{G}$ bir grupoid örtü morfizmi olmak üzere $\theta \in \mathbb{G}_0$ birim eleman ve $\widetilde{\theta} \in \widetilde{\mathbb{G}}_0$ da $p(\widetilde{\theta}) = \theta$ olacak şekilde bir obje olsun. Eğer p nin karakteristik grubu $\mathbb{G}$ nin grup yapısı altında kapalı ise bu durumda $\mathbb{G}$ nin grup yapısı $\widetilde{\theta}$ birim eleman olacak şekilde $\widetilde{\mathbb{G}}$ ya yükselir.

Objelerinin sınıfı H-grup olan bir grupoid üzerinde fanktorların homotopisine göre bir grup yapısı varsa bu gupoide bir H-grup-grupoid denir [11]. Bölüm 4 de bir H-grup-grupoidin grup yapısının örtü grupoidine yükselmesi ve grup-grupoidin grup yapısının örtü grupoidine yükselmesi ayrıntılı olarak verilmiştir.

$\mathbb{M}$ bir kategori, $\otimes\colon \mathbb{M}\times\mathbb{M}\to\mathbb{M}$ bir fanktor $I\in M_0$ olmak üzere $\otimes(\otimes\times 1)\overset{\alpha}{\simeq}\otimes(1\times\otimes)$, $\otimes(e,1)\overset{\mathscr{L}}{\simeq} e \overset{\mathscr{R}}{\simeq}\otimes(1,e)$ doğal olarak izomorf ve her $A,B,C,D\in M_0$ için $\alpha_{(A\otimes B),C,D}\alpha_{A,B,(C\otimes D)} = (\alpha_{A,B,C}\otimes 1_D)\alpha_{A,(B\otimes C),D}(1_A\otimes\alpha_{B,C,D})$ ve $(\mathscr{R}_A\otimes 1_B)\alpha_{A,I,B} = 1_A\otimes\mathscr{L}_B$ ise $\mathbb{M} = (\mathbb{M},\otimes,I,\mathscr{L},\mathscr{R},\alpha)$ sistemine bir monoidal kategori denir. $\mathbb{G}$ bir monoidal grupoid olmak üzere eğer $\mathbb{G}$ nin her objesinin izomorfizme göre bir tersi varsa $\mathbb{G}$ ye bir kategorik grup denir [28].

Bölüm 5 de literatürde rastlanan fanktorların homotopileri tanımları incelenmiş,

bunlar aralarındaki geçişler belirlenmiş ve fanktorların örtü grupoidlerine yükselmeleri ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir. Fanktorların homotopisi ile doğal izomorfizm arasında ilişki kurulmuştur. Daha sonra monoidal kategori ve kategorik grup tanımları verilip bunların bazı özelliklerinden bahsedilmiş ve fanktorların homotopilerinden elde edilen sonuçlarla kategorik grupların grup yapısının örtü grupoidlerine yükselmeleri incelenmiştir. Bu araştırmanın kategorik grupların incelenmesinde yararlı olacağı düşünülmektedir.

2. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde, ileri bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar ile kategori, kategoriler arasındaki dönüşümler, kategorilerin denkliği, temel grup ve örtü uzayları gibi bazı kavramlar tanıtılacaktır.

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. X bir topolojik uzay, $x, y \in X$ ve $r \geq 0$ olmak üzere $a(0) = x$ ve $a(r) = y$ olacak şekilde sürekli bir $a : [0, r] \to X$ fonksiyonuna x den y ye r uzunluğunda bir *eğri* denir. Özel olarak $a : [0,1] \to X$ sürekli fonksiyonunda $a(0) = x$ ve $a(1) = y$ ise a ya x den y ye bir *birim eğri* denir. Eğer $a(0) = a(1)$ ise $a : [0,1] \to X$ ya *kapalı bir eğri* denir.

Tanım 2.1.2. Bir X topolojik uzayında her bir $x, y \in X$ nokta çifti için x den y ye bir eğri varsa bu X uzayına *eğrisel irtibatlıdır* denir.

Tanım 2.1.3. X bir topolojik uzay olsun. Her bir $x \in X$ ve x in her U komşuluğu için $x \in V \subseteq U$ olacak şekilde eğrisel irtibatlı olan bir V açık komşuluğu varsa X uzayına *yerel eğrisel irtibatlıdır* denir.

O halde bir X topolojik uzayı yerel eğrisel irtibatlıdır ancak ve ancak her bir $x \in X$ noktası eğrisel irtibatlı cümlelerin bir yerel bazına sahiptir.

Tanım 2.1.4. (G, μ, η, e) bir grup ve τ da G üzerinde bir topoloji olsun. $G \times G$ üzerindeki topoloji çarpım topolojisi olmak üzere, eğer grup yapısını oluşturan

$$\begin{array}{rccc} \mu: & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (a,b) & \longmapsto & ab \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccc} \eta: & G & \longrightarrow & G \\ & a & \longmapsto & a^{-1} \end{array}$$

fonksiyonları sürekli ise G ye bu topoloji ile birlikte bir *topolojik grup* denir.

Önerme 2.1.1. Bir G grubu üzerinde bir topoloji verilsin.

$$\begin{array}{rccc} \mu: & G\times G & \longrightarrow & G \\ & (a,b) & \longmapsto & ab \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccc} \eta: & G & \longrightarrow & G \\ & a & \longmapsto & a^{-1} \end{array}$$

fonksiyonları süreklidir ancak ve ancak fark fonksiyonu olarak adlandırılan

$$\begin{array}{rccc} \delta: & G\times G & \longrightarrow & G \\ & (a,b) & \longmapsto & ab^{-1} \end{array}$$

fonksiyonu süreklidir [1].

Tanım 2.1.5. G ve H birer topolojik grup olsun. Eğer $f: G \to H$ dönüşümü sürekli ve her $x, y \in G$ için $f(xy) = f(x)f(y)$ ise f ye *topolojik grupların bir morfizmi* denir.

Tanım 2.1.6. G ve H birer grup olsun. Eğer,

$$\begin{array}{ccc} H\times G & \longrightarrow & G \\ (h,g) & \longmapsto & h\bullet g \end{array}$$

kısmi işlemi aşağıdaki şartları sağlıyorsa H, G *üzerine (soldan) etkir* denir.

i. Her $g \in G$ ve $h, h_1 \in H$ için

$$h\bullet(h_1\bullet g) = (hh_1)\bullet g$$

ii. Her $g, g_1 \in G$ ve $h \in H$ için

$$h\bullet(g\,g_1) = (h\bullet g)(h\bullet g_1)$$

iii. Her $g \in G$ ve $e_H \in H$ birim elemanı için

$$e_H \bullet g = g$$

Tanım 2.1.7. A ve B iki grup ve $\partial: A \to B$ bir grup homomorfizmi olsun. B nin A üzerine (sol) etkimesi

$$\begin{array}{ccc} B\times A & \longrightarrow & A \\ (b,a) & \longmapsto & b\bullet a \end{array}$$

ile verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (∂, A, B) ye bir *crossed modül* denir.

i. Her $a \in A$ ve $b \in B$ için

$$\partial(b \bullet a) = b^{-1}\partial(a)b$$

ii. Her $a, a_1 \in A$ için

$$\partial(a) \bullet a_1 = a^{-1}a_1 a$$

Tanım 2.1.8. (∂, A, B) ve (∂', A', B') iki crossed modül ve $f_1 : A \to A'$, $f_2 : B \to B'$ iki grup homomorfizmi olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (f_1, f_2) ye bir *crossed modül morfizmi* denir.

i. $f_2\partial = \partial' f_1$

ii. Her $b \in B$ ve $a \in A$ için

$$f_1(b \bullet a) = f_2(b) \bullet' f_1(a)$$

2.2. Temel Grup

Bu kısımda basit irtibatlılıktan daha genel bir kavram olan temel grup kavramını inceleyeceğiz. Bunun için öncelikle homotopi kavramının verilmesi gerekir. Bir topolojik uzayda, birim uzunluğundaki eğrilerin bileşkesi birim uzunluğunda bir eğri olacak şekilde birleştirildiğinde birleşme özelliği sağlanmaz, yani ba ve cb birleşimleri tanımlı olacak şekildeki a, b, c eğrileri için genelde $(cb)a$ ve $c(ba)$ eğrileri eşit değildir. Bu sorunu ortadan kaldırmak için denklik sınıfları homotopi sınıfları olacak şekilde homotopi kavramı tanımlanır. Önce genel olarak fonksiyonlar için homotopi tanımını ve homotopi ile ilgili bazı kavram ve teoremleri verelim.

Tanım 2.2.1. X ve Y topolojik uzaylar ve $f, g : X \to Y$ sürekli fonksiyonlar olsunlar. Eğer her $x \in X$ için $F(x,0) = f(x)$ ve $F(x,1) = g(x)$ olacak şekilde sürekli bir $F : X \times I \to Y$ fonksiyonu varsa f ile g *homotopiktir* denir ve $F : f \simeq g$ ile veya kısaca $f \simeq g$ gösterilir. Bu homotopiye *serbest homotopi* denir [2].

X den Y ye tüm sürekli fonksiyonların cümlesinde fonksiyonların homotopik olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 2.2.2. (X,x_0) bir noktalı topolojik uzay olsun. $\mu: X\times X\to X$ sürekli noktalı dönüşüm ve $j_1: X\to X\times X, x\mapsto(x,x_0)$, $j_2: X\to X\times X, x\mapsto(x_0,x)$ ve $c: X\to X, x\mapsto x_0$ olmak üzere

$$\mu(1_X\times\mu)\simeq\mu(\mu\times 1_X)$$
$$\mu j_1\simeq 1_X\simeq\mu j_2$$

noktalı homotopileri varsa (X,x_0) noktalı uzayına bir *H-Monoid* denir.

Örnek 2.2.1. Bir G topolojik monoidi bir H-monoiddir.

Tanım 2.2.3. (X,x_0) bir noktalı topolojik uzay olsun. $\mu: X\times X\to X$, $\eta: X\to X$ sürekli noktalı dönüşümler ve $j_1: X\to X\times X, x\mapsto(x,x_0)$, $j_2: X\to X\times X, x\mapsto(x_0,x)$ ve $c: X\to X, x\mapsto x_0$ olmak üzere

$$\mu(1_X\times\mu)\simeq\mu(\mu\times 1_X)$$
$$\mu j_1\simeq 1_X\simeq\mu j_2$$
$$\mu(1_X,\eta)\simeq c\simeq\mu(\eta,1_X)$$

noktalı homotopileri varsa (X,x_0) noktalı uzayına bir *H-Grup* denir [2].

Örnek 2.2.2. Bir G topolojik grubu bir H-gruptur **??**.

Örnek 2.2.3. Bir (X,x_0) topolojik uzayının loop uzayı $\Omega(X,x_0)=(X,x_0)^{(I,\{0,1\})}$ bir H-gruptur.

Teorem 2.2.1. X,Y ve Z topolojik uzaylar, $f_0,f_1: X\to Y$ ve $g_0,g_1: Y\to Z$ sürekli fonksiyonlar olsunlar. Eğer $f_0\simeq f_1$ ve $g_0\simeq g_1$ ise $g_0\circ f_0\simeq g_1\circ f_1$ dir. Yani fonksiyonların homotopisine göre bileşke işlemi iyi tanımlıdır [2].

Tanım 2.2.4. X ve Y topolojik uzaylar ve $f: X\to Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $g\circ f\simeq 1_X$ ve $f\circ g\simeq 1_Y$ olacak şekilde sürekli bir $g: Y\to X$ fonksiyonu varsa f fonksiyonuna bir *homotopi denkliği* denir. Bu durumda X ve Y uzaylarına *aynı homotopi tipine sahiptir* denir [2].

Teorem 2.2.2. X bir topolojik uzay ve $\sim\subseteq X\times X$ aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsun.

"$x, y \in X$ için $x \sim y \Leftrightarrow x$ den y ye bir eğri vardır."

Bu şekilde tanımlanan bağıntı bir denklik bağıntısıdır ve bu bağıntıya göre denklik sınıflarına X uzayının *eğri bileşenleri* denir [2].

Tanım 2.2.5. X bir topolojik uzay olmak üzere $a, b: I \to X$, $a(1) = b(0)$ olacak şekilde iki eğri olsun. O halde

$$\begin{array}{rccl} (a \circ b): & I & \to & X \\ & t & \mapsto & (a \circ b)(t) = \begin{cases} a(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ b(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \end{array}$$

şeklinde tanımlanan $(a \circ b)$ fonksiyonu yapıştırma lemmasından süreklidir, yani X de bir eğridir [2].

Tanım 2.2.6. X ve Y birer topolojik uzay, $A \subseteq X$, $f_0, f_1: X \to Y$ sürekli fonksiyonlar ve $f_0|_A = f_1|_A$ olsun. $F: f_0 \simeq f_1$ ve her $a \in A$ ve her $t \in I$ için $F(a,t) = f_0(a) = f_1(a)$ olacak şekilde sürekli bir $F: X \times I \to Y$ fonksiyonu varsa f_0 ile f_1 fonksiyonları *A ya göre homotopiktir* denir ve

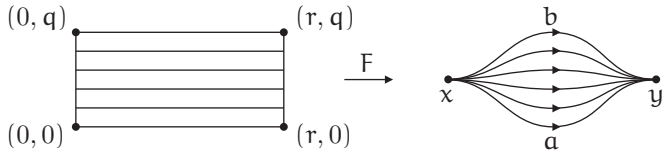
$$f_0 \simeq f_1 \quad rel A$$

ile gösterilir [2].

Tanım 2.2.7. X bir topolojik uzay, $x, y \in X$ ve $a, b: [0,r] \to X$ ise $a(0) = b(0) = x$ ve $a(r) = b(r) = y$ olacak şekilde sürekli fonksiyonlar olsunlar. Eğer

$$\begin{array}{lll} F(s,0) = a(s) & F(s,q) = b(s) & , s \in [0,r] \\ F(0,t) = x & F(r,t) = y & , t \in [0,q] \end{array}$$

olacak şekilde sürekli bir $F: [0,r] \times [0,q] \to X$ fonksiyonu varsa F fonksiyonuna *a dan b ye q uzunluğunda eğrilerin uç noktalarına göre homotopisi* denir.



Burada her $t \in [0,q]$ için $F_t: s \mapsto F_t(s) = F(s,t)$, x den y ye bir eğri ve $F_0 = a$, $F_q = b$ dir. a dan b ye homotopi $F: a \sim b$ ile gösterilir.

Eğer yukarıdaki tanımda $r = 1$ ve $q = 1$ alırsak aşağıdaki tanımı elde ederiz.

Tanım 2.2.8. X bir topolojik uzay olmak üzere başlangıç noktaları x ve bitiş noktaları y olan a, b eğrileri verilsin. $s, t \in [0,1]$ için

$$F(s,0) = a(s), \quad F(0,t) = x, \quad F(s,1) = b(s) \quad \text{ve} \quad F(1,t) = y$$

olacak şekilde sürekli bir

$$F\colon [0,1] \times [0,1] \to X$$

fonksiyonuna a dan b ya (uç noktalarına göre) bir *homotopi* denir. Eğer böyle bir homotopi varsa a ve b eğrileri (uç noktalarına göre) *homotopik* denir ve $a \simeq b$ yazılır.

Tezin devamında eğrilerin homotopisi için yukarıdaki tanımı kullanacağız.

Tanım 2.2.9. Bir X topolojik uzayında $x, y \in X$ için x den y ye birim uzunluğundaki eğrilerin uç noktalarına göre homotopik olma bağıntısı bir denkli bağıntısıdır. Bir $a\colon I \to X$ eğrisinin denklik sınıfına a nın *eğri sınıfı* veya *homotopi sınıfı* denir ve $[a]$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.3. $a_0, a_1, b_0, b_1\colon I \to X$ fonksiyonları X uzayında birer eğri, $a_0 \simeq a_1$ ve $b_0 \simeq b_1$ olsun. Eğer $a_0(1) = a_1(1) = b_0(0) = b_1(0)$ ise

$$a_0 \circ b_0 \simeq a_1 \circ b_1$$

olur [2].

Tanım 2.2.10. Bir X topolojik uzayında $x_0 \in X$ sabit bir nokta olsun. X de x_0 noktasındaki kapalı eğrilerin homotopi sınıflarının cümlesi $\pi_1(X, x_0)$

$$[a][b] = [a \circ b]$$

işlemine göre bir gruptur. Bu gruba X topolojik uzayının x_0 noktasındaki *temel grubu* denir.

Teorem 2.2.4. Bir X topolojik uzayında $x_0 \in X$ ve C_0 ise x_0 elemanını içeren eğri bileşen olsun. O halde

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(C_0, x_0)$$

olur [2].

Teorem 2.2.5. X eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay ve $x_0, x_1 \in X$ olsun. O halde

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$$

olur [2].

Teorem 2.2.6. (X, x_0) ve (Y, y_0) noktalı uzaylar olmak üzere

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

olur [2].

Teorem 2.2.7. X ve Y birer topolojik uzay ve $\beta : X \to Y$ bir homotopi denkliği ise bundan üretilen

$$\pi_1(\beta) = \beta_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \beta(x_0)), [\alpha] \mapsto [\beta\alpha]$$

grup homomorfizmi her $x_0 \in X$ için bir grup izomorfizmdir [2].

Sonuç 2.2.1. X ve Y eğrisel irtibatlı ve aynı homotopi tipine sahip birer topolojik uzay olsunlar. O halde herhangi $x_0 \in X$ ve $y_0 \in Y$ için

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$$

olur [2].

Sonuç 2.2.2. X büzülebilir (contractible) bir uzay ise $x_0 \in X$ için

$$\pi_1(X, x_0) \cong \{1\}$$

olur [2].

Tanım 2.2.11. Bir X topolojik uzayı eğrisel irtibatlı ve her $x_0 \in X$ için $\pi_1(X, x_0) \cong \{1\}$ ise X uzayına *basit irtibatlıdır* denir [2].

Örnek 2.2.4. Konveks bir $X \subseteq \mathbb{R}^n$ cümlesi basit irtibatlıdır.

Önerme 2.2.1. Eğer X, Y topolojik uzayları basit irtibatlı ise $X \times Y$ çarpım uzayı da basit irtibatlıdır.

Tanım 2.2.12. G ve H birer grup ve $e_H \in H$ birim eleman olmak üzere, her $g \in G$ için $f(g) = e_H$, yani $kerf = G$ olacak şekildeki grup dönüşümüne *aşikar dönüşüm* denir [2].

Tanım 2.2.13. X bir topolojik uzay olsun. Eğer her bir $x \in X$ noktası, $i: U \longrightarrow X$ içine bir fonksiyon olmak üzere, $i_*: \pi_1(U,x) \longrightarrow \pi_1(X,x)$ aşikar dönüşüm olacak şekilde bir U açık komşuluğuna sahip ise X uzayına bir *yarı-lokal 1-irtibatlı uzay* denir [3].

2.3. Örtü Uzayları

Örtü uzayı kavramı cebirsel topolojinin yanı sıra diferansiyel topoloji, topolojik gruplar gibi matematiğin bazı diğer alanlarında da önemli uygulamalara sahiptir. Bir $\widetilde{X}$ örtü uzayının yapısı X topolojik uzayının yapısından daha kullanışlıdır. Çünkü $\widetilde{X}$, X den daha küçük bir temel gruba sahip olup $\widetilde{X}$ nın yapısı X den daha basittir. Bu tezde örtü uzayları ile ilgili tüm uzayların irtibatlı ve lokal eğrisel irtibatlı dolayısıyla eğrisel irtibatlı olduğu varsayılır.

Tanım 2.3.1. X ve $\widetilde{X}$ topolojik uzaylar ve $p: \widetilde{X} \to X$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bir $U \subseteq X$ irtibatlı açık cümlesi için $p^{-1}(U)$ ayrık, açık S_i cümlelerin birleşimi olarak yazılabiliyor ve her i için $p|_{S_i}: S_i \to U$ kısıtlaması homeomorfizm ise U ya p *tarafından örtülür* denir. Burada S_i açık cümlelerine *çarşaf* denir [2].

Tanım 2.3.2. X bir topolojik uzay olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $(\widetilde{X}, p)$ ikilisine X topolojik uzayının bir örtü uzayı denir [2].

i) $\widetilde{X}$ eğrisel irtibatlı;

ii) $p: \widetilde{X} \to X$ sürekli;

iii) Her $x \in X$ için p tarafından örtülen bir U_x açık komşuluğu vardır.

Örnek 2.3.1. $p: \mathbb{R} \to S^1, p(t) = e^{2\pi i t}$ sarma fonksiyonunun bir örtü dönüşümü olduğu gösterilebilir.

Lemma 2.3.1. $(\widetilde{X}, p)$ ikilisi X topolojik uzayının bir örtü uzayı olsun. O halde p örten, açık ve süreklidir. Ayrıca X eğrisel irtibatlıdır [2].

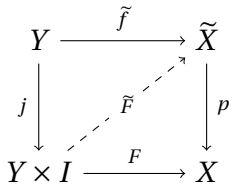
İspat: $x \in X$ için U_x açık komşuluğu p tarafından örtülüyor ise $p(p^{-1}(U_x)) = U_x$ olup $x \in im(p)$ dir. Böylece p örtendir. $V \subseteq \widetilde{X}$ açık ve $x \in p(V)$ olsun. U_x, p tarafından örtülen bir cümle olmak üzere $\widetilde{x} \in p^{-1}(x) \cap V$ ve $\widetilde{U}$ ise $\widetilde{x}$ yı içeren, U_x üzerinde bir çarşaf

olsun. Buradan $\widetilde{U}\cap V$ cümlesi $\widetilde{U}$ nın açık bir alt cümlesi olup $\widetilde{x}\in\widetilde{U}\cap V$ olur ve $p(\widetilde{U}\cap V)$ cümlesi x noktasını içeren $U_x\cap p(V)$ nin açık bir alt cümlesi olur. Böylece $p(V)$ açık, yani p açıktır. Sürekli bir fonksiyon altında eğrisel irtibatlı bir uzayın görüntüsü de eğrisel irtibatlı olduğundan X de eğrisel irtibatlıdır. ■

Teorem 2.3.1. G irtibatlı bir topolojik grup ve H ise G nin diskre bir normal altgrubu olsun. Eğer $p: G\to G/H$ bölüm homomorfizmi ise (G,p) ikilisi G/H ın bir örtü uzayı (örtü grubu) olur [2].

