T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞKEN KÜTLELİ RELATİVİSTİK OLMAYAN VE RELATİVİSTİK DALGA DENKLEMLERİNİN ANALİTİK OLARAK ÇÖZÜMLENMESİ

Tezi Hazırlayan
Selim TEKİN

Tezi Yöneten
Doç. Dr. Fevziye YAŞUK

Fizik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Ağustos 2008
KAYSERİ

Doç. Dr. Fevziye YAŞUK danışmanlığında **Selim TEKİN** tarafından hazırlanan **"Değişken Kütleli Relativistik Olmayan ve Relativistik Dalga Denklemlerinin Analitik Olarak Çözümlenmesi"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

12.08.2008

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. Coşkun ÖNEM

Üye : Doç. Dr. Fevziye YAŞUK

Üye :Yrd. Doç. Dr. Ahmet ERDİNÇ

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 15/08/2008 tarih ve 2008/24-20 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

15 / 08 / 2008

Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın tamamlanmasında emek ve yardımlarını esirgemeyen ve çalışmalarım süresince değerli fikir ve tecrübeleri ile bana büyük destek sağlayan saygıdeğer hocam Doç. Dr. Fevziye YAŞUK'a içtenlikle teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında bizlere yol gösteren ve destek olan Doç. Dr. İsmail BOZTOSUN hocama ve tez çalışmamız sırasında hesaplamalarda bizlere yardımcı olan Yrd. Doç. Dr. Ayşen DURMUŞ hocama ayrıca Gaziantep Üniversitesi Fizik Mühendisliği Bölümü Öğretim Üyesi Prof. Dr. Bülent GÖNÜL hocamızın sağladığı destek ve yardımlarından dolayı teşekkür ederim.

Tez çalışması esnasında tez yazımında bana destek olan Mehmet ERTAŞ'a ve Ersin KANTAR'a teşekkür ederim.

Çalışmalarım süresince gösterdikleri anlayış, maddi ve manevi yönden desteklerini hiç eksik etmeyen aileme en içten dileklerimle teşekkürlerimi sunarım.

DEĞİŞKEN KÜTLELİ RELATİVİSTİK OLMAYAN VE RELATİVİSTİK DALGA DENKLEMLERİNİN ANALİTİK OLARAK ÇÖZÜMLENMESİ

Selim TEKİN
Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Ağustos 2008
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Fevziye YAŞUK

ÖZET

Bu çalışmada, relativistik olmayan ve relativistik değişken kütleli Schrödinger ve Klein-Gordon dalga denklemlerinin çözümleri, nokta kanonik dönüşüm metodu ve asimtotik iterasyon metodu (AIM) kullanılarak, farklı kütle dağılımları ve referans potansiyelleri için analitik olarak elde edilmiştir. Nokta Kanonik Dönüşüm (PCT) metodu, tam ve yaklaşık olarak çözülebilen potansiyel içeren farklı fizik problemlerine başarıyla uygulanmaktadır. Bu metod kullanılarak, değişken kütleli Schrödinger denklemi, sabit kütleli Schrödinger denklemi ile karşılaştırılarak çözümlenmektedir. Asimtotik iterasyon metodu da ikinci mertebeden homojen diferansiyel denklemlerin çözümünde son zamanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Ayrıca enerji özdeğerlerinin hesaplanmasında hiçbir yaklaşım yapılmadan ve ek bir metoda ihtiyaç duyulmadan doğrudan uygulanarak çözüm verir. Değişken kütleli sistemler çekirdekte, çeşitli mikro yapıların fiziksel özelliklerinin çalışılmasında, kuantum dotlarda, kuantum sıvılarda, helyum ve metal tip gruplarda geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Sonuç olarak bu çalışma, değişken kütleli relativistik olmayan ve relativistik dalga denklemlerinin çözümünün de AIM ile yapılabileceğini göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: AIM (Asimtotik İterasyon Metodu), PCT (Nokta Kanonik Dönüşümü), Schrödinger Denklemi, Klein-Gordon Denklemi, Değişken Kütle.