Lemma 2.3.2. $(\widetilde{X},p)$, X in bir örtüsü ve $f:(I,0)\to(X,x_0)$ bir eğri olsun. Eğer $p(\widetilde{x}_0)=x_0$ ise $p\widetilde{f}=f$ olacak şekilde bir tek $\widetilde{f}:(I,0)\to(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$ eğrisi vardır.

Teorem 2.3.2. $(\widetilde{X},p)$, X in bir örtüsü ve Y herhangi bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki sürekli fonksiyonların diyagramını düşünelim. $(j(y)=(y,0))$



O halde diyagramı değişmeli yapacak şekilde sürekli bir $\widetilde{F}$: $Y\times I\to\widetilde{X}$ fonksiyonu vardır. Eğer Y irtibatlı ise $\widetilde{F}$ tektir [2].

Sonuç 2.3.1. $(\widetilde{X},p)$, X in bir örtüsü, $x_0,x_1\in X$, $f,g: I\to X$ fonksiyonları X de x_0 dan x_1 e iki eğri ve $p(\widetilde{x}_0)=x_0$ olsun.

i) Eğer $F: I\times I\to X$ fonksiyonu f den g ye bir homotopi $(F: f\simeq g)$ ise $p\widetilde{F}=F$ ve $\widetilde{F}(0,0)=\widetilde{x}_0$ olacak şekilde bir tek $\widetilde{F}: I\times I\to\widetilde{X}$ sürekli dönüşümü vardır.

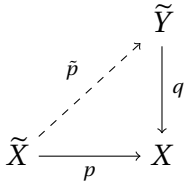
ii) Eğer $\widetilde{f}$ ve $\widetilde{g}$ fonksiyonları $\widetilde{f}(0)=\widetilde{g}(0)=\widetilde{x}_0$ olacak şekilde sırasıyla f ve g nin yükselmeleri ise $\widetilde{f}(1)=\widetilde{g}(1)$ ve $\widetilde{F}: \widetilde{f}\simeq\widetilde{g}$ dır.

Teorem 2.3.3. $(\widetilde{X},p)$, X in bir örtü uzayı ise $p(\widetilde{x}_0)=x_0$ olmak üzere

$$\pi_1(p)=p_*: \pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)\to\pi_1(X,x_0)$$

birebirdir [2].

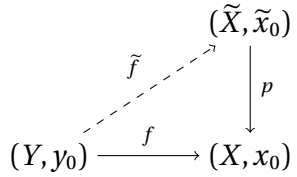
Tanım 2.3.3. $p\colon \widetilde{X} \to X$ bir örtü dönüşümü olsun. Eğer $p\colon \widetilde{X} \to X$ örtü dönüşümü X in her bir örtüsüne yükseliyor ise, yani her bir $q\colon \widetilde{Y} \to X$ örtü dönüşümü için $p = q\tilde{p}$ olacak şekilde bir tek $\tilde{p}\colon \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ örtü dönüşümü varsa $p\colon \widetilde{X} \to X$ ye *evrensel örtü* denir.



Tanım 2.3.4. X bir topolojik uzay, $p\colon (\widetilde{X},\widetilde{x}_0) \to (X,x_0)$ ve $q\colon (\widetilde{Y},\widetilde{y}_0) \to (X,x_0)$ da X in birer örtü dönüşümü olsun. Eğer $qf = p$ olacak şekilde bir $f\colon (\widetilde{X},\widetilde{x}_0) \to (\widetilde{Y},\widetilde{y}_0)$ homeomorfizmi varsa p *ve* q *örtü dönüşümleri denktir* denir.

Tanım 2.3.5. $p\colon (\widetilde{X},\widetilde{x}_0) \to (X,x_0)$ bir örtü dönüşümü olsun. Temel gruplar üzerinde üretilen grup homomorfizmi $\pi_1(p)\colon \pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0) \to \pi_1(X,x_0)$ olmak üzere $\pi_1(p)(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0))$ alt grubuna p nin *karakteristik grubu* denir.

Lemma 2.3.3. $(\widetilde{X},p)$ ikilisi X in bir örtüsü, Y irtibatlı ve $f\colon (Y,y_0) \to (X,x_0)$ sürekli olsun. $p(\widetilde{x}_0) = x_0$ olmak üzere $p\widetilde{f} = f$ olacak şekilde bir ve yalnız bir sürekli $\widetilde{f}\colon (Y,y_0) \to (\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$ fonksiyonu vardır ancak ve ancak $f_*(\pi_1(Y,y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0))$ [2].



Lemma 2.3.4. X lokal eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay ve $x_0 \in X$ olsun. $p\colon (\widetilde{X},\widetilde{x}_0) \to (X,x_0)$ ve $q\colon (\widetilde{Y},\widetilde{y}_0) \to (X,x_0)$ birer örtü dönüşümü olmak üzere p ve q denktir ancak ve ancak p ve q nun karakteristik grupları $\pi_1(X,x_0)$ nin konjuge alt gruplarıdır.

2.4. Kategori

Kategori teorisi matematiksel yapılar ve bunlar arasındaki ilişkilerle ilgili bir matematik kuramıdır. Bir kategori birbirleriyle ilişkili matematiksel objeler ve bunlar arasındaki morfizmlerden oluşur. Objeler üzerine yoğunlaşmak yerine, bu

objeler arasındaki morfizmler üzerine yoğunlaşılır. Gruplar örneğinde bu morfizmler grup homomorfizmleridir. Bu şekildeki farklı kategorileri fanktorlar aracılığıyla ilişkilendirmek mümkündür. Kategori, fanktor ve doğal dönüşümler Samuel Eilenberg ve Saunders MacLane tarafından 1945 yılında ortaya atılmıştır. Eilenberg ve MacLane, kendi ifadelerine göre, bu kavramın geliştirilmesi doğal dönüşümleri anlama çabası ile olmuştur. Bunu yapabilmek için fanktorlar tanımlamak, fanktorları tanımlamak için ise kategorileri tanımlamak gerekiyordu. Kategorinin ayrıntılı tanımı aşağıdaki şekildedir.

Tanım 2.4.1. V ve E birer cümle ve $\delta: E \to V \times V$ bir dönüşüm olmak üzere $\mathscr{A} = (V, E, \delta)$ sistemine bir *graf* denir. Burada V ye *köşelerin cümlesi*, E ye *kenarların cümlesi* ve herhangi bir $x \in E$ elemanı için $\delta(x) = (x_1, x_2)$ olmak üzere x_1 e x in *kaynağı*, x_2 ye ise x in *hedefi* denir [4].

Tanım 2.4.2. Aşağıdaki özellikleri ihtiva eden $\mathbb{C} = (C_0, C_1, 1, m)$ sistemine bir kategori denir.

i. Kategorinin objeleri olarak adlandırılacak bir sınıf C_0

ii. Her bir $X, Y \in C_0$ için X den Y ye morfizmlerin bir sınıfı olarak adlandırılacak $\mathbb{C}(X, Y)$. Burada

$$C_1 = \bigcup_{X,Y \in C_0} \mathbb{C}(X, Y)$$

iii. Her $X, Y, Z \in C_0$ için

$$\begin{array}{rccc} m: & \mathbb{C}(X,Y) \times \mathbb{C}(Y,Z) & \longrightarrow & \mathbb{C}(X,Z) \\ & (f,g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

morfizmlerin bileşkesi olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

a) Eğer $f \in \mathbb{C}(X,Y)$, $g \in \mathbb{C}(Y,Z)$, $h \in \mathbb{C}(Z,W)$ ise $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ dir.

b) Her bir $X \in C_0$ için $f \in \mathbb{C}(X,Y)$ ve $g \in \mathbb{C}(Z,X)$ olmak üzere $f \circ 1_X = f$ ve $1_X \circ g = g$ olacak şekilde bir $1_X \in \mathbb{C}(X,X)$ birim morfizmi vardır.

Örnek 2.4.1. Tüm cümlelerin sınıfı bir kategori oluşturur. Bu kategorinin objeleri cümleler ve morfizmleri ise cümleler arasındaki fonksiyonlardır. A , B cümleleri

için $\mathbb{C}(A,B)$ sınıfı A dan B ye tüm fonksiyonların sınıfıdır. Burada kısmi işlem ise fonksiyonların bileşkesi olarak tanımlanır. Her bir A cümlesi için birim morfizm $1_A : A \to A$ birim fonksiyonudur.

O halde tüm cümlelerin sınıfı bir kategori oluşturur. Bu kategoriye cümlelerin kategorisi denir ve **SET** ile gösterilir.

Örnek 2.4.2. Topolojik uzayların sınıfı bir kategori oluşturur. Bu kategorinin objeleri topolojik uzaylar, morfizmleri topolojik uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonlar ve kısmi işlem ise fonksiyonların bileşkesidir. Sürekli fonksiyonların bileşkeleri de sürekli olduğundan böyle bir kısmi işlem tanımlıdır. Bu kategori **TOP** ile gösterilir.

Örnek 2.4.3. Objeleri noktalı topolojik uzaylar, morfizmleri ise noktalı topolojik uzaylar arasındaki sürekli dönüşümler alınarak oluşturulan kategori noktalı topolojik uzayların kategorisidir ve $\mathbf{TOP}_*$ ile gösterilir.

Örnek 2.4.4. Objeleri gruplar, morfizmleri grup homomorfizmleri ve kısmi işlem ise grup homomorfizmlerin bileşkesi olarak alındığında bir kategori elde edilir. Bu kategori **GRP** olarak yazılır.

Benzer olarak halkalar ve halka homomorfizmleri de bir kategori oluşturur. Bu kategori de **RING** olarak yazılır.

Örnek 2.4.5. Topolojik grupların kategorisini oluşturmak için objeler topolojik gruplar ve morfizmler ise sürekli grup homomorfizmleri olarak alınır. Bu şekilde elde edilen topolojik grupların kategorisi **TOPGRP** olarak yazılır.

Örnek 2.4.6. R , birimli bir halka olmak üzere M ve N de birer R-modül olsun. M den N ye bir R-modül morfizmi $f(rm) = rf(m)$ olacak şekilde bir $f : M \to N$ grup homomorfizmi olarak tanımlanır. O halde objeleri R modüller ve morfizmleri ise R-modüllerin morfizmleri olan bir kategori elde etmek mümkündür. Bu kategori ${}_R\mathbf{MOD}$ ile gösterilir.

Benzer olarak bir F cismi üzerindeki vektör uzayların ${}_F\mathbf{VEKT}$ kategorisi elde edilebilir. Bu kategorinin objeleri vektör uzayları, morfizmleri ise vektör uzaylar arasındaki lineer dönüşümlerden oluşur.

Örnek 2.4.7. Bir X topolojik uzayında eğrilerin boylarını dikkate alan eğri birleşimine göre eğrilerin sınıfı bir kategori olur. Bu kategoriye X uzayındaki eğrilerin kategorisi denir ve **E(X)** ile gösterilir. Burada $\gamma\beta$ ve $\beta\alpha$ birleşimli olduğunda $\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$ olduğundan birleşme özelliği sağlanır. Ayrıca $a \in X$ için sıfır boyundaki α_a eğrisi a noktasında bir birim morfizmdir.

Örnek 2.4.8. $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir cümle olsun. Bu kısmı sıralı cümleden aşağıdaki şekilde bir $\mathbb{C}$ kategorisi tanımlanabilir. $\mathbb{C}$ kategorisinin objeleri X in elemanlarından oluşur. Morfizmleri ise $x, y \in X$ için

$$\mathbb{C}(x,y) = \begin{cases} \{(x,y)\} & , \quad x \leq y \\ \\ \emptyset & , \quad \text{diğer durumda} \end{cases}$$

dır. Morfizmler üzerindeki kısmi işlem ise geçişme özelliğinden elde edilir. Ayrıca yansıma özelliğinden her bir $x \in X$ için $x \leq x$ olduğundan $x \in X$ deki birim morphizm ise $1_x = (x,x)$ dır. O halde kısmı sıralı bir cümle bir kategori olarak düşünülebilir.

Benzer olarak bir denklik bağıntısı da bir kategori olarak düşünülebilir.

Tanım 2.4.3. Bir $\mathbb{C}$ kategorisindeki bir $f : X \to Y$ morfizmi için $g \circ f = 1_X$ ve $f \circ g = 1_Y$ olacak şekilde bir $g : Y \to X$ morfizmi varsa f ye bir *izomorfizm* denir.

Tanım 2.4.4. Her morfizmi bir izomorfizm olan kategoriye bir *grupoid* denir.

Örnek 2.4.9. Objeleri tüm cümleler, morfizmleri ise birebir ve örten fonkiyonlar alınarak elde edilen kategori bir grupoid olur.

Tanım 2.4.5. $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{D}$ birer kategori olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\mathbb{D}$ kategorisine $\mathbb{C}$ kategorisinin bir *alt kategorisi* denir.

i. D_0 sınıfı C_0 sınıfının bir alt sınıfıdır.

ii. Her bir $X, Y \in D_0$ için $\mathbb{D}(X,Y) \subseteq \mathbb{C}(X,Y)$ dir.

iii. $\mathbb{D}$ kategorisindeki morfizmlerin bileşkesi, $\mathbb{C}$ kategorisindeki morfizmlerin bileşkesi ile aynıdır.

iv. Her bir $X \in D_0$ için $\mathbb{D}$ deki 1_X birim morfizmi, $\mathbb{C}$ deki birim morfizm ile aynıdır.

Tanım 2.4.6. $\mathbb{C}$ kategorisi $\mathbb{D}$ kategorisinin bir alt kategorisi olsun. Eğer her $X, Y \in D_0$ obje çifti için $\mathbb{D}(X,Y) = \mathbb{C}(X,Y)$ ise $\mathbb{D}$ ye *dolu (full)* bir alt kategori, eğer $D_0 = C_0$ ise $\mathbb{D}$ ye *geniş* bir alt kategori denir.

Tanım 2.4.7. $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{D}$ birer kategori olmak üzere $\mathbb{C}$ nin her bir X objesini $\mathbb{D}$ nin bir $F(X)$ objesine, $\mathbb{C}$ nin her bir $f: X \to Y$ morfizmini ise $\mathbb{D}$ nin bir $F(f): F(X) \to F(Y)$ morfizmine dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan bir F dönüşümüne $\mathbb{C}$ den $\mathbb{D}$ ye bir *fanktor* denir ve $F: \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ olarak yazılır.

i. $\mathbb{C}$ kategorisinde $g \circ f$ tanımlı olacak şekildeki f ve g morfizmleri için

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

dır.

ii. Her $X \in C_0$ için

$$F(1_X) = 1_{F(X)}$$

dır.

Örnek 2.4.10. U: **Top**→**Set** dönüşümü, bir topolojik uzayı, üzerinde tanımlı olduğu cümleye götüren bir fanktordur. Bu şekildeki objeler üzerindeki yapıyı unutan fanktora *unutkan fanktor* denir. U: **Grp**→**Set** ve U: **Ring**→**Ab** birer unutkan fanktordurlar.

İki fanktorun bileşkesinin yine bir fanktor olduğu kolayca görülür. Böylece objeleri küçük kategoriler, morfizmleri ise kategoriler arasındaki fanktorlar alınarak bir kategori elde edilebilir. Bu kategoriye *küçük kategorilerin kategorisi* denir ve $\mathbb{C}$ =**Cat** ile gösterilir.

Teorem 2.4.1. X ve Y birer topolojik uzay olmak üzere X in irtibatlı bileşenlerinin cümlesine $\pi_0(X)$ diyelim ve $f: X \to Y$ fonksiyonu için $\pi_0(f): \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ fonksiyonunu şu şekilde tanımlayalım : "$C \in \pi_0(X)$ için $\pi_0(f)(C)$, $f(C)$ yi içeren eğri bileşeni olsun." O halde π_0: **Top**→**Set** bir fanktordur. Ayrıca eğer $f \simeq g$ ise $\pi_0(f) = \pi_0(g)$ dir [2].

Sonuç 2.4.1. X ve Y aynı homotopi tipine sahip ise X ve Y nin eğri bileşenlerinin sayıları eşittir [2].

Teorem 2.4.2. $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grp}$ bir fanktordur ve eğer $k, h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ve $k \simeq h \quad rel\{x_0\}$ ise $\pi_1(k) = \pi_1(h)$ olur [2].

Tanım 2.4.8. $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{D}$ birer kategori olmak üzere $F, G : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ iki fanktor olsun. $\mathbb{C}$ nin her $X \in C_0$ objesini $\mathbb{D}$ nin bir $\eta_X : F(X) \to G(X)$ morfizmine dönüştüren bir $\eta : C_0 \to D_1$ dönüşümü verilsin. Eğer $\mathbb{C}$ nin her bir $f : X \to Y$ morfizmi için

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\eta_X} & G(X) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(Y) & \xrightarrow[\eta_Y]{} & G(Y) \end{array}$$

diyagramı değişmeli ise η ya bir *doğal dönüşüm* denir ve $\eta : F \to G$ olarak gösterilir.

Tanım 2.4.9. $F, G : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ fanktorları verilsin. Bir $\eta : F \to G$ doğal dönüşümünde her bir $X \in C_0$ için $\eta_X : F(X) \to G(X)$, $\mathbb{D}$ de bir izomorfizm ise η ya bir *doğal izomorfizm*, F ile G ye de *doğal olarak denktir* denir ve $F \simeq G$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.4.3. $F, G : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ fanktorları verilsin. $F \simeq G$ ancak ve ancak $\sigma\mu = 1_F$ ve $\mu\sigma = 1_G$ olacak şekilde $\mu : F \to G$ ve $\sigma : G \to F$ doğal dönüşümleri vardır.

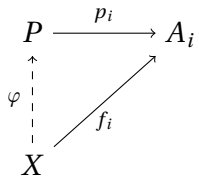
Tanım 2.4.10. $F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ fanktoru verilsin. Eğer $G \circ F \simeq 1_{\mathbb{C}}$ ve $F \circ G \simeq 1_{\mathbb{D}}$ olacak şekilde $G : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ fanktoru varsa bu kategorilere *doğal olarak denktir* denir ve $\mathbb{C} \simeq \mathbb{D}$ olarak yazılır.

Tanım 2.4.11. $\mathbb{C}$ bir kategori olsun. $A \in C_0$ olmak üzere, eğer her bir $X \in C_0$ objesi için $\mathbb{C}(A, X)$ tek elemanlı ise $A \in C_0$ objesine $\mathbb{C}$ deki bir *başlangıç obje*, eğer her bir $X \in C_0$ objesi için $\mathbb{C}(X, A)$ tek elemanlı ise $A \in C_0$ objesine $\mathbb{C}$ deki bir *bitiş obje* denir. Bir $\mathbb{C}$ kategorisinde $A \in C_0$ objesi hem başlangıç hemde bitiş objesi ise A ya *sıfır obje* denir.

Önerme 2.4.1. Bir $\mathbb{C}$ kategorisinde (varsa) başlangıç obje, bitiş obje ve sıfır obje izomorfizme göre tektir [5].

Bir kategoride keyfi sayıda objenin çarpımı bulunabilir. Çarpım obje herhangi bir kategori için aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

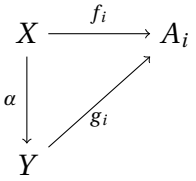
Tanım 2.4.12. Bir $\mathbb{C}$ kategorisinde $\{A_i \mid i \in I\}$ objelerin bir sınıfı, $P \in C_0$ ve her bir $i \in I$ için bir $p_i : P \to A_i$ morfizmi verilsin. $X \in C_0$ olmak üzere eğer $f_i : X \to A_i$, $(i \in I)$ morfizmleri verildiğinde



diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek $\varphi : X \to P$ morfizmi varsa $\{p_i : P \to A_i \mid i \in I\}$ ye bir çarpım diyagramı ve P ye ise $\{A_i \mid i \in I\}$ obje sınıfının bir çarpımı denir.

Bu çarpım kavramı bitiş objesi cinsinden aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir.

Bir $\mathbb{C}$ kategorisinde $\{A_i \mid i \in I\}$ objelerin bir sınıfı olsun. Objeleri $\{X \xrightarrow{f_i} A_i \mid \ i \in I\}$ ($\mathbb{C}$ deki mofizmlerin bir sınıfı) ve morfizmleri ise her $i \in I$ için değişmeli olan



diyagramlarından oluşan bir $\mathbb{K}$ kategorisi tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan $\mathbb{K}$ nın bir kategori olduğu kolayca görülebilir. Bu $\mathbb{K}$ kategorisindeki (eğer varsa) bitiş objesi $\{A_i \mid i \in I\}$ objelerinin çarpımıdır.

Örneğin **Set** kategorisinde iki objenin çarpımı bilinen anlamda kartezyen çarpımlarıdır. Grupların kategorisi **Grp** da iki objenin çarpımı direkt çarpımdır. Eğer bir kategoride herhangi iki objenin çarpımı mevcutsa bu kategoriye sonlu çarpıma sahip bir kategori denir.

Önerme 2.4.2. $\mathbb{C}$ sonlu çarpıma sahip bir kategori olsun. Eğer $A, B, C, D \in C_0$ objeleri için $A \simeq B$ ve $C \simeq D$ izomorf ise

$$A \times C \simeq B \times D$$

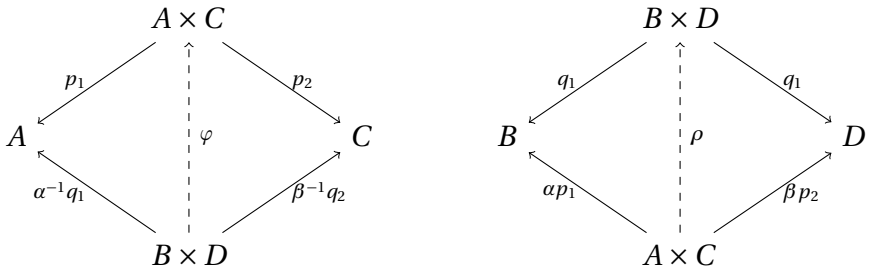
dir.

İspat: $\alpha: A \to B$ ve $\beta: C \to D$ birer izomorfizm olsunlar. Burada

$$A \xleftarrow{p_1} A \times C \xrightarrow{p_2} C$$

$$B \xleftarrow{q_1} B \times D \xrightarrow{q_2} D$$

diyagramları birer çarpım diyagramıdır. O halde



diyagramları değişmeli olacak şekilde bir tek $\varphi: B \times D \to A \times C$ morfizmi ve bir tek $\rho: A \times C \to B \times D$ morfizmi vardır. Böylece $A \times C \overset{\alpha\times\beta}{\simeq} B \times D$ dir. Yani α ve β birer izomorfizm ise $\alpha \times \beta$ da bir izomorfizmdir. ■

Sonuç 2.4.2. $\mathbb{C}$ sonlu çarpıma sahip bir kategori olsun. Eğer $A, B, C \in C_0$ objeleri için $B \simeq C$ ise

$$A \times B \simeq A \times C \qquad ve \qquad B \times A \simeq C \times A$$

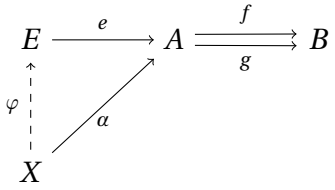
dır. Yani $\alpha: B \to C$ bir izomorizm ise $(1 \times \alpha)$ ve $(\alpha \times 1)$ de birer izomorfizmdir.

Tanım 2.4.13. Bir $\mathbb{C}$ kategorisinde $f, g: A \to B$ morfizmleri verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise (E, e) çiftine *f ve g nin eşitleyicisi* denir.

i. $e: E \to A$ bir morfizmdir.

ii. $fe = ge$ dir.

iii. Eğer $f\alpha = g\alpha$ olacak şekilde bir $\alpha: X \to A$ morfizmi verilirse



diyagramı değişmeli, yani $e\varphi = \alpha$ olacak şekilde bir tek $\varphi : X \to E$ morfizmi vardır.

Burada bu kavram bitiş objesi cinsinden aşağıdaki şekilde verilebilir.

Bir $\mathbb{C}$ kategorisinde $f, g : A \to B$ morfizmleri verilsin. Bir $\mathbb{K}$ kategorisi aşağıdaki şekilde tanımlanır. $\mathbb{K}$ nin objeleri $f\alpha = g\alpha$ olacak şekilde

$$E \xrightarrow{\alpha} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

diyagramlar ve morfizmleri ise

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\alpha} & A & \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} & B \\ {\scriptstyle\theta}\downarrow & \nearrow_{\beta} & & & \\ Y & & & & \end{array}$$

değişmeli diyagramlardan oluşur. $\mathbb{K}$ nın bir kategori oluşturduğu açıktır. Bu $\mathbb{K}$ kategorisindeki bitiş objesi (eğer varsa) f ve g nin eşitleyicisidir.

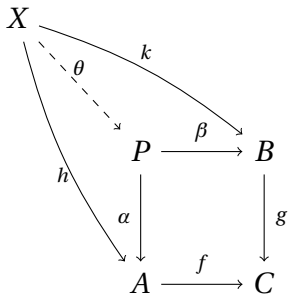
Tanım 2.4.14. Bir $\mathbb{C}$ kategorisinde $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ morfizmler olmak üzere bir

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\beta} & B \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A & \xrightarrow[f]{} & C \end{array}$$

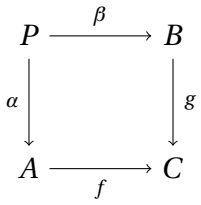
değişmeli diyagramı verilsin. Eğer herhangi bir

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{k} & B \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ A & \xrightarrow[g]{} & C \end{array}$$

değişmeli diyagramı verildiğinde



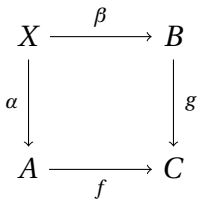
diyagramı değişmeli, yani $\alpha\theta = h$ ve $\beta\theta = k$ olacak şekilde bir tek $\theta : X \to P$ fonksiyonu varsa



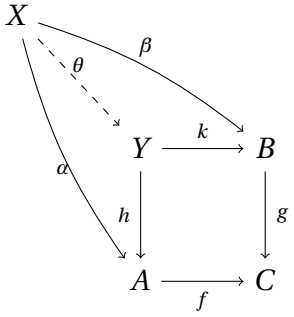
diyagramına f ve g nin pullback diyagramı denir.

Bu kavram bitiş objesi cinsinden aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

Bir $\mathbb{C}$ kategorisinde $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ morfizmleri verilsin. Objeleri



değişmeli diyagramlar ve morfizmleri ise



$h\theta = \alpha$ ve $k\theta = \beta$ olacak şekilde bir $\theta : X \to Y$ morfizmden oluşan bir kategori $\mathbb{K}$ olsun. Bu $\mathbb{K}$ kategorisindeki (eğer varsa) bitiş objesi f ve g nin pullback diyagramıdır.

Tanım 2.4.15. $\mathbb{C}$ sonlu çarpıma sahip ($A, B \in C_0$ ise $A \times B \in C_0$) bir kategori olsun. $D_0, D_1 \in C_0$, $d_0, d_1 \in \mathbb{C}(D_1, D_0)$ başlangıç ve bitiş dönüşümleri, $i \in \mathbb{C}(D_0, D_1)$ ve $m \in \mathbb{C}(D_1 \times_{D_0} D_1, D_1)$ olmak üzere $\mathbb{D} = (D_0, D_1, d_0, d_1, i, m)$ sistemi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu sisteme bir *iç kategori* denir.

i. $d_0 \circ i = d_1 \circ i = 1_{D_0}$

ii. $d_0 \circ m = d_0 \circ \pi_2$ ve $d_1 \circ m = d_1 \circ \pi_1$

iii. $m(1_{D_1} \times m) = m(m \times 1_{D_1})$

iv. $m(1 \times i) = m(i \times 1) = 1_{D_1}$

Burada $D_1 \times_{D_0} D_1$ ifadesi (D_0, d_0, d_1) in pullback'idir [6].

Tanım 2.4.16. $\mathbb{C}$ sonlu çarpıma ve bitiş objesine(1) sahip bir kategori olsun. $G \in C_0$, $m \in \mathbb{C}(G \times G, G)$, $i \in \mathbb{C}(G, G)$ ve $e \in \mathbb{C}(1, G)$ olmak üzere, eğer

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times G & \xrightarrow{1_G \times m} & G \times G \\ {\scriptstyle m \times 1_G}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ G \times G & \xrightarrow[m]{} & G \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 \times G & \xrightarrow{e \times 1_G} & G \times G & \xleftarrow{1_G \times e} & G \times 1 \\ & {\scriptstyle \cong}\searrow & \downarrow{\scriptstyle m} & \swarrow{\scriptstyle \cong} & \\ & & G & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{\Delta} & G \times G & \xrightarrow[1_G \times i]{i \times 1_G} & G \times G \\ {\scriptstyle \exists!}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ 1 & & \xrightarrow[e]{} & & G \end{array}$$

diyagramları değişmeli ise (G, m, e, i) ye $\mathbb{C}$ deki bir *grup obje* denir [7].

Örneğin **SET** kategorisindeki grup objeler bilinen anlamdaki gruplar, **TOP** kategorisinde ise grup objeler topolojik gruplardır. Fakat **GRP** kategorisindeki grup objeler abelian (değişmeli) gruplardır. Bunu göstermek için önce aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 2.4.3. (G, m, e, i) bir grup olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) G abeliandır.

(b) $G \times G$ abeliandır.

(c) $m : G \times G \to G$ bir grup homomorfizmidir.

Lemma 2.4.1. (G, m, e, i) , $\mathbb{C}$=**GRP** kategorisinde bir grup obje olsun. O halde (G, m, e, i) bir abelian gruptur.

İspat: $m \in \mathbb{C}(G \times G, G)$ bir grup homomorfizmi olup Önerme 2.4.3 den (G, m, e, i) bir abelian gruptur. ■

3. BÖLÜM

GRUPOİDLER VE ÖRTÜ GRUPOİDLERİ

3.1. Grupoid

Her morfizmi bir izomorfizm olan kategoriye bir *grupoid* denir. Daha önce bir monoidin tek objeli bir kategori olarak düşünülebileceğini söylemiştik. O halde bir grup ise tek objeli bir grupoid olarak düşünülebilir [8]. Şimdi grupoid tanımını Mackenzie [9] referansındaki gibi verelim.

Tanım 3.1.1. G_0 objelerin sınıfı, G tüm morfizmlerin sınıfı ve $x, y \in G_0$ için x den y ye morfizmlerin sınıfı $\mathbb{G}(x,y)$ olmak üzere aşağıdaki dönüşümler verilsin.

i. Her bir $a \in \mathbb{G}(x,y)$ için $s(a) = x$ ve $t(a) = y$ ile tanımlanan

$$s, t : G \to G_0$$

sırasıyla *başlangıç* ve *bitiş* dönüşümleri.

ii. Her bir $x \in G_0$ objesi için 1_x, x noktasındaki birim morfizm olmak üzere

$$\varepsilon : G_0 \to G, x \mapsto \varepsilon(x) = 1_x \in \mathbb{G}(x,x)$$

ile tanımlanan *birim morfizm* dönüşümü.

iii. Her bir $a \in \mathbb{G}(x,y)$ için $a^{-1} \in \mathbb{G}(y,x)$ olacak şekilde tanımlı olan

$$u : G \to G, a \mapsto u(a) = a^{-1}$$

ters eleman fonksiyonu.

iv. $G_s \times_t G = \{(b,a) \in G \times G | s(b) = t(a)\}$ olmak üzere

$$\mu : G_s \times_t G \to G, (b,a) \mapsto ba$$

ile tanımlanan *parçalı işlem.*

Eğer bu dönüşümler aşağıdaki şartları sağlar ise G ye G_0 üzerinde bir *grupoid* denir ve genelde $\mathbb{G}$ ile gösterilir [9].

a) Her $(b,a) \in G_s \times_t G$ için $s(ba) = s(a)$ ve $t(ba) = t(b)$ dir.

b) $s(c) = t(b), s(b) = t(a)$ olacak şekildeki $a,b,c \in G$ için $c(ba) = (cb)a$ dır.

c) Her bir $x \in G_0$ için 1_x, x noktasındaki birim morfizm olmak üzere $s(1_x) = t(1_x) = x$ dir.

d) Her $a \in G$ için $a1_{s(a)} = a$ ve $1_{t(a)}a = a$ dır.

e) Her bir $a \in G$ için $s(a^{-1}) = t(a), t(a^{-1}) = s(a)$ olmak üzere $aa^{-1} = 1_{s(a)}$ ve $a^{-1}a = 1_{t(a)}$ dır.

Örnek 3.1.1. I bir cümle olmak üzere $\Delta(I)$ grafını ele alalım. Burada köşelerin cümlesi $V = I$, kenarların cümlesi $E = V \times V$ ve $\delta = 1_E : E \to V \times V$ olsun. $\Delta(I)$ da her $i,j \in I$ için i den j ye bir tek (i,j) kenarı vardır. Kenarlar üzerinde her $i,j,k \in I$ için

$$\begin{array}{rccc} \circ: & E \times E & \to & E \\ & ((i,j),(j,k)) & \mapsto & (i,j) \circ (j,k) = (i,k) \end{array}$$

şeklinde tanımlanmış kısmi işleme göre $\Delta(I)$ bir kategori olur ve hatta her $(i,j) \in E$ kenarı için $(j,i) \in E$ kenarı vardır. Böylece $\Delta(I)$ bir grupoid olur. Bu grupoide *simplicial grupoid* denir. Eğer burada özel olarak $I = \{0,1\}$ alınırsa $\Delta(I)$ simplicial grupoidinde $(0,1)$ kenarı ι ile, $(1,0)$ kenarı ι^{-1} ile ve $\Delta(I) = \mathscr{J}$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.2. **Set** kategorisinin alt kategorisi olan bir elemanlı cümlelerin kategorisi $\mathbf{Set}_1$ bir grupoiddir.

Tanım 3.1.2. Bir $\mathbb{G}$ gupoidinde her bir $x \in G_0$ objesi için x den x e tüm morfizmlerin sınıfı $\mathbb{G}(x,x)$, grupoiddeki morfizmlerin bileşke işlemine göre bir gruptur. Bu gruba x noktasındaki *obje grubu* denir ve $\mathbb{G}(x)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.3. $\mathbb{G}$ bir grupoid olsun. Bir $x \in G_0$ objesi için başlangıç noktası x olan tüm morfizmlerin sınıfına $\mathbb{G}$ nin x noktasındaki *Star*'ı denir ve $St_G x$ şeklinde gösterilir. Ayrıca bitiş noktası x olan tüm morfizmlerin sınıfına ise $\mathbb{G}$ nin x noktasındaki *Costar*'ı denir ve $Cost_G x$ şeklinde gösterilir [10].

$$St_G x = \{a \in G_1 | s(a) = x\}$$
$$Cost_G x = \{b \in G_1 | t(b) = x\}$$

Tanım 3.1.4. X bir topolojik uzay olsun. X deki $\alpha: [0,1] \to X$ birim uzunluğundaki eğrilerin $[\alpha]$ ile gösterilen uç noktalarına göre homotopi sınıflarının $\pi_1 X$ cümlesi X üzerinde bir grupoiddir. Bu grupoid X uzayının *temel grupoidi* olarak adlandırılır.

Burada s başlangıç ve t bitiş fonksiyonları bir $[\alpha] \in \pi_1 X$ için $s([\alpha]) = \alpha(0)$ ve $t([\alpha]) = \alpha(1)$ şeklinde tanımlanır. Bir $x \in X$ için $1_x: [0,1] \to X, t \mapsto x$ eğrisi x noktasındaki sabit eğri olmak üzere $[1_x]$ homotopi sınıfı x noktasındaki birim morfizmdir. $\alpha(1) = \beta(0)$ olacak şekildeki bir α, β eğri çifti için $\beta\alpha$ birleşimi

$$\beta\alpha: [0,1] \to X, t \mapsto \beta\alpha(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & , \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

olmak üzere morfizmlerin bileşkesi $[\beta][\alpha] = [\beta\alpha]$ şeklinde tanımlanır. Bir α eğrisi için $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$ olmak üzere $[\alpha^{-1}]$ homotopi sınıfı $[\alpha]$ nın grupoiddeki tersidir [3].

Tanım 3.1.5. Her $x, y \in X$ için $\pi_1 X(x,y)$ yalnızca bir elemana sahipse bu grupoide *1-irtibatlıdır* veya *tree grupoid* denir. Ayrıca $\pi_1 X$ bir tree grupoid ise X uzayına *1-irtibatlıdır* denir. Bu ise X in eğrisel irtibatlı olmasını sağlar.

Örnek 3.1.3. $X \neq \emptyset$ bir cümle ve $R \subseteq X \times X$ bir denklik bağıntısı olsun. (x_1, x_2) , x_1 den x_2 ye bir morfizm olmak üzere R bağıntısı

$$\begin{array}{rccc} \circ: & R \times R & \to & R \\ & ((x_1,x_2),(x_2,x_3)) & \mapsto & (x_1,x_2) \circ (x_2,x_3) = (x_1,x_3) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan işlemine göre 1-irtibatlı bir grupoid yani tree grupoid olur.

Tanım 3.1.6. X in eğri bileşenlerinin herbiri 1-irtibatlı ise her $x, y \in X$ için $\pi_1 X(x,y)$ birden fazla eleman içermez ve bu durumda X ve $\pi_1 X$ e *basit irtibatlıdır* denir. Bir $\mathbb{G}$ grupoidinde her $x, y \in G_0$ için $\mathbb{G}(x,y)$ birden fazla elemana sahip değilse bu $\mathbb{G}$ grupoidine *basit irtibatlıdır* denir.

Tanım 3.1.7. $\mathbb{G}$ bir grupoid ve $x, y \in G_0$ için $\mathbb{G}(x,y) \neq \emptyset$ ise $\mathbb{G}$ grupoidine *irtibatlıdır* denir.

Özel olarak $\pi_1 X$ irtibatlıdır $\Leftrightarrow$ X eğrisel irtibatlıdır.

Önerme 3.1.1. Basit irtibatlı bir grupoidde bütün diyagramlar değişmelidir.

İspat: $\mathbb{G}$ basit irtibatlı bir grupoid, $A_0, A_1, \cdots, A_n, B_0, B_1, \cdots, B_m \in G_0$, $A_0 = B_0$ ve $A_n = B_m$ olsun. $i = 1,2,\ldots,n$ için $f_i : A_{i-1} \to A_i$ ve $j = 1,2,\ldots,m$ için $g_j : B_{j-1} \to B_j$ verildiğinde

$$\begin{array}{ccccccccc} A_0 & \xrightarrow{f_1} & A_1 & \xrightarrow{f_2} & A_2 & \xrightarrow{f_3} & \cdots & \xrightarrow{f_n} & A_n \\ \| & & & & & & & & \| \\ B_0 & \xrightarrow[g_1]{} & B_1 & \xrightarrow[g_2]{} & B_2 & \xrightarrow[g_3]{} & \cdots & \xrightarrow[g_m]{} & B_m \end{array}$$

diyagramında $f_n f_{n-1} \ldots f_1 = a$ ve $g_m g_{m-1} \ldots g_1 = b$ dersek, $\mathbb{G}$ basit irtibatlı olduğundan $a = b$ olur. Böylece $\mathbb{G}$ grupoidinde bütün diyagramlar değişmelidir. ■

Önerme 3.1.2. Bir $\mathbb{G}$ grupoidi başlangıç veya bitiş objesine sahip ise $A, B \in G_0$ objeleri için $A \cong B$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $\mathbb{G}$ grupoidi T bitiş objesine sahip olsun. O halde $A, B \in G_0$ objeleri için bir tek $f : A \to T$ ve bir tek $g : B \to T$ morfizmleri vardır. $\mathbb{G}$ bir grupoid olduğundan f ve g birer izomorfizmdir. Böylece

$$A \cong T \cong B$$

olup,

$$A \cong B$$

dir. Başlangıç objesine sahip bir grupoid için benzer şekilde ispatlanır. ■

Sonuç 3.1.1. Başlangıç veya bitiş objesine sahip bir grupoidde bütün objeler birbirlerine izomorfturlar. Öyleyse başlangıç ve bitiş objeleri de birbirine izomorf olup bunlar sıfır objedir. Yani başlangıç (bitiş) objesine sahip bir grupoidde bu obje sıfır objedir. Ayrıca böyle bir grupoid 1-irtibatlıdır.

Tanım 3.1.8. $\mathbb{G}$ bir grupoid, $\mathbb{H}$ ise $\mathbb{G}$ nin bir alt kategorisi olsun. Eğer $a \in H_1$ iken $a^{-1} \in H_1$ oluyorsa $\mathbb{H}$ grupoidine $\mathbb{G}$ nin bir alt grupoidi denir.

Lemma 3.1.1. $\mathbb{G}$ bir grupoid, $\mathbb{C}$ bir kategori ve $F : \mathbb{G} \to \mathbb{C}$ bir fanktor olsun. Eğer F fanktoru morfizmler üzerinde örten ise $\mathbb{C}$ bir grupoiddir.

İspat: F fanktoru morfizmler üzerinde örten ise herhangi bir $b \in \mathbb{C}(c_0, c_1)$ morfizmi için $F(a) = b$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{G}(g_0, g_1)$ morfizmi vardır. $\mathbb{G}$ bir grupoid olduğundan a bir izomorfizmdir. Ayrıca F bir fanktor olduğundan $b = F(a)$ morfizmi de bir izomorfizm olur. O halde $\mathbb{C}$ bir grupoiddir. ■

3.2. Örtü Grupoidleri

Bu kesimde grupoid örtü morfizmleri tanıtılacak ve homotopik fanktorların yükselmelerinin de homotopik olup olmadığı araştırılacaktır.

Tanım 3.2.1. $p: \widetilde{\mathbb{G}} \to \mathbb{G}$ grupoidlerin bir morfizmi olsun. Eğer her $\widetilde{x} \in \widetilde{G}_0$ objesi için p nin kısıtlanması olan

$$St_{\widetilde{G}}\widetilde{x} \to St_G p\widetilde{x}$$

bijektif ise p ye bir *grupoid örtü morfizmi*, $\widetilde{\mathbb{G}}$ ya ise $\mathbb{G}$ nin bir *örtü grupoidi* denir.

Örnek 3.2.1. Bir $p: H \to G$ grup homomorfizmi verilsin. Bir grup bir tek objeli bir grupoid olduğundan p bir grupoid morfizmi olarak düşünülebilir. O halde p bir örtü dönüşümüdür ancak ve ancak bir grup izomorfizmidir.

Burada eğer $\widetilde{\mathbb{G}}$ ve $\mathbb{G}$ grupoidleri irtibatlı ise p ye *irtibatlıdır* denir.

Örnek 3.2.2. Örnek 3.1.1 deki $\mathscr{J}$ simplicial grupoidi ile bir objeli ve iki morfizmli $\mathbb{Z}_2$ grupoidini ele alalım.

$$p: \mathscr{J} \to \mathbb{Z}_2\ ,\ p(\iota) = 1$$

şeklinde tanımlanan p dönüşümü bir grupoid örtü morfizmidir. Fakat

$$p: \mathscr{J} \to \mathbb{Z}_3\ ,\ p(\iota) = 1$$

şeklinde tanımlanan p dönüşümü bir grupoid örtü morfizmi değildir.

Önerme 3.2.1. $p: \widetilde{\mathbb{G}} \to \mathbb{G}$ irtibatlı bir grupoid örtü morfizmi olsun. Eğer $\mathbb{G}$ basit irtibatlı ise $\widetilde{\mathbb{G}}$ da basit irtibatlıdır.

İspat: $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{G}_0$ ve $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in \widetilde{\mathbb{G}}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ olsun. $\mathbb{G}$ basit irtibatlı olduğundan $p(\widetilde{a}) = p(\widetilde{b})$ olur. p grupoid örtü morfizmi olduğundan $St_{\widetilde{G}}\widetilde{x}$ da bijektif olup $\widetilde{a} = \widetilde{b}$ bulunur. O halde $\widetilde{\mathbb{G}}$ da basit irtibatlıdır. ■

Tanım 3.2.2. Herhangi bir $p:\widetilde{\mathbb{G}}\to\mathbb{G}$ morfizmi ve $\widetilde{x}\in\widetilde{G}_0$ objesi için $p[\widetilde{\mathbb{G}}(\widetilde{x})]\leq\mathbb{G}(p\widetilde{x})$ altgrubuna p nin $\widetilde{x}$ daki *karakteristik grubu* denir.

Teorem 3.2.1. $p:\widetilde{X}\to X$ bir örtü morfizmi, $A\subseteq X$ ve $p^{-1}[A]=\widetilde{A}$ olsun. O halde p den üretilen

$$\pi_1 p:\pi_1\widetilde{X}\widetilde{A}\to\pi_1 XA$$

morfizmi bir grupoid örtü morfizmidir [10]. Özel olarak $A=X$ için

$$\pi_1 p:\pi_1\widetilde{X}\to\pi_1 X$$

bir grupoid örtü morfizmidir.

Tanım 3.2.3. $\mathbb{G}$ bir grupoid, X bir cümle ve $\omega:X\longrightarrow G_0$ bir fonksiyon olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanacak şekilde bir $X_\omega\times_s G\longrightarrow X,(x,a)\longmapsto x\bullet a$ kısmi dönüşümü varsa bu dönüşüme $\mathbb{G}$ *grupoidinin X cümlesi üzerine ω ile bir etkimesi* denir [10].
Her $(x,a)\in X_\omega\times_s G$ ve $s(b)=t(a)$ olacak şekildeki her $b\in G$ için

i. $\omega(x\bullet a)=t(a)$

ii. $x\bullet(a\circ b)=(x\bullet a)\bullet b$

iii. $x\bullet 1_{\omega(x)}=x$

Not 3.2.1. Tanımdan açıkça görülüyor ki bir $x\in X$ elemanı $St_G w(x)$ in elemanlarına etkir.

Tanım 3.2.4. Bir $\mathbb{G}$ grupoidi, bir X cümlesi üzerine $w:X\to G_0$ fonksiyonu ile etkisin. Bu $\mathbb{G}$ grupoidi ile X cümlesinin yarı-direkt çarpımı $\mathbb{G}\ltimes X=\{(a,x)\mid s(a)=w(t)\}$ şeklinde tanımlansın. Bu yarı-direkt çarpım X cümlesi üzerinde bir grupoid olur. Bu grupoide *etkime grupoidi* denir. Burada (a,x) morfizmi için $s((a,x))=x$ ve $t((a,x))=x\bullet a$ dır.

Örnek 3.2.3. $p:\widetilde{\mathbb{G}}\to\mathbb{G}$ bir grupoid örtü morfizmi, $X=\widetilde{G}_0$ olsun ve $\omega:\widetilde{G}_0\to G_0$ fonksiyonu $\omega(\widetilde{x})=p(\widetilde{x})$ şeklinde tanımlansın. $p(\widetilde{a})=a$ olmak üzere $X_\omega\times_s G\to X,(\widetilde{x},a)\mapsto\widetilde{x}\bullet a=t(\widetilde{a})$ şeklinde tanımlı kismi işlem, $\mathbb{G}$ nin $\widetilde{G}_0$ a $w=p$ ile etkimesinin verir. $(G\ltimes X)_0=X$ ve $\mathbb{G}\ltimes X(\widetilde{x},\widetilde{y})=\{(a,\widetilde{x})\mid a\in\mathbb{G}(\omega(\widetilde{x}),\omega(\widetilde{y}))\text{ ve }\widetilde{x}\bullet a=\widetilde{y}\}$ olmak üzere, $G\ltimes X$ etkime grupoidini oluşturabiliriz [10].

Teorem 3.2.2. [10] $\mathbb{G}$ irtibatlı bir grupoid, $x \in G_0$ ve $C \leq \mathbb{G}(x)$ bir altgrup olsun. $C_a = \{ca \mid c \in C \ ve \ a \in St_G x\}$ olmak üzere $X = \{C_a \mid a \in St_G x\}$ ve $\omega : X \to G_0, C_a \mapsto t(a)$ şeklinde tanımlansın. $\mathbb{G}$ nin X üzerine ω ile etkimesi $X_\omega \times_s G \to X, (C_a, g) \mapsto C_a \bullet g = C_{ag}$ olmak üzere $\mathbb{G} \ltimes X$ etkime grupoidini $\widetilde{\mathbb{G}}_C$ ile gösterelim. $q : (\widetilde{\mathbb{G}}_C, \widetilde{x}) \to (\mathbb{G}, x)$ grupoid morfizmi objeler üzerinde $q_0 = \omega : X \to G_0$ ve morfizmler üzerinde $q_1 : \widetilde{G}_C \to \widetilde{G}, (g, C_a) \mapsto g$ olarak alınırsa q bir grupoid örtü morfizmi olur ve q nun $\widetilde{x}$ daki karakteristik grubu C olur.

Tanım 3.2.5. $\mathbb{G}$,$\widetilde{\mathbb{G}}$ ve $\mathbb{H}$ birer grupoid olmak üzere $p : \widetilde{\mathbb{G}} \to \mathbb{G}$ bir grupoid örtü morfizmi ve $q : \mathbb{H} \to \mathbb{G}$ bir grupoid morfizmi olsun. Eğer $q = p\widetilde{q}$ olacak şekilde bir tek $\widetilde{q} : \mathbb{H} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ morfizmi varsa q morfizmi $\widetilde{q}$ ya p ile *yükselir* denir.

Teorem 3.2.3. $p : \widetilde{\mathbb{G}} \to \mathbb{G}$ bir grupoid örtü morfizmi, $x \in G_0$ ve $\widetilde{x} \in \widetilde{G}_0$ ise $p(\widetilde{x}) = x$ olacak şekilde bir obje olmak üzere $\mathbb{H}$ irtibatlı bir grupoid, $q : \mathbb{H} \to \mathbb{G}$ bir grupoid morfizmi ve $z \in H_0$ ise $q(z) = x$ olacak şekilde bir obje olsun. Bu durumda $q : \mathbb{H} \to \mathbb{G}$ morfizmi $\widetilde{q}(z) = \widetilde{x}$ olacak şekildeki $\widetilde{q} : \mathbb{H} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ morfizmine tek şekilde yükselir ancak ve ancak $q[\mathbb{H}(z)] \subseteq p[\widetilde{\mathbb{G}}(\widetilde{x})]$ dir.

Sonuç 3.2.1. Teorem 3.2.3 de eğer H basit irtibatlı ise $q : \mathbb{H} \to \mathbb{G}$ morfizminin bir yükselmesi her zaman vardır.

Sonuç 3.2.2. $p : \widetilde{\mathbb{G}}, \widetilde{x} \to \mathbb{G}, x$ ve $q : \widetilde{\mathbb{H}}, \widetilde{z} \to \mathbb{G}, x$ irtibatlı grupoid örtü morfizmleri ve C ve D ise sırasıya p ve q nun karakteristik grupları olsun. Eğer $C \subseteq D$ ise $p = qr$ olacak şekilde bir tek $r : \widetilde{\mathbb{G}}, \widetilde{x} \to \widetilde{\mathbb{H}}, \widetilde{z}$ örtü morfizmi vardır. Ayrıca $C = D$ ise r bir izomorfizmdir.

Şimdi grupoid örtü morfizmleri ile ilgili bazı özellikleri verelim.

Önerme 3.2.2. $p : \widetilde{\mathbb{G}} \to \mathbb{G}$ bir grupoid örtü morfizmi ve $p(\widetilde{x}) = x$ olmak üzere G deki bir $a : x \to y$ morfizminin yükselmesi $\widetilde{a} : \widetilde{x} \to \widetilde{y}$ olsun. Bu durumda $a^{-1} : y \to x$ morfizminin yükselmesi $\widetilde{a^{-1}} : \widetilde{y} \to \widetilde{x}$ olmak üzere $\widetilde{a^{-1}} = (\widetilde{a})^{-1}$ dır.

İspat: $\widetilde{\mathbb{G}}$ bir grupoid olduğundan $\widetilde{a} : \widetilde{x} \to \widetilde{y}$ yükselmesinin tersi $(\widetilde{a})^{-1} : \widetilde{y} \to \widetilde{x}$ mevcut ve

$$p[(\widetilde{a})^{-1}] = [p(\widetilde{a})]^{-1} = a^{-1}$$

dir. Burada $\widetilde{a^{-1}}$ morfizmi a^{-1} in $\widetilde{y}$ daki yükselmesi olup $p(\widetilde{a^{-1}}) = a^{-1}$ dır. O halde yükselmenin tekliğinden $\widetilde{a^{-1}} = (\widetilde{a})^{-1}$ dir. ■

Önerme 3.2.3. $p:\widetilde{\mathbb{G}}\to\mathbb{G}$ bir grupoid örtü morfizmi, $a:x\to y$ ve $b:y\to z$ $\mathbb{G}$ de iki morfizm ve $p(\widetilde{x})=x$, $p(\widetilde{y})=y$, $p(\widetilde{z})=z$ olsun. a nın $\widetilde{x}$ daki yükselmesi $\widetilde{a}:\widetilde{x}\to\widetilde{y}$, b nin $\widetilde{y}$ daki yükselmesi $\widetilde{b}:\widetilde{y}\to\widetilde{z}$ ve $b\circ a:x\to z$ nın $\widetilde{x}$ daki yükselmesi ise $\widetilde{b\circ a}:\widetilde{x}\to\widetilde{z}$ olmak üzere

$$\widetilde{b\circ a}=\widetilde{b}\circ\widetilde{a}$$

dır.

İspat: $\widetilde{b\circ a}$ morfizmi $b\circ a$ morfizminin yükselmesi ise

$$p(\widetilde{b\circ a})=b\circ a$$

ve p bir fanktor olduğundan

$$p(\widetilde{b}\circ\widetilde{a})=p(\widetilde{b})\circ p(\widetilde{a})=b\circ a$$

dır. p nin $St_{\widetilde{G}}\widetilde{x}$ ya kısıtlaması bijektif olduğundan

$$\widetilde{b\circ a}=\widetilde{b}\circ\widetilde{a}$$

dır. ■

Sonuç 3.2.3. $p:\widetilde{\mathbb{G}}\to\mathbb{G}$ bir grupoid örtü morfizmi olmak üzere, bir $x\in G_0$ objesi için

$$\widetilde{1_x}=1_{\widetilde{x}}$$

dir.

İspat: Önerme 3.2.3 de $b=a^{-1}$ alırsak,

$$\widetilde{a^{-1}\circ a}=\widetilde{a^{-1}}\circ\widetilde{a}$$

olup Önerme 3.2.2 den

$$\widetilde{1_x}=\widetilde{a^{-1}\circ a}=\widetilde{a^{-1}}\circ\widetilde{a}=(\widetilde{a})^{-1}\circ\widetilde{a}=1_{\widetilde{x}}$$

dir. ■

Önerme 3.2.4. $p:\widetilde{\mathbb{G}}\to\mathbb{G}$ bir grupoid örtü morfizmi, $a,b\in\mathbb{G}(x,y)$ iki morfizm, $p(\widetilde{x})=x$ ve $a=b$ olmak üzere $\widetilde{a}$ ve $\widetilde{b}$ sırasıyla a ve b nin $\widetilde{x}$ noktasındaki yükselmeleri ise

$$\widetilde{a}=\widetilde{b}$$

dır.

İspat: $p(\widetilde{a}) = a = b = p(\widetilde{b})$ olup p nin $St_{\widetilde{G}}\widetilde{x}$ ya kısıtlaması bijektif olduğundan $\widetilde{a} = \widetilde{b}$ dır. ■

Önerme 3.2.5. $p: \widetilde{\mathbb{G}} \to \mathbb{G}$ bir grupoid örtü morfizmi, $\widetilde{G}_0 = \widetilde{X}$ ve $\mathbb{G} \ltimes \widetilde{X}$ etkime grupoidi olmak üzere bir $\sim: \mathbb{G} \ltimes \widetilde{X} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ fanktoru vardır.

İspat: $p: \widetilde{\mathbb{G}} \to \mathbb{G}$ bir grupoid örtü morfizmi olup Örnek 3.2.3 den $\mathbb{G}$ grupoidi $\widetilde{X} = \widetilde{G}_0$ üzerine etkir ve böylece $\mathbb{G} \ltimes \widetilde{X}$ etkime grupoidini oluşturabiliriz. Burada $(a, \widetilde{x}) \in G \ltimes \widetilde{X}$ için $p(\widetilde{x}) = s(a)$ olup $p: \widetilde{\mathbb{G}} \to \mathbb{G}$ bir örtü morfizmi olduğundan $p(\widetilde{a}) = a$ ve başlangıç noktası $\widetilde{x}$ olacak şekilde bir tek $\widetilde{a} \in \widetilde{G}$ yükselmesi vardır. O halde aranılan fanktoru $\sim: \mathbb{G} \ltimes \widetilde{X} \to \widetilde{\mathbb{G}}, (a, \widetilde{x}) \mapsto \widetilde{a}$ olarak tanımlamak yeterlidir. ■

Önerme 3.2.6. $\mathbb{G}$, $\widetilde{\mathbb{G}}$ ve $\mathbb{H}$ birer grupoid, $p: \widetilde{\mathbb{G}} \to \mathbb{G}$ bir grupoid örtü morfizmi ve $f: \mathbb{H} \to \mathbb{G}$ bir grupoid morfizmi olsun. $\widetilde{f}: \mathbb{H} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ grupoid morfizmi f in yükselmesi olmak üzere herhangi $A, B \in H_0$ objeleri ve $h \in \mathbb{H}(A, B)$ morfizmi için $f(h) \in \mathbb{G}(f(A), f(B))$ morfizminin $\widetilde{f}(A)$ daki yükselmesi $\widetilde{f(h)}$ olmak üzere

$$\widetilde{f(h)} = \widetilde{f}(h)$$

dır.

İspat: $h \in \mathbb{H}(A, B)$ ise $f(h) \in \mathbb{G}(f(A), f(B))$ ve $\widetilde{f}(h) \in \widetilde{\mathbb{G}}(f(A), f(B))$ olur. f in yükselmesi $\widetilde{f}$ (yani $p\widetilde{f} = f$) olduğundan

$$p(\widetilde{f}(h)) = f(h) \tag{3.1}$$

olur. Diğer taraftan $\widetilde{C} \in \widetilde{G}_0$ olmak üzere $f(h)$ morfizminin $\widetilde{f}(A)$ daki yükselmesi $\widetilde{f(h)}: \widetilde{f}(A) \to \widetilde{C}$ olsun. O halde

$$p(\widetilde{f(h)}) = f(h) \tag{3.2}$$

dır. p bir grupoid örtü morfizmi olduğundan p nin $St_{\widetilde{G}}\widetilde{f}(A)$ ya kısıtlanması bijektif olup (3.1) ve (3.2) eşitliklerinden

$$\widetilde{f(h)} = \widetilde{f}(h)$$

bulunur. ■

Önerme 3.2.7. $p: \widetilde{\mathbb{G}} \to \mathbb{G}$ bir grupoid örtü morfizmi, bir $\mathbb{H}$ grupoidi için $f, g: \mathbb{H} \to \mathbb{G}$ grupoid morfizmleri ve f ile g nin yükselmeleri sırasıyla $\widetilde{f}$ ve $\widetilde{g}$ olmak üzere $\sigma: f \to g$

doğal izomorfizmi var ve her $A \in H_0$ için $\sigma_A : f(A) \to g(A)$ izomorfizminin yükselmesi $\widetilde{\sigma_A} : \widetilde{f}(A) \to \widetilde{g}(A)$ izomorfizm ise $\widetilde{f}$ ve $\widetilde{g}$ doğal olarak izomorftur.

İspat: f ve g doğal olarak izomorf ise her $A \in H_0$ için $\sigma_A : f(A) \to g(A)$ bir izomorfizm olacak şekilde bir $\sigma : H_0 \to G$ doğal dönüşümü vardır ve $B \in H_0$ olmak üzere $h : A \to B$ morfizmi için

$$\begin{array}{ccc} f(A) & \xrightarrow{\sigma_A} & g(A) \\ {\scriptstyle f(h)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g(h)} \\ f(B) & \xrightarrow[\sigma_B]{} & g(B) \end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Yani $g(h) \circ \sigma_A = \sigma_B \circ f(h)$ dır. Kabulümüzden her $A \in H_0$ için $\sigma_A : f(A) \to g(A)$ morfizminin yükselmesi olan $\widetilde{\sigma_A} : \widetilde{f}(A) \to \widetilde{g}(A)$ izomorfizmi vardır. Şimdi herhangi bir $h : A \to B$ morfizmi için

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{f}(A) & \xrightarrow{\widetilde{\sigma_A}} & \widetilde{g}(A) \\ {\scriptstyle \widetilde{f}(h)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{g}(h)} \\ \widetilde{f}(B) & \xrightarrow[\widetilde{\sigma_B}]{} & \widetilde{g}(B) \end{array}$$

diyagramının değişmeli olduğunu gösterelim. H deki her $h : A \to B$ morfizmi için

$$\begin{array}{ccc} f(A) & \xrightarrow{\sigma_A} & g(A) \\ {\scriptstyle f(h)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g(h)} \\ f(B) & \xrightarrow[\sigma_B]{} & g(B) \end{array}$$

diyagramı değişmelidir yani,

$$g(h) \circ \sigma_A = \sigma_B \circ f(h)$$

dır. Önerme 3.2.4 den

$$\widetilde{g(h) \circ \sigma_A} = \widetilde{\sigma_B \circ f(h)}$$

olup , Önerme 3.2.3 ve Önerme 3.2.6 den

$$\widetilde{g}(h)\circ\widetilde{\sigma_A}=\widetilde{\sigma_B}\circ\widetilde{f}(h)$$

bulunur. O halde H deki her $h\colon A\to B$ morfizmi için

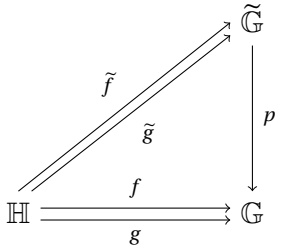
$$\begin{array}{ccc}\widetilde{f}(A) & \xrightarrow{\widetilde{\sigma_A}} & \widetilde{g}(A)\\ \Big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{f}(h)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{g}(h)}\\ \widetilde{f}(B) & \xrightarrow[\widetilde{\sigma_B}]{} & \widetilde{g}(B)\end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Böylece $\widetilde{f}$ ve $\widetilde{g}$ doğal olarak izomorftur. ■

Lemma 3.2.1. $p\colon\widetilde{\mathbb{G}}\to\mathbb{G}$ bir grupoid örtü morfizmi olsun. Eğer p morfizmler üzerinde birebir ise $\mathbb{G}$ deki her morfizmin $\widetilde{\mathbb{G}}$ da bir tek yükselmesi vardır. Yani $x,y\in G_0$ olmak üzere $a\in\mathbb{G}(x,y)$ morfizmi için $p(\widetilde{a})=a$ olacak şekilde $\widetilde{\mathbb{G}}$ da bir tek $\widetilde{a}$ morfizmi vardır.

İspat: $\mathbb{G}$ deki bir $a\colon x\to y$ morfizminin $\widetilde{\mathbb{G}}$ daki farklı iki yükselmesi $(\widetilde{a})_1\colon\widetilde{x_1}\to\widetilde{y_1}$ ve $(\widetilde{a})_2\colon\widetilde{x_2}\to\widetilde{y_2}$ olsun. $p((\widetilde{a})_1)=a=p((\widetilde{a})_2)$ olup, p morfizmler üzerinde birebir olduğundan $(\widetilde{a})_1=(\widetilde{a})_2$ dir. Yani tüm yükselmeler birbirine eşittir. O halde her morfizmin yükselmesi tektir. ■

Önerme 3.2.8. $p\colon\widetilde{\mathbb{G}}\to\mathbb{G}$ bir grupoid örtü morfizmi ve p morfizmler üzerinde birebir olsun. Herhangi bir $\mathbb{H}$ grupoidi ve $f,g\colon\mathbb{H}\to\mathbb{G}$ grupoid morfizmleri için f ve g nin yükselmeleri sırasıyla $\widetilde{f}$ ve $\widetilde{g}$ olsun ($p\widetilde{f}=f$ ve $p\widetilde{g}=g$). Bir $A\in H_0$ objesi için $\sigma_A\colon f(A)\to g(A)$, $\mathbb{G}$ de bir morfizm olmak üzere σ_A nın $\widetilde{\mathbb{G}}$ ya yükselmesi $\widetilde{\sigma_A}\colon\widetilde{f}(A)\to\widetilde{g}(A)$ dır.



İspat: Herhangi bir $A\in H_0$ objesi için $\sigma_A\colon f(A)\to g(A)$, $\mathbb{G}$ de bir morfizm ise $\mathbb{G}$ de σ_A nın tersi olan $\sigma_A^{-1}\colon g(A)\to f(A)$ morfizmi mevcuttur. $B,C\in\widetilde{G}_0$ olmak üzere σ_A

ve σ_A^{-1} morfizmlerinin yükselmeleri sırasıyla $\widetilde{\sigma_A}\colon \widetilde{f}(A) \to B$ ve $\widetilde{\sigma_A^{-1}}\colon \widetilde{g}(A) \to C$ olsun. $(\widetilde{\sigma_A})^{-1}\colon B \to \widetilde{f}(A)$ ve $(\widetilde{\sigma_A^{-1}})^{-1}\colon C \to \widetilde{g}(A)$ olup

$$p(\widetilde{\sigma_A}) = \sigma_A$$

dır ve ayrıca Önerme 3.2.2 den

$$p[(\widetilde{\sigma_A^{-1}})^{-1}] = p[((\widetilde{\sigma_A})^{-1})^{-1}] = p(\widetilde{\sigma_A}) = \sigma_A$$

olur. $p(\widetilde{\sigma_A}) = p[(\widetilde{\sigma_A^{-1}})^{-1}]$ ve p morfizmler üzerinde birebir olduğundan $\widetilde{\sigma_A} = (\widetilde{\sigma_A^{-1}})^{-1}$ olup $C = \widetilde{f}(A)$ ve $B = \widetilde{g}(A)$ dir. Yani,

$$\widetilde{\sigma_A}\colon \widetilde{f}(A) \to \widetilde{g}(A)$$

olur. Ayrıca Önerme 3.2.7 dan f ve g doğal olarak izomorf ise $\widetilde{f}$ ve $\widetilde{g}$ da doğal olarak izomorftur. ■

Önerme 3.2.9. $p\colon \widetilde{\mathbb{G}} \to \mathbb{G}$ bir grupoid örtü morfizmi, $\widetilde{\mathbb{G}}$ irtibatlı bir grupoid, $\mathbb{G}$ ise basit irtibatlı olsun. Herhangi bir $\mathbb{F}$ grupoidi için $f, g\colon \mathbb{F} \to \mathbb{G}$ birer grupoid morfizmi olsunlar. f ve g nin yükselmeleri sırasıyla $\widetilde{f}$ ve $\widetilde{g}$ olmak üzere her $A \in F_0$ objesi için $\mathbb{G}$ deki bir $\sigma_A\colon f(A) \to g(A)$ morfizminin yükselmesi

$$\widetilde{\sigma_A}\colon \widetilde{f}(A) \to \widetilde{g}(A)$$

dır.

İspat: $z \in \widetilde{G}_0$ olmak üzere $\sigma_A\colon f(A) \to g(A)$ morfizminin yükselmesi $\widetilde{\sigma_A}\colon \widetilde{f}(A) \to z$ olsun. $\widetilde{\mathbb{G}}$ irtibatlı olduğundan bir $h\colon \widetilde{f}(A) \to \widetilde{g}(A)$ morfizmi vardır. $\mathbb{G}$ basit irtibatlı olduğundan $p(h) = \sigma_A$ dır. Yani h da σ_A nın $\widetilde{f}(A)$ notasındaki bir yükselmesidir. Yükselmenin tekliğinden $h = \sigma_A$ ve $z = \widetilde{g}(A)$ olup buradan

$$\widetilde{\sigma_A}\colon \widetilde{f}(A) \to \widetilde{g}(A)$$

bulunur.

Ayrıca Önerme 3.2.7 dan f ve g doğal olarak izomorf ise $\widetilde{f}$ ve $\widetilde{g}$ da doğal olarak izomorftur. ■

4. BÖLÜM

BAZI CEBİRSEL YAPILARIN ÖRTÜ GRUPOİDLERİNE YÜKSELMELERİ

4.1. H-Grup-Grupoid Yükselmesi

Önerme 4.1.1. $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ ve $\mathbb{E}$ birer kategori ve $F\colon \mathbb{C}\times\mathbb{D}\to\mathbb{E}$ bir fanktor olmak üzere her bir $x\in C_0$ ve $y\in D_0$ objeleri için

$$F(x,-)\colon \mathbb{D}\to\mathbb{E}$$
$$F(-,y)\colon \mathbb{C}\to\mathbb{E}$$

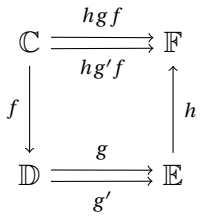
fanktorları elde edilir.

Brown [10] de fanktorların homotopisi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 4.1.1. $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{D}$ birer kategori olmak üzere $f,g\colon \mathbb{C}\to\mathbb{D}$ iki fanktor olsun. Eğer $F(-,0)=f$ ve $F(-,1)=g$ olacak şekilde bir $F\colon \mathbb{C}\times\mathscr{J}\to\mathbb{D}$ fanktoru varsa f ile g fanktorları *homotopiktir* denir ve $f\simeq g$ ile gösterilir [10].

Teorem 4.1.1. $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{D}$ iki kategori olmak üzere $\mathbb{C}$ den $\mathbb{D}$ ye fanktorların homotopik olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Teorem 4.1.2. $\mathbb{C},\mathbb{D},\mathbb{E}$ ve $\mathbb{F}$ birer kategori ve $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{D}$, $g,g'\colon \mathbb{D}\to\mathbb{E}$ ve $h\colon \mathbb{E}\to\mathbb{F}$ birer fanktor olsunlar. Yani;



olmak üzere $g\simeq g'$ ise $hgf\simeq hg'f$ dir.

Teorem 4.1.3. $\mathbb{C}$ bir kategori ve $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ bir fanktor olsun. Eğer $f\simeq 1_{\mathbb{C}}$ ise her $x,y\in C_0$ için

$$f|_{\mathbb{C}(x,y)}:\mathbb{C}(x,y)\to\mathbb{C}(f(x),f(y))$$

bijektiftir.

Teorem 4.1.4. $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{D}$ birer kategori olmak üzere $f:\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ bir homotopi denkliği ise her $x,y\in C_0$ için

$$f|_{\mathbb{C}(x,y)}:\mathbb{C}(x,y)\to\mathbb{D}(f(x),f(y))$$

bijektiftir. Böylece f objeler üzerinde bijektif ise f bir izomorfizmdir.

Önerme 4.1.2. X ve Y topolojik uzaylar olmak üzere $f,g:X\to Y$ fonksiyonları homotopik ise $\pi_1 f,\pi_1 g:\pi_1 X\to\pi_1 Y$ grupoid morfizmleri de homotopiktir [10].

Sonuç 4.1.1. X ve Y birer topolojik uzay ve $f:X\to Y$ bir homotopi denkliği ise bu durumda $\pi_1 f:\pi_1 X\to\pi_1 Y$ fanktoru da homotopi denkliğidir.

Tanım 4.1.2. $\mathbb{G}$, objelerinin sınıfı $G_0=X$ bir H-grup olacak şekilde bir grupoid olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanacak şekilde $m:G\times G\to G,(a,b)\mapsto a\circ b$, $n:G\to G,a\mapsto a^{-1}$ ve $\varepsilon:\{\star\}\to G$ fanktorları varsa $\mathbb{G}$ ye bir *H-grup-grupoid* denir.

i. $m(1_{\mathbb{G}}\times m)\simeq m(m\times 1_{\mathbb{G}})$

ii. Her $a\in G$ için $j_1,j_2:\mathbb{G}\to\mathbb{G}\times\mathbb{G}$ fanktorları $j_1(a)=(a,e)$ ve $j_2(a)=(e,a)$ şeklinde tanımlanmış olmak üzere

$$mj_1\simeq 1_{\mathbb{G}}\simeq mj_2$$

iii. Her $a\in G$ için $(1_{\mathbb{G}},n),(n,1_{\mathbb{G}}):\mathbb{G}\to\mathbb{G}\times\mathbb{G}$ fanktorları $(1_{\mathbb{G}},n)(a)=(a,a^{-1})$ ve $(n,1_{\mathbb{G}})(a)=(a^{-1},a)$ şeklinde tanımlanmış ve $c:\mathbb{G}\to\mathbb{G}$ ise e deki sabit fanktor olmak üzere

$$m(1_{\mathbb{G}},n)\simeq c\simeq m(n,1_{\mathbb{G}})$$

Önerme 4.1.3. (X,x_0) bir H-grup ise temel grupoidi $\pi_1 X$ bir H-grup-grupoid olur.

İspat: (X,x_0) bir H-grup olduğundan $\mu:(X,x_0)\times(X,x_0)\to(X,x_0),(x,y)\mapsto x\circ y$ ve $\eta:(X,x_0)\to(X,x_0),x\mapsto\bar{x}$ sürekli noktalı dönüşümleri ve

$$\mu(1_X\times\mu)\simeq\mu(\mu\times 1_X)$$

$$\mu j_1\simeq 1_X\simeq\mu j_2$$

$$\mu(1_X,\eta)\simeq c\simeq\mu(\eta,1_X)$$

noktalı homotopileri vardır. Önerme 4.1.2 den

$$\widetilde{\mu}=\pi_1\mu:\pi_1X\times\pi_1X\to\pi_1X$$

$$\widetilde{\eta}=\pi_1\eta:\pi_1X\to\pi_1X$$

funktorlarını elde ederiz. Böylece π_1X bir H-grup-grupoid olur. ■

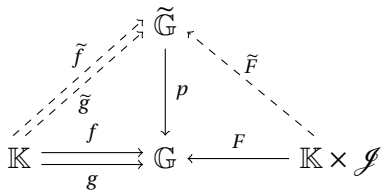
Tanım 4.1.3. $\mathbb{G}$ ve $\mathbb{H}$ iki H-grup-grupoid , $f:\mathbb{G}\to\mathbb{H}$ bir grupoid morfizmi ve $a,b\in G$ için $f(a\circ b)=f(a)\circ f(b)$ ise $f:\mathbb{G}\to\mathbb{H}$ morfizmine bir *H-grup-grupoid morfizmi* denir. Buradan objeleri H-grup-grupoidler, morfizmleri H-grup-grupoid morfizmleri olan H-grup-grupoidlerin kategorisi **HGPGD** elde edilir.

Önerme 4.1.4. $(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$ ve (X,x_0) uzayları birer H-grup olmak üzere eğer $p:(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)\to(X,x_0)$ bir H-grup morfizmi ise $\pi_1p:\pi_1\widetilde{X}\to\pi_1X$ bir H-grup-grupoid morfizmidir.

Tanım 4.1.4. $\mathbb{G}$ bir H-grup-grupoid , $x_0\in G_0$, $\widetilde{\mathbb{G}}$ bir grupoid, $\widetilde{x}_0\in\widetilde{G}_0$ ve $p:\widetilde{\mathbb{G}}\to\mathbb{G}$ ise $p(\widetilde{x}_0)=x_0$ olacak şekilde bir grupoid örtü morfizmi olsun. Eğer $p:\widetilde{\mathbb{G}}\to\mathbb{G}$ H-grup-grupoidlerin bir morfizmi ve $\widetilde{x}_0\in\widetilde{G}_0$ birim eleman olacak şekilde $\widetilde{\mathbb{G}}$ da bir H-grup yapısı varsa $\mathbb{G}$ nin H-grup yapısı $\widetilde{\mathbb{G}}$ ya yükselir denir.

Önerme 4.1.5. $p:(\widetilde{\mathbb{G}},\widetilde{x})\to(\mathbb{G},x)$ bir grupoid örtü morfizmi, $\mathbb{K}$ ise 1-irtibatlı bir groupoid olsun. $f,g:(\mathbb{K},z)\to(\mathbb{G},x)$ groupoid morfizmleri için f ile g homotopik ve yükselmeleri sırasıyla $\widetilde{f}$ ve $\widetilde{g}$ olmak üzere $\widetilde{f}$ ile $\widetilde{g}$ da homotopiktir [11].

İspat: f ile g homotopik olduklarından $F(-,0)=f$ ve $F(-,1)=g$ olacak şekilde bir $F:\mathbb{K}\times\mathscr{J}\to\mathbb{G}$ fanktoru mevcuttur. Ayrıca $\mathbb{K}$ grupoidi 1-irtibatlı olduğundan Teorem 3.2.3 gereğince $p\widetilde{F}=F$ olacak şekilde bir $\mathbb{F}:\mathbb{K}\times\mathscr{J}\to\widetilde{\mathbb{G}}$ fanktoru vardır. Böylece $\widetilde{F}(-,0)=F(-,0)=f$ ve $p\widetilde{F}(-,1)=F(-,1)=g$ olup yükselmenin tekliğinden $p\widetilde{F}(-,0)=\widetilde{f}$ ve $\widetilde{F}(-,1)=\widetilde{g}$ bulunur. Buradan $\widetilde{f}$ ile $\widetilde{g}$ homotopiktir.



■

Teorem 4.1.5. $\widetilde{\mathbb{G}}$ 1-irtibatlı bir grupoid, $\mathbb{G}$ bir H-grup-grupoid ve $p:\widetilde{\mathbb{G}}\to\mathbb{G}$ ise bir grupoid örtü morfizmi olsun. O halde $x_0\in G_0$ objesi G_0 ın birim elemanı ve $\widetilde{x}_0$ ise $p(\widetilde{x}_0)=x_0$ olacak şekilde $\widetilde{G}_0$ ın bir objesi olmak üzere $\mathbb{G}$ nin H-grup-grupoid yapısı $\widetilde{x}_0$ birim eleman olacak şekilde $\widetilde{\mathbb{G}}$ ya yükselir.

İspat: $\mathbb{G}$ bir H-grup-grupoid olduğundan aşağıdaki şartlar sağlanacak şekilde $m:\mathbb{G}\times\mathbb{G}\to\mathbb{G},(a,b)\mapsto a\circ b$ ve $n:\mathbb{G}\to\mathbb{G},a\mapsto a^{-1}$ fanktorları mevuttur.

i. $m(1_{\mathbb{G}}\times m)\simeq m(m\times 1_{\mathbb{G}})$

ii. $mj_1\simeq 1_{\mathbb{G}}\simeq mj_2$

iii. $m(1_{\mathbb{G}},n)\simeq c\simeq m(n,1_{\mathbb{G}})$

$\widetilde{\mathbb{G}}$ grupoidi 1-irtibatlı olduğundan Teorem 3.2.3 gereği m ve n fanktorları sırasıyla

$$\widetilde{m}:\widetilde{\mathbb{G}}\times\widetilde{\mathbb{G}},(\widetilde{x}_0,\widetilde{x}_0)\to\widetilde{\mathbb{G}},\widetilde{x}_0$$

ve

$$\widetilde{n}:\widetilde{\mathbb{G}},\widetilde{x}_0\to\widetilde{\mathbb{G}},\widetilde{x}_0$$

fanktorlarına yükselirler. Önerme 4.1.5 den fanktorların aşağıdaki şekildeki gibi homotopilerini elde ederiz.

i. $\widetilde{m}(1_{\widetilde{\mathbb{G}}}\times\widetilde{m})\simeq\widetilde{m}(\widetilde{m}\times 1_{\widetilde{\mathbb{G}}})$

ii. $\widetilde{m}j_1\simeq 1_{\widetilde{\mathbb{G}}}\simeq\widetilde{m}j_2$

iii. $\widetilde{m}(1_{\widetilde{\mathbb{G}}},\widetilde{n})\simeq c\simeq\widetilde{m}(\widetilde{n},1_{\widetilde{\mathbb{G}}})$

■

4.2. Grup-Grupoid Yükselmesi

İkinci bölümde grup obje tanımını verip çeşitli kategorilerdeki grup objeleri belirlemiştik. Brown and Spancer [12] referansında küçük kategorilerin kategorisi **Cat** deki grup obje grup-grupoid olarak adlandırılmıştır. Bu kesimde özel olarak kategorilerideki morfizmlerin bileşkesi soldan sağa doğru alınacaktır. Şimdi grup-grupoid tanımını Brown and Spancer [12] referansındaki gibi verelim.

Tanım 4.2.1. **Cat** tüm küçük kategorilerin kategorisi ve $\mathbb{G} = (G_0, G_1, d_0, d_1, i, \circ)$ kategorisi **Cat** deki bir grup obje olsun. O halde **1** tek objeli ve tek morfizmli kategori olmak üzere

$$\begin{array}{rccc} \bullet\colon & \mathbb{G}\times\mathbb{G} & \longrightarrow & \mathbb{G} \\ & (a,b) & \longmapsto & a\bullet b \\ \mathfrak{e}\colon & \mathbf{1} & \longrightarrow & \mathbb{G} \\ & \star & \longmapsto & \mathfrak{e}(\star)=e \\ \mathfrak{u}\colon & \mathbb{G} & \longrightarrow & \mathbb{G} \\ & a & \longmapsto & a^{-1} \end{array}$$

fanktorları mevcuttur. Burada $d_0(b) = d_1(a)$ olacak şekildeki $a, b \in G_1$ morfizmlerinin bileşkesini $a \circ b$ ile, bir $a \in G_1$ morfizminin bileşke işlemine göre tersini $\bar{a}$ ile gösterelim. Morfizmlerin sınıfı, G_1, üzerindeki grup işlemi $\bullet\colon G_1 \times G_1 \to G_1, (a,b) \mapsto a \bullet b$ bir fanktor olduğundan, $a, b, c, d \in G_1$ için $(a \circ b)$ ve $(c \circ d)$ bileşkeleri tanımlı ise

$$(a \circ b) \bullet (c \circ d) = (a \bullet c) \circ (b \bullet d)$$

şeklinde tanımlı interchange kuralı elde edilir. $a \in \mathbb{G}(x,y)$ ve $b \in \mathbb{G}(y,z)$ morfizmleri için interchange kuralından ;

$$\begin{aligned} a \circ b &= (1_y \bullet (1_y^{-1} \bullet a)) \circ (b \bullet e) \\ &= (1_y \circ b) \bullet ((1_y^{-1} \bullet a) \circ e) \\ &= b \bullet 1_y^{-1} \bullet a \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} a \circ b &= ((a \bullet 1_y^{-1}) \bullet 1_y) \circ (e \bullet b) \\ &= ((a \bullet 1_y^{-1}) \circ e) \bullet (1_y \circ b) \\ &= a \bullet 1_y^{-1} \bullet b \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi $a \circ b = a \bullet 1_y^{-1} \bullet b = 1_x$ dersek $\bar{a} = b = 1_y \bullet a^{-1} \bullet 1_x$ elde edilir. Böylece her $a \in G_1$ morfizminin tersi $\bar{a} \in G_1$ morfizmi mevcuttur. O halde $\mathbb{G} = (G_0, G_1, d_0, d_1, i, \circ)$ bir grupoiddir. Bu grupoide *grup-grupoid* denir [12].

Sonuç olarak bir grup-grupoid, grupoidlerin kategorisindeki bir grup objedir. $\mathbb{G}$ ve $\widetilde{\mathbb{G}}$ birer grup-grupoid olmak üzere $F: \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ fanktoru $\mathbb{G}$ üzerindeki grup yapısını koruyorsa F fanktoruna bir *grup-grupoid morfizmi* denir. Böylelikle grup-grupoidlerin yani grupoidlerin kategorisindeki grup objelerin kategorisi **GRGPD** elde edilir. Yine Brown and Spancer [12] da grupların kategorisindeki crossed modüllerin kategorisi **XMOD(GRP)** ile **GRGPD** kategorisinin denk olduğu gösterilmiştir. Buna benzer olarak Porter [13] referansında grupların kategorisindeki iç kategorilerin kategorisi **CAT(GRP)** ile **XMOD(GRP)** kategorisinin denk olduğu gösterilmiştir.

Önerme 4.2.1. *X bir topolojik grup olmak üzere X in temel grupoidi $\pi_1(X)$ bir grup-grupoiddir.*

Mucuk [14] referansında bir topolojik grubun topolojik grup örtüleri ile temel grupoidinin grup-grupoid örtüleri arasındaki denklik verilmiştir.

Önerme 4.2.2. *X, topolojik uzayı yarı-lokal 1-irtibatlı olan bir topolojik grup olmak üzere X in topolojik grup örtülerinin kategorisi **TGCov/X** ile $\pi_1(X)$ in grup-grupoid örtülerinin kategorisi **GRGPDCov/π_1(X)** denktir.*

Şimdi grup-grupoidin grup yapısının bazı şartlar altında örtü grupoidine yükseldiğini gösterelim.

Teorem 4.2.1. *$\widetilde{\mathbb{G}}$ bir grupoid ve $\mathbb{G}$ ise grupoidi irtibatlı olan bir grup-grupoid olsun. $p: \widetilde{\mathbb{G}} \to \mathbb{G}$ bir grupoid örtü morfizmi olmak üzere $\theta \in \mathbb{G}_0$ birim eleman ve $\widetilde{\theta} \in \widetilde{\mathbb{G}}_0$ da $p(\widetilde{\theta}) = \theta$ olacak şekilde bir obje ve p nin C karakteristik grubu $\mathbb{G}$ nin grup işlemine göre kapalı olsun. Bu durumda $\mathbb{G}$ nin grup yapısı $\widetilde{\theta}$ birim eleman olacak şekilde $\widetilde{\mathbb{G}}$ ya yükselir.*

İspat: $p: \widetilde{\mathbb{G}}, \widetilde{\theta} \to \mathbb{G}, \theta$ nin $\widetilde{\theta}$ daki karakteristik grubu C olsun. Karakteristik grubu C olan bir $q: \widetilde{\mathbb{G}}_C, \widetilde{x} \to \mathbb{G}, \theta$ grupoid örtü morfizmi vardır. Burada p ile q denktir. Yani $\mathbb{G}$ nin grup yapısının $\widetilde{\mathbb{G}}_C$ ya yükseldiğini göstermek yeterlidir. $\mathbb{G}$ üzerindeki grup işlemi

$$\mathbb{G} \times \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{G}, (g,h) \longmapsto g+h$$

şeklinde tanımlansın. $(\widetilde{G}_C)_0$ üzerindeki grup işlemi

$$(\widetilde{G}_C)_0 \times (\widetilde{G}_C)_0 \longrightarrow (\widetilde{G}_C)_0, (C_a, C_b) \longmapsto C_a + C_b = C_{a+b}$$

olarak, $\widetilde{G}_C$ üzerindeki grup işlemi ise

$$\widetilde{G}_C \times \widetilde{G}_C \longrightarrow \widetilde{G}_C, ((g, C_a), (h, C_b)) \longmapsto (g, C_a) + (h, C_b) = (g + h, C_{a+b})$$

olarak tanımlansın. Burada $a, b \in St_G\theta$ olup θ birim eleman olduğundan $a + b \in St_G\theta$ olur. Ayrıca işlemler iyi tanımlıdır. Yani $C_a = C_{a'}$ ve $C_b = C_{b'}$ ise $C_{a+b} = C_{a'+b'}$ dir. Gerçekten $C_a = C_{a'}$ ve $C_b = C_{b'}$ ise $a' \circ a^{-1}, b' \circ b^{-1} \in C$ olup interchange kuralından

$$(a' + b') \circ (a + b)^{-1} = (a' + b') \circ (a^{-1} + b^{-1}) = (a' \circ a^{-1}) + (b' \circ b^{-1})$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece $C_{a+b} = C_{a'+b'}$ olur. Şimdi $(\widetilde{G}_C)_0$ nin bir grup olduğunu gösterelim.

i. Her $a, b, c \in St_G\theta$ için

$$\begin{aligned}(C_a + C_b) + C_c &= C_{a+b} + C_c \\ &= C_{(a+b)+c} \\ &= C_{a+(b+c)} \\ &= C_a + C_{b+c} \\ &= C_a + (C_b + C_c)\end{aligned}$$

olup birleşme özelliği sağlanır.

ii. Her $a \in St_G\theta$ için

$$C_a + C_{1_\theta} = C_{a+1_\theta} = C_a$$
$$C_{1_\theta} + C_a = C_{1_\theta + a} = C_a$$

olduğundan C_{1_θ} çift taraflı birim eleman olur.

iii. Her $a \in St_G\theta$ için

$$C_{a^{-1}} + C_a = C_{a+a^{-1}} = C_{1_\theta}$$
$$C_a + C_{a^{-1}} = C_{a^{-1}+a} = C_{1_\theta}$$

olduğundan her $C_a \in (\widetilde{\mathbb{G}}_C)_0$ objesi çift taraflı terse sahiptir.

Şimdi de $\widetilde{G}_C$ nin bir grup olduğunu gösterelim.

i. Her $a,b,c \in St_G\theta$ ve $g,h,k \in G$ için

$$\begin{aligned}((g,C_a)+(h,C_b))+(k,C_c) &= (g+h,C_{a+b})+(k,C_c)\\ &= ((g+h)+k, C_{(a+b)+c})\\ &= (g+(h+k), C_{a+(b+c)})\\ &= (g,C_a)+(h+k,C_{b+c})\\ &= (g,C_a)+((h,C_b)+(k,C_c))\end{aligned}$$

olup birleşme özelliği sağlanır.

ii. Her $a \in St_G\theta$ ve $g \in G$ için

$$\begin{aligned}(g,C_a)+(1_\theta + C_{1_\theta}) &= (g+1_\theta, C_{a+1_\theta}) = (g,C_a)\\ (1_\theta + C_{1_\theta})+(g,C_a) &= (1_\theta + g, C_{1_\theta+a}) = (g,C_a)\end{aligned}$$

olduğundan $(1_\theta, C_{1_\theta})$ çift taraflı birim eleman olur.

iii. Her $a \in St_G\theta$ ve $g \in G$ için

$$\begin{aligned}(g,C_a)+(\bar{g},C_{\bar{a}}) &= (1_\theta, C_{1_\theta})\\ (\bar{g},C_{\bar{a}})+(g,C_a) &= (1_\theta, C_{1_\theta})\end{aligned}$$

olduğundan her $(g,C_a) \in \widetilde{G}_C$ objesi çift taraflı terse sahiptir.

Yani $\widetilde{G}_C$ üzerinde bir grup yapısı vardır. Şimdi ise interchange kuralının sağlandığını gösterelim. Her $g,h,k,t \in G$ ve $a,b,c,d \in St_G\theta$ için

$$\begin{aligned}((g,C_a)\circ(k,C_c))+((h,C_b)\circ(t,C_d)) &= (g\circ k, C_a)+(h\circ t, C_b)\\ &= ((g\circ k)+(h\circ t), C_{a+b})\\ ((g,C_a)+(h,C_b))\circ((k,C_c)+(t,C_d)) &= (g+h,C_{a+b})\circ(k+t,C_{c+d})\\ &= ((g+h)\circ(k+t), C_{a+b})\end{aligned}$$

$\mathbb{G}$ deki interchange kuralından

$$(g\circ k)+(h\circ t) = (g+h)\circ(k+t)$$

olup, yukarıdaki ifadeler birbirine eşittir. Son olarak $q\colon \widetilde{\mathbb{G}}_C, \widetilde{x} \to \mathbb{G}, \theta$ nın bir grup-grupoid örtü morfizmi olduğunu gösterelim. Her $g,h \in G$ ve $a,b \in St_G\theta$ için

$$\begin{aligned} q((g,C_a)+(h,C_b)) &= q(g+h, C_{a+b}) \\ &= g+h \\ &= q(g,C_a)+q(h,C_b) \end{aligned}$$

olup $\mathbb{G}$ nin grup yapısı $\widetilde{\mathbb{G}}_C$ ya yükselir. ■

5. BÖLÜM

KATEGORİK GRUPLARIN ÖRTÜLERİ VE YÜKSELMELERİ

Bu bölümde önce ilk kesimde fanktorların homotopisi ile doğal dönüşümler ve doğal izomorfizmler arasındaki ilişkiler, daha sonra ikinci kesimde monoidal kategori ve kategorik gruplar tanıtılıp, kategorik grupların örtü grupoidine yükselmeleri incelenmiştir.

5.1. Fanktorların Homotopisi

Önerme 5.1.1. $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ ve $\mathbb{E}$ birer kategori olmak üzere bir $F\colon \mathbb{C}\times\mathbb{D}\to\mathbb{E}$ fanktoru verilsin. $u\in C_0$ ve $v\in D_0$ olsun. Aşağıdaki şekilde tanımlanan $F(-,v)\colon \mathbb{C}\to\mathbb{E}$ ve $F(u,-)\colon \mathbb{D}\to\mathbb{E}$ birer fanktordur [10].

i. Her $x\in C_0$ için $F(-,v)(x)=F(x,v)$ ve her $a\in\mathbb{C}(x,y)$ için $F(-,v)(a)=F(a,1_v)$

ii. Her $z\in D_0$ için $F(u,-)(z)=F(u,z)$ ve her $b\in\mathbb{D}(z,t)$ için $F(u,-)(b)=F(1_u,b)$

İspat: F bir fanktor olduğundan, her $x\in C_0$ için $F(-,v)(x)=F(x,v)\in E_0$ ve her $z\in D_0$ için $F(u,-)(z)=F(u,z)\in E_0$ dır. Ayrıca her $a\in\mathbb{C}(x,y)$ için

$$\begin{aligned} F(-,v)(a)&=F(a,1_v)\colon F(x,v)\to F(y,v)\\ &=F(a,1_v)\colon F(-,v)(x)\to F(-,v)(y)\end{aligned}$$

yani $F(-,v)(a)\in\mathbb{E}(F(-,v)(x),F(-,v)(y))$ ve her $b\in\mathbb{D}(z,t)$ için

$$\begin{aligned} F(u,-)(b)&=F(1_u,b)\colon F(u,z)\to F(u,t)\\ &=F(1_u,b)\colon F(u,-)(z)\to F(u,-)(t)\end{aligned}$$

yani $F(u,-)(b) \in \mathbb{E}(F(u,-)(z), F(u,-)(t))$ dır. Şimdi bu dönüşümlerin bileşke işlemini koruduğunu gösterelim. $(g,f) \in D_1 \times_{D_0} D_1$ için

$$\begin{aligned} F(u,-)(g \circ f) = F(1_u, g \circ f) &= F(1_u \circ 1_u, g \circ f) \\ &= F(1_u, g) \circ F(1_u, f) \\ &= F(u,-)(g) \circ F(u,-)(f) \end{aligned}$$

olur. Diğeride benzer şekilde gösterilebilir. Son olarak birimleri koruduğunu gösterelim. $1_x \in \mathbb{C}(x,x)$ için

$$F(-,v)(1_x) = F(1_x, 1_v) = 1_{F(x,v)} = 1_{F(-,v)(x)}$$

ve $1_z \in \mathbb{D}(z,z)$ için

$$F(u,-)(1_z) = F(1_u, 1_z) = 1_{F(u,z)} = 1_{F(u,-)(z)}$$

olup $F(-,v)\colon \mathbb{C} \to \mathbb{E}$ ve $F(u,-)\colon \mathbb{D} \to \mathbb{E}$ birer fanktordur. ■

Brown [10] da fanktorların homotopisi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 5.1.1. $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{D}$ birer kategori olmak üzere $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ iki fanktor olsun. Eğer $F(-,0) = f$ ve $F(-,1) = g$ olacak şekilde bir $F\colon \mathbb{C} \times \mathscr{J} \to \mathbb{D}$ fanktoru varsa f ile g fanktorları *homotopiktir* denir. Bu bölümde, bu anlamdaki homotopi $f \simeq_1 g$ ile gösterilecektir [10].

Tanım 5.1.2. $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{D}$ birer kategori olmak üzere $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ iki fanktor olsun. $\mathbb{C}$ nin her $x \in C_0$ objesini $\mathbb{D}$ nin bir $\sigma_x\colon f(x) \to g(x)$ morfizmine dönüştüren bir $\sigma\colon C_0 \to D_1$ dönüşümü verilsin. Eğer $\mathbb{C}$ nin her bir $a\colon x \to y$ morfizmi için

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{\sigma_x} & g(x) \\ {\scriptstyle f(a)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g(a)} \\ f(y) & \xrightarrow[\sigma_y]{} & g(y) \end{array}$$

diyagramı değişmeli ise σ ya bir *doğal dönüşüm* denir ve bu bölümde $f \simeq_2 g$ olarak gösterilecektir.

Diğer yandan fanktorların başka bir homotopisi Lee [15] de aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 5.1.3. $f, g: \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ iki fanktor olsun. $\varphi_0 = f$ ve $\varphi_n = g$ olmak üzere, $i = 0, 1, ..., n$ için $\varphi_i: \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ bir fanktor ve her i için φ_i den φ_{i+1} e bir doğal dönüşüm varsa f ile g ye homotopiktir denir.

Bu tanımda özel olarak $n = 1$ alınırsa, iki fanktorun homotopik olması ile aralarında bir doğal izomorfizm olmasının denk olduğu görülür.

Tanım 5.1.4. $f, g: \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ fanktorları verilsin. Bir $\sigma: f \to g$ doğal dönüşümünde her bir $x \in C_0$ için $\sigma_x: f(x) \to g(x)$, $\mathbb{D}$ de bir izomorfizm ise σ ya bir *doğal izomorfizm*, f ile g ye de *doğal olarak denktir* denir ve bu bölümde $f \simeq_3 g$ şeklinde gösterilecektir.

Önerme 5.1.2. $f, g: \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ fanktorları verilsin. Eğer $f \simeq_1 g$ ise $f \simeq_2 g$ dir.

İspat: $f \simeq_1 g$ olsun. O halde $F(-,0) = f$ ve $F(-,1) = g$ olacak şekilde bir $F: \mathbb{C} \times \mathscr{J} \to \mathbb{D}$ fanktoru vardır. Bir $\sigma: f \to g$ doğal dönüşümünü aşağıdaki şekilde tanımlayalım.
Her $A \in C_0$ için

$$\sigma_A: \underbrace{F(A,0)}_{f(A)} \xrightarrow{F(A,-)(\iota) = F(1_A, \iota)} \underbrace{F(A,1)}_{g(A)}$$

olur. Şimdi $\mathbb{C}$ de bir $\alpha: A \to B$ morfizmi için

$$\begin{array}{ccc} f(A) & \xrightarrow{\sigma_A} & g(A) \\ {\scriptstyle f(\alpha)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f(\alpha)} \\ f(B) & \xrightarrow[\sigma_B]{} & g(B) \end{array}$$

diyagramının yani

$$\begin{array}{ccc} F(A,0) & \xrightarrow{F(1_A, \iota)} & F(A,1) \\ {\scriptstyle F(\alpha,0)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(\alpha,1)} \\ F(B,0) & \xrightarrow[F(1_B, \iota)]{} & F(B,1) \end{array}$$

diyagramının değişmeli olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} F(\alpha,1)\circ F(1_A,\iota) &= F((\alpha,1)\circ(1_A,\iota)) \\ &= F(\alpha\circ 1_A, 1\circ\iota) = F(\alpha,1) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} F(1_B,\iota)\circ F(\alpha,0) &= F((1_B,\iota)\circ(\alpha,0)) \\ &= F(1_B\circ\alpha,\iota\circ 0) = F(\alpha,1) \end{aligned}$$

olduğundan diyagram değişmelidir. O halde $f \simeq_2 g$ dir. Ayrıca her $A \in C_0$ için

$$\delta_A : \underbrace{F(A,1)}_{g(A)} \xrightarrow{F(A,-)(\iota^{-1}) = F(1_A,\iota^{-1})} \underbrace{F(A,0)}_{f(A)}$$

morfizmi σ_A morfizminin tersidir. Yani

$$\delta_A \circ \sigma_A = 1_{g(A)}$$
$$\sigma_A \circ \delta_A = 1_{f(A)}$$

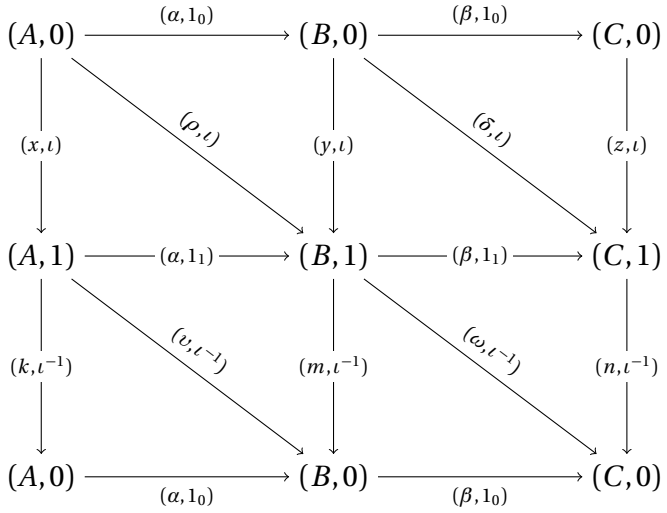
olur. Böylece σ_A bir izomorfizmdir. Dolayısıyla $\sigma : f \to g$ bir doğal izomorfizmdir ve $f \simeq_3 g$ dir. ■

Önerme 5.1.3. $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ fanktorları verilsin. $f \simeq_3 g$ ancak ve ancak $f \simeq_1 g$ dir.

İspat: **(⇒)** $f \simeq_3 g$ olsun. O halde her $A, B \in C_0$ objesi ve $\alpha \in \mathbb{C}(A,B)$ morfizmi için

$$\begin{array}{ccc} A & & f(A) \xrightarrow{\sigma_A} g(A) \\ \alpha \downarrow & \qquad & f(\alpha)\downarrow \qquad\qquad \downarrow g(\alpha) \\ B & & f(B) \xrightarrow[\sigma_B]{} g(B) \end{array}$$

diyagramı değişmelidir ve $\sigma_A : f(A) \to g(A)$ ile $\sigma_B : f(B) \to g(B)$, $\mathbb{D}$ de birer izomorfizmdirler. Şimdi bir $F : \mathbb{C} \times \mathscr{J} \to \mathbb{D}$ fanktoru tanımlayalım. $A, B, C \in C_0$ olmak üzere $\mathbb{C} \times \mathscr{J}$ de



diyagramı verilsin. F dönüşümünü objeler üzerinde

$$F((A,0)) = f(A) = F(-,0)(A)$$
$$F((B,1)) = g(B) = F(-,1)(B)$$

şeklinde tanımlayalım. Morfizmler üzerinde ise

$$F((\alpha,1_0)) = f(\alpha) = F(-,0)(\alpha)$$
$$F((\alpha,1_1)) = g(\alpha) = F(-,1)(\alpha)$$
$$F((x,\iota)) = \sigma_A$$
$$F((\rho,\iota)) = g(\alpha)\circ\sigma_A$$
$$F((\upsilon,\iota^{-1})) = f(\alpha)\circ(\sigma_A)^{-1}$$
$$F((\beta,1_0)) = f(\beta) = F(-,0)(\beta)$$
$$F((\beta,1_1)) = g(\beta) = F(-,1)(\beta)$$
$$F((k,\iota^{-1})) = (\sigma_A)^{-1}$$

şeklinde tanımlanırsa $F\colon \mathbb{C}\times\mathscr{J}\to\mathbb{D}$ dönüşümü $F(-,0)=f$ ve $F(-,1)=g$ olacak şekilde bir fanktor olur. O halde $f\simeq_1 g$ dir.

($\Leftarrow$)Önerme 5.1.2 de gösterildi. ■

Sonuç 5.1.1. O halde kategorilerin denkliğinde, doğal izomorfizm yerine fanktorların homotopisi kullanılabilir. Yani $F\colon\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ fanktoru verildiğinde $GF\simeq_1 1_{\mathbb{C}}$, $FG\simeq_1 1_{\mathbb{D}}$ homotopik olacak şekilde bir $G\colon\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ fanktoru varsa $\mathbb{C}$ ile $\mathbb{D}$ kategorileri denktir.2

Not 5.1.1. $f,g: X \to Y$ sürekli fonksiyonları homotopik ise $F(-,0) = f$ ve $F(-,1) = g$ olacak şekilde sürekli bir $F: X \times \mathbb{I} \to Y$ fonksiyonu vardır. Buradan her $x \in X$ için

$$\begin{array}{rccccc} \sigma_x: & \mathbb{I} & \longrightarrow & X \times \mathbb{I} & \longrightarrow & Y \\ & t & \longmapsto & (x,t) & \longmapsto & F(x,t) \end{array}$$

fonksiyonu süreklidir. O halde

$$\sigma_x(0) = F(x,0) = f(x)$$

$$\sigma_x(1) = F(x,1) = g(x)$$

olup $\sigma_x: f(x) \to g(x)$ bir eğridir.

Önerme 5.1.4. $f,g: X \to Y$ sürekli fonksiyonları homotopik ise $\pi_1 f, \pi_1 g: \pi_1 X \to \pi_1 Y$ fanktorları doğal olarak izomorftur. Yani $\pi_1 f \simeq_3 \pi_1 g$ dir.

İspat: $f,g: X \to Y$ fonksiyonları homotopik ise $F(-,0) = f$ ve $F(-,1) = g$ olacak şekilde sürekli bir $F: X \times \mathbb{I} \to Y$ fonksiyonu vardır. Şimdi bir $\sigma: \pi_1 f \to \pi_1 g$ doğal izomorfizmi tanımlayalım. Yani her $x, y \in (\pi_1 X)_0$ objesi ve her $\alpha \in \pi_1 X(x,y)$ morfizmi için

$$\begin{array}{ccc} (\pi_1 f)(x) & \xrightarrow{\sigma_x} & (\pi_1 g)(x) \\ {\scriptstyle (\pi_1 f)[\alpha]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\pi_1 g)[\alpha]} \\ (\pi_1 f)(y) & \xrightarrow[\sigma_y]{} & (\pi_1 g)(y) \end{array}$$

diyagramı veya bu diyagrama eşit olan

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{\sigma_x} & g(x) \\ {\scriptstyle [f\alpha]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [g\alpha]} \\ f(y) & \xrightarrow[\sigma_y]{} & g(y) \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde σ_x ve σ_y izomorfizmleri tanımlamalıyız. Burada F tarafından üretilen $\pi_1 F = F_*: \pi_1(X \times \mathbb{I}) \to \pi_1(Y)$ grupoid morfizmi vardır. $X \times \mathbb{I}$ uzayında $x \in X$ için $1_x: x \to x$, x noktasındaki birim eğri ve $\iota: 0 \to 1$ ise $\mathbb{I}$ da 0 noktasından 1 noktasına giden eğri olsun. Şimdi $\pi_1(X \times \mathbb{I})$ grupoidinde aşağıdaki diyagramı düşünelim.

$$\begin{array}{ccc} (x,0) & \xrightarrow{[(1_x,\iota)]} & (x,1) \\ {\scriptstyle [(\alpha,1_0)]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [(\alpha,1_1)]} \\ (y,0) & \xrightarrow[[(1_y,\iota)]]{} & (y,1) \end{array}$$

Bu diyagram değişmelidir. Gerçekten;

$$\begin{aligned} [(1_y,\iota)]\circ[(\alpha,1_0)] &= [(1_y,\iota)\circ(\alpha,1_0)] \\ &= [(\alpha,\iota)] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} [(\alpha,1_1)]\circ[(1_x,\iota)] &= [(\alpha,1_1)\circ(1_x,\iota)] \\ &= [(\alpha,\iota)] \end{aligned}$$

eşitliklerinden diyagram değişmelidir. Bu diyagramın $\pi_1 F = F_*$ altında $\pi_1(Y)$ grupoidindeki görüntüsü

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{[F(1_x,\iota)]} & g(x) \\ {\scriptstyle [f\alpha]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [g\alpha]} \\ f(y) & \xrightarrow[[F(1_y,\iota)]]{} & g(y) \end{array}$$

diyagramıdır ve $\pi_1 F = F_*$ bir fanktor olduğundan bu diyagram da değişmelidir. O halde her $x \in (\pi_1 X)_0$ objesi için $\sigma_x = [F(1_x,\iota)]$ olarak alırsak $\pi_1 f \simeq_3 \pi_1 g$ olduğu görülür. Burada her $x \in (\pi_1 X)_0$ için $\sigma_x = [F(1_x,\iota)]$ morfizminin tersi $\sigma_x^{-1} = [F(1_x,\iota^{-1})]$ morfizmidir. ■

Önerme 5.1.5. $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ iki fanktor olmak üzere $\sigma : f \to g$ doğal dönüşümü bir doğal izomorfizmdir ancak ve ancak $\sigma'\sigma = 1_f$ ve $\sigma\sigma' = 1_g$ olacak şekilde bir $\sigma' : g \to f$ doğal dönüşümü vardır. Burada $1_f : f \to f$ birim doğal dönüşümdür. Yani $1_{f_A} = 1_{f(A)}$ dır. Ayrıca σ' de bir doğal izomorfizm olur.

Önerme 5.1.6. Fanktorların doğal izomorf olması bir denklik bağıntısıdır.

Önerme 5.1.7. $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ ve $\mathbb{E}$ birer kategori, $f, f' : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ ve $g, g' : \mathbb{D} \to \mathbb{E}$ birer fanktor olsunlar. Eğer $f \simeq_3 f'$ ve $g \simeq_3 g'$ ise $g \circ f \simeq_3 g' \circ f'$ dır.

İspat: $A, B \in C_0$ ve $x \in \mathbb{C}(A,B)$ olsun. $f \simeq_3 f'$ olduğundan

$$\begin{array}{ccc} f(A) & \xrightarrow{\sigma_A} & f'(A) \\ {\scriptstyle f(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'(x)} \\ f(B) & \xrightarrow[\sigma_B]{} & f'(B) \end{array}$$

diyagramı değişmeli ve σ_A ile σ_B birer izomorfizmdir. g bir fanktor olduğundan

$$\begin{array}{ccc} g(f(A)) & \xrightarrow{g(\sigma_A)} & g(f'(A)) \\ {\scriptstyle g(f(x))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g(f'(x))} \\ g(f(B)) & \xrightarrow[g(\sigma_B)]{} & g(f'(B)) \end{array}$$

diyagramı, $g \simeq_3 g'$ olduğundan $f'(x) \in \mathbb{C}(f'(A), f'(B))$ için

$$\begin{array}{ccc} g(f'(A)) & \xrightarrow{\mu_{f'(A)}} & g'(f'(A)) \\ {\scriptstyle g(f'(x))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g'(f'(x))} \\ g(f'(B)) & \xrightarrow[\mu_{f'(B)}]{} & g'(f'(B)) \end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Bu iki diyagramı birleştirerek oluşturulan

$$\begin{array}{ccccc} g(f(A)) & \xrightarrow{g(\sigma_A)} & g(f'(A)) & \xrightarrow{\mu_{f'(A)}} & g'(f'(A)) \\ {\scriptstyle g(f(x))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g(f'(x))} & & \downarrow{\scriptstyle g'(f'(x))} \\ g(f(B)) & \xrightarrow[g(\sigma_B)]{} & g(f'(B)) & \xrightarrow[\mu_{f'(B)}]{} & g'(f'(B)) \end{array}$$

diyagramından

$$\begin{array}{ccc} g(f(A)) & \xrightarrow{\mu_{f'(A)} \circ g(\sigma_A)} & g'(f'(A)) \\ {\scriptstyle g(f(x))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g'(f'(x))} \\ g(f(B)) & \xrightarrow[\mu_{f'(B)} \circ g(\sigma_B)]{} & g'(f'(B)) \end{array}$$

diyagramının değişmeli olduğu ve $\mu_{f'(A)} \circ g(\sigma_A)$ ile $\mu_{f'(B)} \circ g(\sigma_B)$ morfizmlerinin izomorfizm olduğu görülür. Yani $g \circ f \simeq_3 g' \circ f'$ dir. ■

5.2. Kategorik Gruplar

Kategorik gruplar, halka teorsi, grup kohomolojisi ve cebirsel topoloji için kullanışlı bir araçtırlar. Örneğin srict kategorik gruplar, küçük kategorilerin kategorisindeki grup objeler yani grup-grupoidlerdir ve böylece crossed modüllere karşılık gelirler. Şimdi kategorik grupları tanımlamak için öncelikle monoidal kategori kavramını tanıtıp bazı özelliklerini verelim.

Tanım 5.2.1. $\mathbb{M}$ bir kategori, $\otimes\colon \mathbb{M}\times\mathbb{M}\to\mathbb{M}$ bir fanktor $I\in M_0$ olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan $\mathbb{M}=(\mathbb{M},\otimes,I,\alpha,\mathscr{L},\mathscr{R})$ sistemine bir *monoidal (tensör) kategori* denir.

i. Her $A,B,C\in M_0$ için

$$\alpha=\alpha_{A,B,C}\colon A\otimes(B\otimes C)\to(A\otimes B)\otimes C$$

bir doğal izomorfizm ve her $A,B,C,D\in M_0$ için

$$\begin{array}{ccccc} A\otimes(B\otimes(C\otimes D)) & \xrightarrow{\alpha_{A,B,(C\otimes D)}} & (A\otimes B)\otimes(C\otimes D) & \xrightarrow{\alpha_{(A\otimes B),C,D}} & ((A\otimes B)\otimes C)\otimes D \\ \downarrow{\scriptstyle 1_A\otimes\alpha_{B,C,D}} & & & & \uparrow{\scriptstyle \alpha_{A,B,C}\otimes 1_D} \\ A\otimes((B\otimes C)\otimes D) & & \xrightarrow[\alpha_{A,(B\otimes C),D}]{} & & (A\otimes(B\otimes C))\otimes D \end{array}$$

diyagramı değişmelidir.

ii. Her $A\in M_0$ için

$$\mathscr{L}_A\colon I\otimes A\to A \quad ve \quad \mathscr{R}_A\colon A\otimes I\to A$$

birer doğal izomorfizm ve her $A,B\in M_0$ için

$$\begin{array}{ccc} A\otimes(I\otimes B) & \xrightarrow{\alpha_{A,I,B}} & (A\otimes I)\otimes B \\ & {\scriptstyle 1_A\otimes\mathscr{L}_B}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \mathscr{R}_A\otimes 1_B} & \\ & A\otimes B & \end{array}$$

diyagramı değişmelidir.

Eğer yukarıdaki izomorfizmler eşitlik olarak alınırsa, bu şekildeki monoidal kategoriye *strict monoidal (tensör) kategori* denir.

Örnek 5.2.1. X bir topolojik monoid ise, X in temel grupoidi $\pi_1 X$ bir strict monoidal kategoridir.

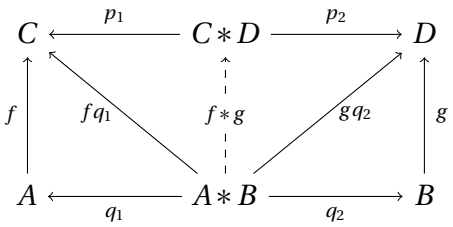
Örnek 5.2.2. $\mathbb{C}$ bir kategori olmak üzere $\mathbb{C}$ den $\mathbb{C}$ ye tüm fanktorların kategorisi $\textbf{END}(\mathbb{C})$ bir strict monoidal kategoridir. Burada $\textbf{END}(\mathbb{C})$ kategorisinin objeleri $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ şeklindeki fanktorlar, morfizmleri ise $f \xrightarrow{\sigma} g$ doğal dönüşümlerdir. $\textbf{END}(\mathbb{C})$ üzerindeki bifanktor ise fanktorların bileşkesi olarak tanımlanır.

Örnek 5.2.3. $\mathbb{C}$ sonlu çarpıma ($A, B \in C_0$ ise $A * B \in C_0$) ve bitiş objesine (T) sahip bir kategori ise $\mathbb{C}$ bu çarpma işlemine göre bir monoidal kategoridir.

$\mathbb{C}$ nin bir monoidal kategori olduğunu göstermek için öncelikle

$$\begin{array}{rccc} *: & \mathbb{C}\times\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (A,B) & \longmapsto & A*B \end{array}$$

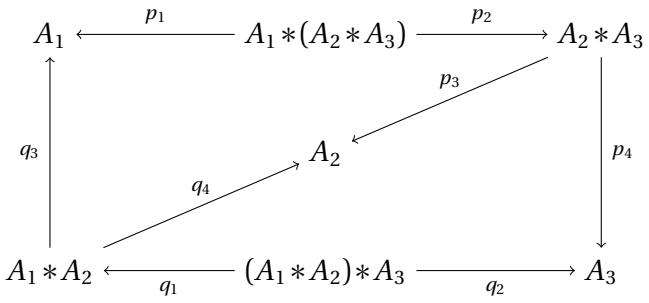
çarpma işleminin bir bifanktor olduğunu göstermeliyiz. Gerçekten $\mathbb{C}$ sonlu çarpıma sahip olduğundan her $A, B \in C_0$ obje çifti için $A * B$ tanımlıdır. Ayrıca $f: A \to C$ ve $g: B \to D$ morfizmleri için $f * g$ morfizmi



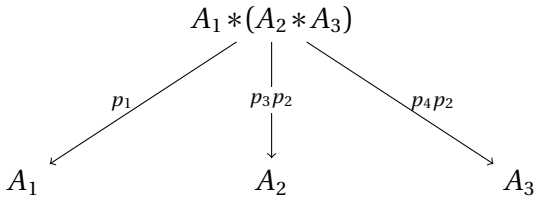
diyagramını değişmeli yapacak şekildeki tek fonksiyondur. Yani $f * g$ iyi tanımlıdır. Şimdi $A_1, A_2, A_3 \in C_0$ objeleri için

$$A_1 * (A_2 * A_3) \cong (A_1 * A_2) * A_3$$

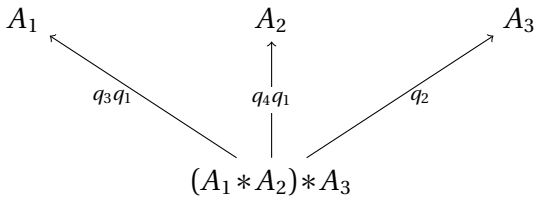
olduğunu göstermeliyiz. Önce aşağıdaki diyagramı düşünelim.



Burada



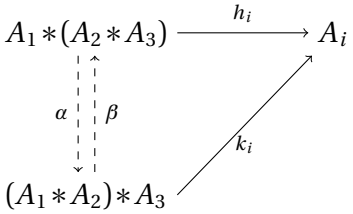
ve



diyagramları birer çarpım diyagramıdır. Eğer bu diyagramlar için

$$h_1 = p_1, \quad h_2 = p_3 p_2, \quad h_3 = p_4 p_2, \quad k_1 = q_3 q_1, \quad k_2 = q_4 q_1, \quad k_3 = q_2$$

dersek



diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek $\alpha : A_1 * (A_2 * A_3) \to (A_1 * A_2) * A_3$ morfizmi ve bir tek $\beta : (A_1 * A_2) * A_3 \to A_1 * (A_2 * A_3)$ morfizmi vardır. Böylece

$$A_1 * (A_2 * A_3) \cong (A_1 * A_2) * A_3$$

dir. Yani α bir izomorfizm ve $\beta = \alpha^{-1}$ dir.

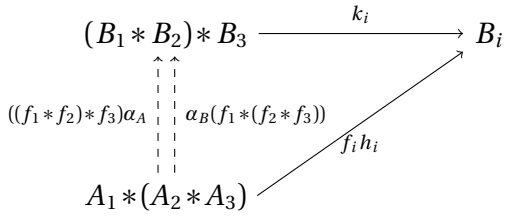
Şimdi bu α izomorfizminin doğal olduğunu yani $B_1, B_2, B_3 \in C_0$ objeleri ve $f_i : A_i \to B_i$ morfizmleri için

$$\begin{array}{ccc} A_1 * (A_2 * A_3) & \xrightarrow{\alpha_{A_1,A_2,A_3}} & (A_1 * A_2) * A_3 \\ \downarrow{\scriptstyle f_1 * (f_2 * f_3)} & & \downarrow{\scriptstyle (f_1 * f_2) * f_3} \\ B_1 * (B_2 * B_3) & \xrightarrow[\alpha_{B_1,B_2,B_3}]{} & (B_1 * B_2) * B_3 \end{array}$$

diyagramının değişmeli olduğunu göstermeliyiz. Burada

$$(B_1 * B_2) * B_3 \xrightarrow{k_i} B_i$$

diyagramının bir çarpım diyagramı olduğunu biliyoruz. O halde $\alpha_{A_1,A_2,A_3} = \alpha_A$ ve $\alpha_{B_1,B_2,B_3} = \alpha_B$ dersek



diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek $A_1 * (A_2 * A_3) \longrightarrow (B_1 * B_2) * B_3$ morfizmi olacağından $((f_1 * f_2) * f_3)\alpha_{A_1,A_2,A_3} = \alpha_{B_1,B_2,B_3}(f_1 * (f_2 * f_3))$ dir. Yani α bir doğal izomorfizmdir.

Şimdide beşgen diyagramın değişmeli olduğunu gösterelim. $A_1, A_2, A_3, A_4 \in C_0$ objeleri için

$$((A_1 * A_2) * A_3) * A_4 \xrightarrow{p_i} A_i$$

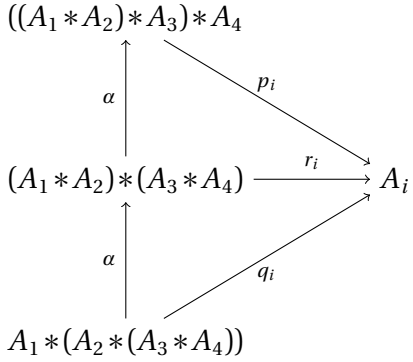
$$(A_1 * A_2) * (A_3 * A_4) \xrightarrow{r_i} A_i$$

$$A_1*(A_2*(A_3*A_4)) \xrightarrow{\quad q_i \quad} A_i$$

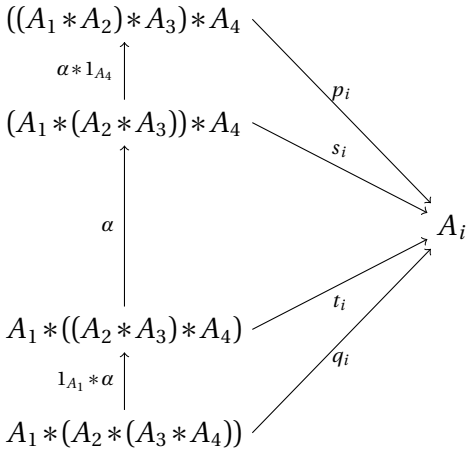
$$(A_1*(A_2*A_3))*A_4 \xrightarrow{\quad s_i \quad} A_i$$

$$A_1*((A_2*A_3)*A_4) \xrightarrow{\quad t_i \quad} A_i$$

diyagramları çarpım diyagramlarıdır. O halde



diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek $\alpha\colon A_1*(A_2*(A_3*A_4)) \to (A_1*A_2)*(A_3*A_4)$ morfizmi ve bir tek $\alpha\colon (A_1*A_2)*(A_3*A_4) \to ((A_1*A_2)*A_3)*A_4$ morfizmi vardır. Ayrıca



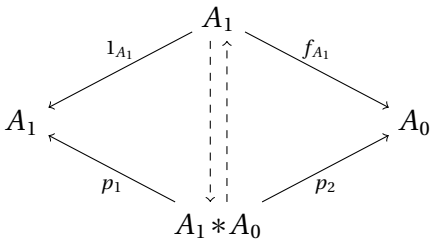
diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek $\alpha*1_{A_4}\colon (A_1*(A_2*A_3))*A_4 \to ((A_1*A_2)*A_3)*A_4$ morfizmi, bir tek $\alpha\colon A_1*((A_2*A_3)*A_4) \to (A_1*(A_2*A_3))*A_4$ morfizmi ve bir tek $1_{A_1}*\alpha\colon A_1*(A_2*(A_3*A_4)) \to A_1*((A_2*A_3)*A_4)$ morfizmi vardır. O halde $\alpha\alpha = (\alpha*1_{A_4})\alpha(1_{A_1}*\alpha)$ dır.

Şimdi ise $\mathscr{R}$ ve $\mathscr{L}$ morfizmlerinin birer doğal izomorfizm olduğunu gösterelim. Burada bitiş objeyi $T = A_0$ ile gösterelim. Herhangi bir $A_1 \in C_0$ objesi için

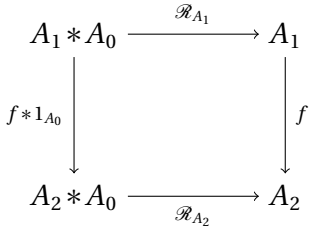
$$A_1 \xleftarrow{1_{A_1}} A_1 \xrightarrow{f_{A_1}} A_0$$

$$A_1 \xleftarrow{p_1} A_1 * A_0 \xrightarrow{p_2} A_0$$

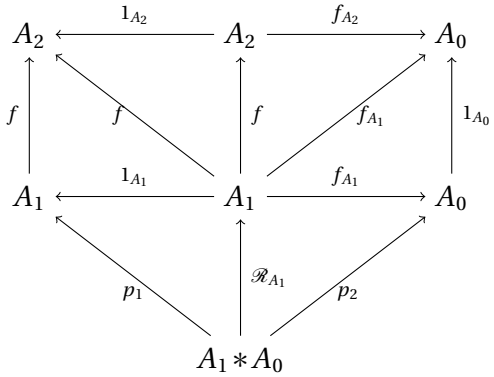
diyagramları çarpım diyagramlarıdır. O halde



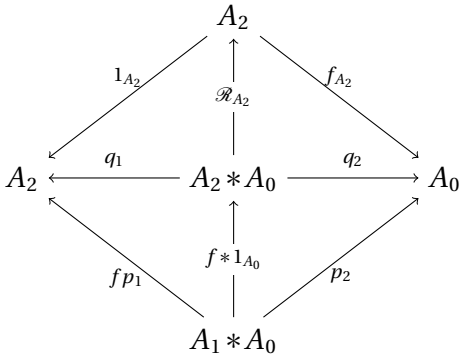
diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek $\mathscr{R}_{A_1} : A_1 * A_0 \to A_1$ morfizmi ve bir tek $\mathscr{R}_{A_1}^{-1} : A_1 \to A_1 * A_0$ morfizmi vardır. Böylece $\mathscr{R}_{A_1} : A_1 * A_0 \to A_1$ morfizmi bir izomorfizmdir. Şimdi $\mathscr{R}$ nin doğal olduğunun gösterelim. Bunun için $A_1, A_2 \in C_0$ ve $f \in \mathbb{C}(A_1, A_2)$ olmak üzere



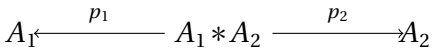
diyagramının değişmeli olduğunu göstermeliyiz.



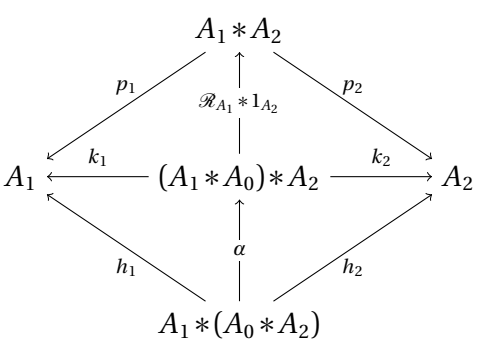
diyagramları değişmeli olacak şekilde bir tek $f: A_1 \to A_2$ morfizmi ve bir tek $\mathscr{R}_{A_1}: A_1 * A_0 \to A_1$ morfizmi vardır. Ayrıca

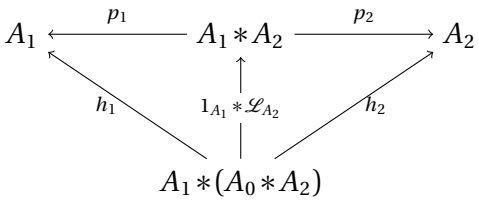


diyagramı değişmeli olacak şekilde de bir tek $\mathscr{R}_{A_2}: A_2 * A_0 \to A_2$ morfizmi ve bir tek $f * 1_{A_0}: A_1 * A_0 \to A_2 * A_0$ morfizmi vardır. Böylece $\mathscr{R}_{A_2}(f * 1_{A_0}) = f\mathscr{R}_{A_1}$ dir. Yani $\mathscr{R}$ bir doğal izomorfizmdir. Benzer şekilde $\mathscr{L}$ nin de bir doğal izomorfizm olduğu görülür. Son olarak üçgen diyagramın değişmeli olduğunu gösterelim. Burada



bir çarpım diyagramı olduğundan



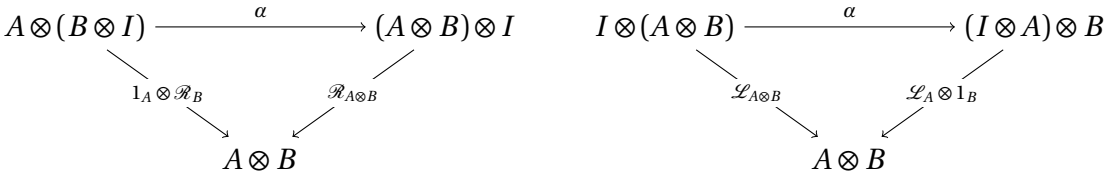


diyagramları değişmeli olacak şekilde bir tek $A_1 * (A_0 * A_2) \to A_1 * A_2$ morfizmi vardır. O halde her $A_1, A_2 \in C_0$ için $1_{A_1} * \mathscr{L}_{A_2} = (\mathscr{R}_{A_1} * 1_{A_2})\alpha$ dir. Yani üçgen diyagram değişmelidir. Böylece, sonlu çarpıma sahip bir kategorinin, bu çarpma işlemine göre bir monoidal kategori olduğunu göstermiş olduk.

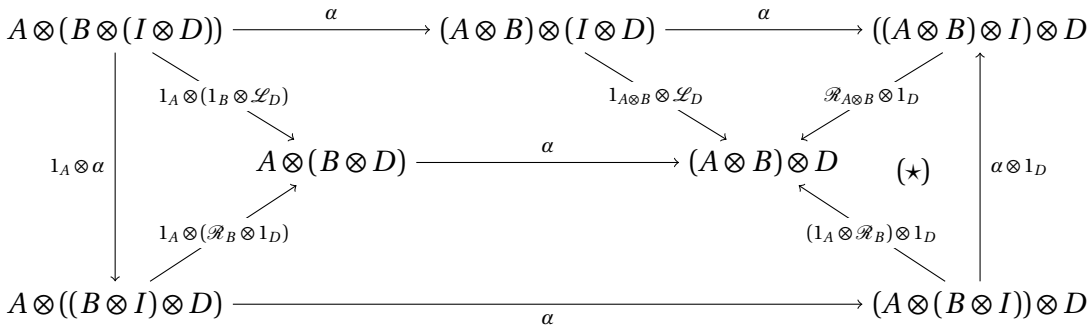
Önerme 5.2.1. Bir $\mathbb{M} = (\mathbb{M}, \otimes, I, \alpha, \mathscr{L}, \mathscr{R})$ monoidal kategorisinde

$$\mathscr{L}_I = \mathscr{R}_I$$

eşitliği sağlanır ve aşağıdaki iki diyagram değişmelidir.

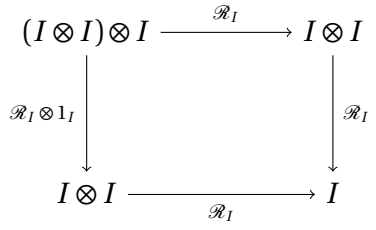


İspat: Şimdi aşağıdaki diyagramı düşünelim.



Bu diyagramda $(\star)$ ile gösterilmiş olan üçgen bölge değişmelidir. Çünkü diğer tüm bölgeler ile diyagramın dış kısmı değişmeli ve tüm morfizmler izomorfizmdir. Bu üçgen bölge için $D = I$ alırsak ve $\mathscr{R}$ nin bir doğal izomorfizm olduğunu kullanırsak, önermenin ilk diyagramının değişmeli olduğu görülür. Diğer diyagramın değişmeli olduğu da benzer şekilde gösterilebilir.

$\mathscr{R}$ nin doğallığından aşağıdaki diyagram değişmelidir.



Ayrıca $\mathscr{R}_I$ bir izomorfizm olduğundan $\mathscr{R}_I = \mathscr{R}_I \otimes 1_I : (I \otimes I) \otimes I \to I \otimes I$ olur. Önermenin ilk diyagramında ve monoidal kategori tanımındaki üçgen diyagramda $A = B = I$ alıp,

α nın bir izomorfizm olmasını kullanırsak $1_I \otimes \mathscr{R}_I = 1_I \otimes \mathscr{L}_I : I \otimes (I \otimes I) \to I \otimes I$ eşitliğini elde ederiz. Son olarak, $\mathscr{L}_I$ bir doğal izomorfizm olduğundan

$$\mathscr{R}_I = \mathscr{L}_I : I \otimes I \to I$$

bulunur. ■

Tanım 5.2.2. $\mathbb{M} = (\mathbb{M}, \otimes, I, \alpha, \mathscr{L}, \mathscr{R})$ ve $\mathbb{N} = (\mathbb{N}, \otimes', I', \alpha', \mathscr{L}', \mathscr{R}')$ iki monoidal kategori ve $F : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ bir fanktor olsun. Eğer;

i. Her $A, B \in M_0$ objeleri için

$$\phi_{2,A,B} : F(A) \otimes' F(B) \to F(A \otimes B)$$

bir doğal izomorfizmdir.

ii. $\phi_0 : I' \to F(I)$ bir izomorfizmdir.

iii. Her $A, B, C \in M_0$ objeleri için

$$\begin{array}{ccc}
F(A) \otimes' (F(B) \otimes' F(C)) & \xrightarrow{\alpha'} & (F(A) \otimes' F(B)) \otimes' F(C) \\
\downarrow{\scriptstyle 1 \otimes' \phi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_2 \otimes' 1} \\
F(A) \otimes' F(B \otimes C) & & F(A \otimes B) \otimes' F(C) \\
\downarrow{\scriptstyle \phi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_2} \\
F(A \otimes (B \otimes C)) & \xrightarrow[F(\alpha)]{} & F((A \otimes B) \otimes C)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
F(A) \otimes' I' & \xrightarrow{\mathscr{R}'} & F(A) \\
\downarrow{\scriptstyle 1 \otimes' \phi_0} & & \uparrow{\scriptstyle F(\mathscr{R})} \\
F(A) \otimes' F(I) & \xrightarrow[\phi_2]{} & F(A \otimes I)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
I' \otimes' F(A) & \xrightarrow{\mathscr{L}'} & F(A) \\
\downarrow{\scriptstyle \phi_0 \otimes' 1} & & \uparrow{\scriptstyle F(\mathscr{L})} \\
F(I) \otimes' F(A) & \xrightarrow[\phi_2]{} & F(I \otimes A)
\end{array}$$

diyagramları değişmelidir.

şartları sağlanıyorsa $F = (F, \phi_2, \phi_0)$ 'e bir *monoidal fanktor* denir.

Eğer ϕ_2 ve ϕ_0 izomorfizmleri birimler olarak alınırsa F e *strict monoidal fanktor* denir. İki monoidal fanktorun bileşkesinin yine bir monoidal fanktor olduğu kolayca görülebilir. Böylece objeleri monoidal kategoriler, morfizmleri ise monoidal fanktorlar olan monoidal kategorilerin kategorisi oluşturulabilir ve bu kategori **MCAT** ile gösterilir.

Tanım 5.2.3. $\mathbb{M} = (\mathbb{M}, \otimes, I, \alpha, \mathscr{L}, \mathscr{R})$ ve $\mathbb{N} = (\mathbb{N}, \otimes', I', \alpha', \mathscr{L}', \mathscr{R}')$ iki monoidal kategori ve $F, G : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ monoidal fanktor olsunlar. Aşağıdaki diyagramlar değişmeli olacak şekildeki bir $\theta : F \to G$ doğal dönüşümüne *monoidal fanktorların bir morfizmi* denir.

i. Her $A, B \in M_0$ objeleri için

$$\begin{array}{ccc} F(A) \otimes' F(B) & \xrightarrow{\phi_2} & F(A \otimes B) \\ \downarrow{\scriptstyle \theta_A \otimes' \theta_B} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{A\otimes B}} \\ G(A) \otimes' G(B) & \xrightarrow[\phi_2]{} & G(A \otimes B) \end{array}$$

diyagramı değişmelidir.

ii. $I \in M_0$ ve $I' \in N_0$ olmak üzere

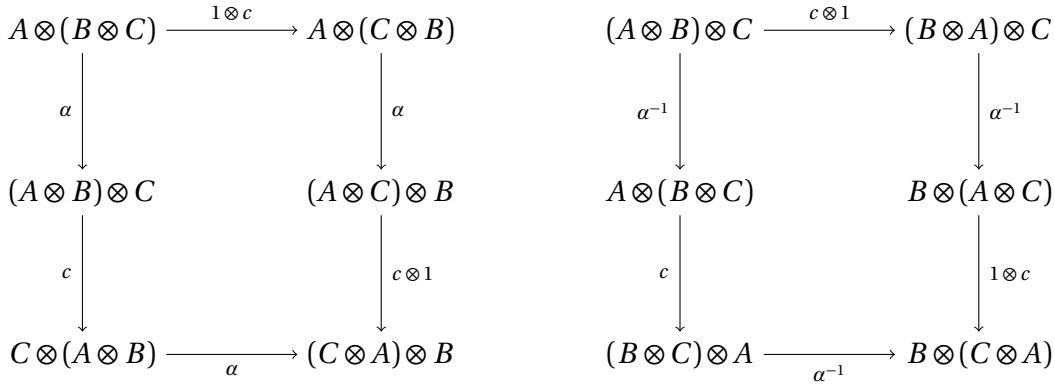
$$\begin{array}{ccc} I' & \xrightarrow{\phi_0} & F(I) \\ & \searrow^{\phi_0} & \downarrow{\scriptstyle \theta_I} \\ & & G(I) \end{array}$$

diyagramı değişmelidir.

Tanım 5.2.4. $\mathbb{M} = (\mathbb{M}, \otimes, I, \alpha, \mathscr{L}, \mathscr{R})$ bir monoidal kategori olmak üzere, her $A, B, C \in M_0$ için aşağıdaki diyagramlar değişmeli olacak şekilde bir

$$c = c_{A,B} : A \otimes B \to B \otimes A$$

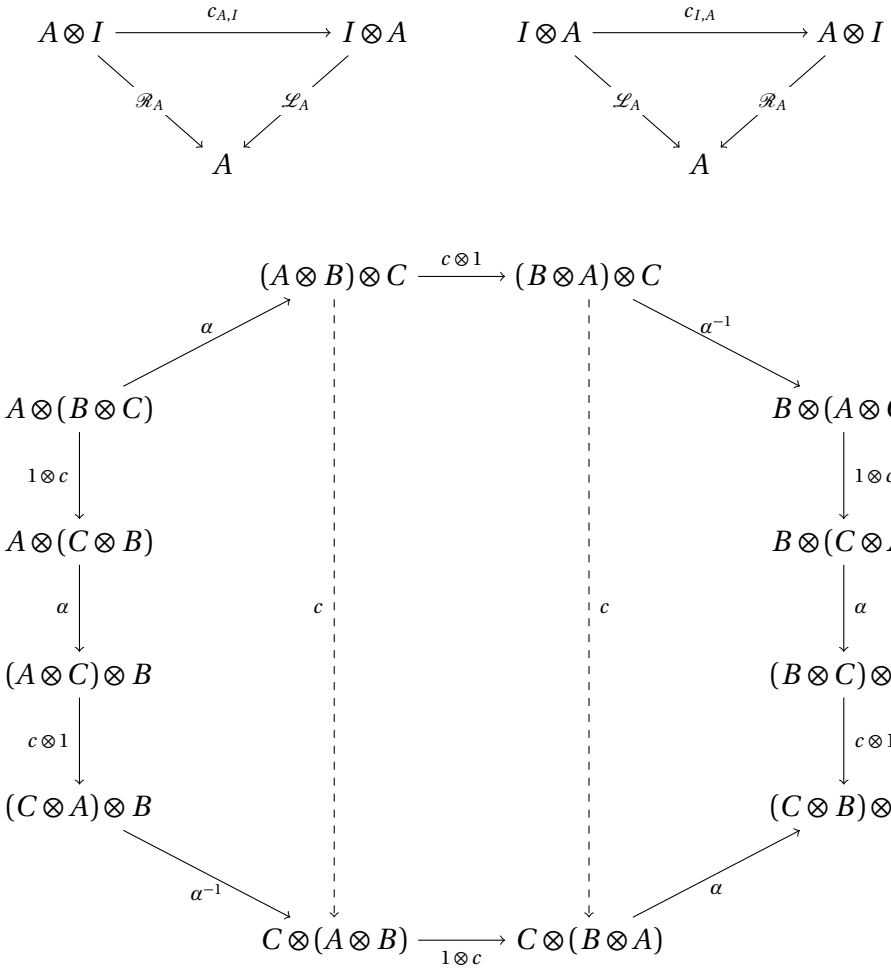
doğal izomorfizmi varsa bu c doğal izomorfizmler ailesine bir *örgü* denir.



Eğer c bir örgü ise $c'_{A,B} = (c_{B,A})^{-1}$ ile tanımlanan c' de bir örgüdür. Çünkü ikinci diyagram, birinci diyagramda c yerine c' yazılarak elde edilir.

Tanım 5.2.5. $\mathbb{M} = (\mathbb{M}, \otimes, I, \alpha, \mathscr{L}, \mathscr{R})$ bir monoidal kategori ve c de $\mathbb{M}$ üzerinde bir örgü ise $(\mathbb{M}, c)$ ikilisine *örülmüş monoidal kategori* denir.

Önerme 5.2.2. $(\mathbb{M}, c)$ bir örülmüş monoidal kategori ise aşağıdaki diyagramlar değişmelidir.

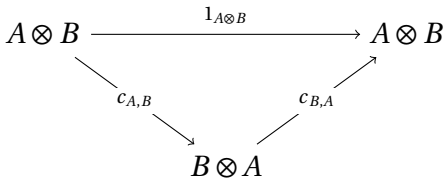


İspat: Örgü tanımındaki ilk diyagramda $B = C = I$ alıp, $c_{A,I}$ nin izomorfizm olmasını kullanırsak, ilk diyagramın değişmeli olduğunu görebiliriz. İkinci üçgenin ise benzer şekilde $A = B = I$ alınarak elde edilir. Son diyagramda ise sağ ve soldaki bölgeler örgü tanımının ilk diyagramından değişmelidir. Ortadaki bölgenin değişmeli olduğu ise c nin doğallığından elde edilir. ■

Tanım 5.2.6. $(\mathbb{M}, c)$ ve $(\mathbb{N}, \bar{c})$ iki örülmüş monoidal kategori ve $F: \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ bir monoidal fanktor olsun. Eğer aşağıdaki diyagram değişmeli ise bu F monoidal fanktoruna *örülmüş* denir.

$$\begin{array}{ccc} F(A) \otimes' F(B) & \xrightarrow{\phi_2} & F(A \otimes B) \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{c}} & & \downarrow{\scriptstyle F(c)} \\ F(B) \otimes' F(A) & \xrightarrow[\phi_2]{} & F(B \otimes A) \end{array}$$

Tanım 5.2.7. $(\mathbb{M}, c)$ bir örülmüş monoidal kategori olsun. Eğer her $A, B \in M_0$ objeleri için



diyagramı değişmeli ise $(\mathbb{M}, c)$ ye *simetrik monoidal kategori* denir.

Şimdide kategorik grup tanımını verip bazı özelliklerinden bahsedelim.

Tanım 5.2.8. $\mathbb{G}$ bir grupoid, $\otimes: \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ bir bifanktor ve $I \in G_0$ olsun. Aağıdaki şartları sağlayan $\mathbb{G} = (\mathbb{G}, \otimes, I, \alpha, \mathscr{L}, \mathscr{R})$ sistemine bir *kategorik grup* denir.

i. $\mathbb{G} = (\mathbb{G}, \otimes, I, \alpha, \mathscr{L}, \mathscr{R})$ bir monoidal grupoiddir.

ii. Her $A \in G_0$ için

$$A \otimes A^* \cong I$$

olacak şekilde bir $A^* \in G_0$ vardır.

Eğer $\mathbb{G}$ strict monoidal grupoid ve her $A \in G_0$ için $A \otimes A^* = I$ olursa bu kategorik gruba *strict kategorik grup* denir. Strict kategorik gruplar, grup-grupoidlere yani grupoidlerin kategorisindeki grup objelere karşılık gelirler.

Örnek 5.2.4. X bir topolojik grup olmak üzere, X in temel grupoidi $\pi_1 X$ bir strict kategorik gruptur.

Monoidal kategoriler için yapılan tanımlar benzer şekilde kategorik gruplar için de yapılabilir. Örneğin üzerinde örgü tanımlanmış bir kategorik gruba *örülmüş kategorik grup*, monoidal grupoid yapısı simetrik olan kategorik gruba *simetrik kategorik grup* denir. Kategorik gruplar arasındaki morfizmler monoidal fanktorlardır. O halde objeleri kategorik gruplar, morfizmleri monoidal fanktorlar olan kategorik grupların kategorisini oluşturabiliriz. Bu kategori **CGRP** ile gösterilir.

5.3. Kategorik Grupların Örtü Grupoidleri

Bu kesimde bir kategorik grubun grup yapısının, örtü grupoidine yükselmesini inceleyeceğiz.

Tanım 5.3.1. $\mathbb{G} = (\mathbb{G}, \otimes, I, \alpha, \mathscr{L}, \mathscr{R})$ bir kategorik grup, $\widetilde{\mathbb{G}}$ bir grupoid, $\widetilde{I} \in \widetilde{G}_0$ ve $p : \widetilde{\mathbb{G}} \to \mathbb{G}$ ise $p(\widetilde{I}) \cong I$ olacak şekilde bir grupoid örtü morfizmi olsun. Eğer $p : \widetilde{\mathbb{G}} \to \mathbb{G}$ bir monoidal fanktor ve $\widetilde{I} \in \widetilde{G}_0$ birim eleman olacak şekilde $\widetilde{\mathbb{G}}$ da bir kategorik grup yapısı varsa $\mathbb{G}$ nin kategorik grup yapısı $\widetilde{\mathbb{G}}$ ya yükselir denir.

Önerme 5.3.1. $\mathbb{G} = (\mathbb{G}, \otimes, \alpha, I, \mathscr{L}, \mathscr{R})$ bir kategorik grup, $\widetilde{\mathbb{G}}$ 1-irtibatlı bir grupoid, $\widetilde{I} \in \widetilde{G}_0$ ve $p : \widetilde{\mathbb{G}} \to \mathbb{G}$ ise $p(\widetilde{I}) \cong I$ olacak şekilde bir grupoid örtü morfizmi olsun. O halde $\mathbb{G}$ nin kategorik grup yapısı $\widetilde{I} \in \widetilde{G}_0$ birim obje olacak şekilde $\widetilde{\mathbb{G}}$ ya yükselir.

İspat: $\mathbb{G}$ bir kategorik grup olduğundan, $\mathfrak{e} : \mathbf{1} \to \mathbb{G}, \star \mapsto I$ ve $\mathfrak{u} : \mathbb{G} \to \mathbb{G}, A \mapsto A^*$ şeklinde tanımlanmış olmak üzere, aşağıda verilmiş olan fanktorların doğal izomorfizmleri (homotopileri) mevcuttur.

$$\begin{array}{ccccc} \otimes(\otimes \times 1) & \cong & \otimes(1 \times \otimes) & & \\ \otimes(\mathfrak{e}, 1) & \cong & 1 & \cong & \otimes(1, \mathfrak{e}) \\ \otimes(\mathfrak{u}, 1) & \cong & \mathfrak{e} & \cong & \otimes(1, \mathfrak{u}) \end{array}$$

Burada $\otimes(\otimes \times 1) \cong \otimes(1 \times \otimes)$ olduğundan

$$\otimes(\otimes \times 1)(p \times p \times p) \ , \ \otimes(1 \times \otimes)(p \times p \times p) : \widetilde{\mathbb{G}} \times \widetilde{\mathbb{G}} \times \widetilde{\mathbb{G}} \to \mathbb{G}$$

fanktorları da doğal olarak izomorf olup

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbb{G}}\times\widetilde{\mathbb{G}}\times\widetilde{\mathbb{G}} & & \widetilde{\mathbb{G}} \\ \downarrow{\scriptstyle p\times p\times p} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathbb{G}\times\mathbb{G}\times\mathbb{G} & \underset{\otimes(1\times\otimes)}{\overset{\otimes(\otimes\times 1)}{\rightrightarrows}} & \mathbb{G} \end{array}$$

$\widetilde{\mathbb{G}}$ 1-irtibatlı olduğundan Teorem 3.2.3 gereğince, sırasıyla

$$\widetilde{\otimes}(\widetilde{\otimes}\times 1), \widetilde{\otimes}(1\times\widetilde{\otimes}): \widetilde{\mathbb{G}}\times\widetilde{\mathbb{G}}\times\widetilde{\mathbb{G}}\to\widetilde{\mathbb{G}}$$

yükselmeleri mevcuttur.

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbb{G}}\times\widetilde{\mathbb{G}}\times\widetilde{\mathbb{G}} & \underset{\widetilde{\otimes}(1\times\widetilde{\otimes})}{\overset{\widetilde{\otimes}(\widetilde{\otimes}\times 1)}{\dashrightarrow}} & \widetilde{\mathbb{G}} \\ \downarrow{\scriptstyle p\times p\times p} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathbb{G}\times\mathbb{G}\times\mathbb{G} & \underset{\otimes(1\times\otimes)}{\overset{\otimes(\otimes\times 1)}{\rightrightarrows}} & \mathbb{G} \end{array}$$

Önerme 3.2.9 dan bu yükselmeler de doğal olarak izomorfturlar. Benzer şekilde doğal olarak izomorf olan diğer fanktorlarında yükselmeleri mevcut olup, onlarda doğal olarak izomorfturlar. Şimdi $\widetilde{\mathbb{G}}$ da beşgen ve üçgen diyagramların değişmeli olduğunu gösterelim. $\widetilde{\mathbb{G}}$ grupoidi 1-irtibatlı olduğundan Önerme 3.1.1 den $\widetilde{\mathbb{G}}$ daki bütün diyagramlar değişmelidir. Son olarak p nin bir monoidal fanktor olduğunu gösterelim. Gerçekten her $\widetilde{A}, \widetilde{B}\in\widetilde{G}$ objeleri için

$$p(\widetilde{A})\otimes p(\widetilde{B})\cong p(\widetilde{A}\widetilde{\otimes}\widetilde{B})$$

dir. Çünkü

$$\otimes(p\times p): \widetilde{\mathbb{G}}\times\widetilde{\mathbb{G}}\to\mathbb{G}$$

fanktorunun yükselmesi

$$\widetilde{\otimes}: \widetilde{\mathbb{G}}\times\widetilde{\mathbb{G}}\to\widetilde{\mathbb{G}}$$

fanktorudur. Yani

$$p\widetilde{\otimes} = \otimes(p\times p)$$

dir.

■

KAYNAKLAR

1. Mucuk, O., Topoloji, Nobel Yayınları, Ankara, Şubat 2009.

2. Rotman, J.J., An Introduction to Algebraic Topology, Springer-Verlag NewYork Inc., 1988.

3. Alemdar, N., Topolojik R-Modül Örtüleri ve Groupoid Örtü Morfizmleri, Doktora Tezi, Erciyes Üniversitesi, 2007.

4. Higgins, P.J., Notes on Categories and Groupoids, Van Nostrand, 1971.

5. Borceux, F., Handbook of Categorical Algebra I: Basic Category Theory, Cambridge University Press, 1994.

6. Datuashvili, T., Categorical, Homological and Homotopical Properties of Algebraic Objects, Dissertation, 2006.

7. Forrester-Barker, M., Group objects and internal categories (2002). Preprint math.CT/0212065.

8. Brown, R., From Groups to Groupoids: A Brief Survey, Bull. London Math. Soc., 19, 113-134, 1987.

9. Mackenzie, K., Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometry, London Math. Soc. Lec. Notes Series, Cambridge University Press, 1987.

10. Brown, R., Topology: A Geometric Account of General Topology, Homotopy Types and the Fundamental Groupoid, Ellis Horwood, Chichester, 1988.

11. Mucuk, O., Kılıçarslan, B., Alemdar, N., Covering Groupoids and Fundamental Groupoids of H-Groups (İncelenmekte)

12. Brown, R., Spancer, C.B., $\mathscr{G}$-Groupoids, Crossed Modules and the Fundamental Groupoid of a Topological Group, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet., 79, 296-302, 1976.

13. Porter, T., Extensions, Crossed Modules and Internal Categories in Categories of Group with Operations, Proc. Edinburgh Math. Soc., 30, 373-381, 1987.

14. Mucuk, O., Covering Groups of Non-Connected Topological Groups and Monodromy Groupoid of a Topological Groupoid, Ph.D. Thesis, University of Whales, 1993.

15. Lee, M.-J., Homotopy for Functors, Proceedings of The American Mathematical Society, Volume 36, No. 2, December 1972.

16. Joyal, A., Street, R., Braided Tensor Categories, Advances in Mathematics 102, 20-78 (1993)

17. Alemdar, N., Mucuk, O., Covering Groupoids of the Internal Groupoids in the Category of Groups with Operations (İncelenmekte)

18. Balkanlı, Ö., Crossed Modüller ve İç Kategoriler, Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi, 2009.

19. Brown, R., Groupoids and Crossed Objects in Algebraic Topology, Homology, Homotopy and Applications, vol.1, No.1, 1-78, 1999.

20. Brown, R., Danesh-Naruie, G., The Fundamental Groupoid as a Topological Groupoid, Proc. Edinburgh Mat. Soc.(2), 1975.

21. Carrasco, P., Garzón, A.R., and Miranda, G., Schreier Theory for Singular Extensions of Categorical Groups and Homotopy Classification, Communucations in Algebra, 28(5), 2585-2613 (2000)

22. Freyd, P., Abelian Categories: An Introduction to the Theory of Functors, Harper & Row, 1964.

23. Hatcher, A., Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2002.

24. Higgins, P.J., Introduction to Topological Groups, Cambridge University Press, 1974.

25. MacLane, S., Categories for Working Mathematician, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

26. Mucuk, O., Coverings and Ring-Groupoids, Geor. Math. J., 5, 475-482, 1998.

27. Rotman, J.J., Advanced Modern Algebra, Prentice Hall, 2002.

28. Vitale, E.M., A Picard-Brauer Exact Sequence of Categorical Groups, Journal of Pure and Applied Algebra, 175, 383-408, 2002.

29. Vitale, E.M., del Río, A., Martínez-Moreno, J., Chain Complexes of Symmetric Categorical Groups, Journal of Pure and Applied Algebra, 196, 279-312, 2005.

30. Vitale, E.M., Kasangian, S., Factorization Systems for Symmetric Cat-Groups, Theory and Applications of Categories, 7, 47-70, 2000.

ÖZGEÇMİŞ

Tunçar ŞAHAN 1984 yılında Kayseri'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Antalya'da tamamladı. 1999 yılında Antalya M.N.Çakallıklı Anadolu Lisesini kazandı. 2002'de kazandığı Erciyes Üniversitesi Fen Edebitat Fakültesi Matematik Bölümünden 2006 yılında mezun oldu. 2007 yılında Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisansa başladı. 2009 yılında aynı Enstitüde Topoloji Bilim Dalında araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Halen Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde görevine devam etmektedir.

Adres	:	Erciyes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 38039 - KAYSERİ
Telefon	:	0 352 437 49 01 - 33212
e-posta	:	tsahan@erciyes.edu.tr