ANALYTICAL SOLUTIONS OF NON-RELATIVISTIC AND RELATIVISTIC WAVE EQUATIONS WITH POSITION-DEPENDENT MASS

Selim TEKİN
Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M. Sc. Thesis, August 2008
Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Fevziye YAŞUK

ABSTRACT

In this study, solutions of the non-relativistic and relativistic Schrödinger and Klein-Gordon equations with position dependent mass are obtained analytically for different effective mass and reference potential by using point canonical transformation(PCT) and asymptotic iteration methods(AIM). PCT has been successfully applied in various fields of physics involving exactly/approximately solvable potentials. The Schrödinger equation with position dependent mass is converted to the Schrödinger equation with constant mass by using PCT method. Asymptotic iteration method is also used frequently for solving second order differential equations in recent years. Moreover, this method can directly be applied to obtain the energy eigenvalues without making any approximation and any additional method. Systems with position- dependent mass have been extensively used in nuclei, studying the physical properties of various microstructures, quantum dots, quantum liquids, helium and metal type clusters. Thus, this work shows that the AIM is applicable to the wave equations with position-dependent mass.

Keywords: Asymptotic Iteration Method(AIM), Point Canonical Transformation(PCT), Schrödinger Equation, Klein-Gordon Equation, Position-Dependent Mass.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY……...…..i
TEŞEKKÜR…….…….ii
ÖZET……iii
ABSTRACT…….....iv
1. BÖLÜM
GİRİŞ …….……...…1
2. BÖLÜM
ASİMTOTİK İTERASYON METODU ve BU METODUN UYGULAMALARI
2.1. Asimtotik İterasyon Metodu (AIM)……..…..……...4
2.2. Uygulamarı……..……...….6
2.2.1. Sabit Katsayılı Diferansiyel Denklemler……..……....6
2.2.2. Kratzer Potansiyelinin Aim İle Çözümü……...……..…….8
2.2.3. Hulthén Potansiyelinin Aim İle Çözümü……..…….....10
2.2.4. Morse Potansiyelinin Aim İle Çözümü…….……...……..12
2.2.5. Gol'dman ve Krichenkov Potansiyelinin Aim İle Çözümü……...….....14
3. BÖLÜM
PCT TEOREMİ (NOKTA KANONİK DÖNÜŞÜMÜ)
3.1. Pct Teoremi……...……16
3.2. Değişken Kütleli Schrödinger Dalga Denklemine Uygulaması……...19
4. BÖLÜM
DEĞİŞKEN KÜTLELİ RELATİVİSTİK OLMAYAN DALGA DENKLEMİ
4.1. $M(r)=1/\left(1+\varsigma^2 r^2\right)^2$ Biçimindeki Kütle Dağılımının Çözümü……...……23
4.2. $M(x)=M_0 e^{-2x}$ Biçimindeki Kütle Dağılımının Çözümü.....30
5. BÖLÜM
DEĞİŞKEN KÜTLELİ RELATİVİSTİK DALGA DENLEMİ
5.1. $M(x)=M_0 e^{\alpha x}$ Biçimindeki Kütle Dağılımının Çözümü…...…….34
6. BÖLÜM
SONUÇ VE TARTIŞMA……...…….38
KAYNAKLAR…….…..40
ÖZGEÇMİŞ…….……43

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Klasik Mekanik, nesnelerin konum ve momentum bilgilerini kullanarak, çeşitli kuvvet alanları altında nasıl hareket etmeleri gerektiğini bulmaya çalışır. Kökleri çok eskiye dayansa da temellerinin Isaac Newton tarafından atıldığını kabul etmek yanlış olmaz. Daha sonra Euler, Lagrange, Jacobi, Hamilton, Poisson, Maxwell, Boltzman, (İstatiksel mekanik ve klasik elektromanyetik teoriyi de klasik mekanik içerisinde kabul edersek) gibi pek çok ad tarafından çok çeşitli bakış açıları geliştirilmiş ve birçok alanda başarılı bir şekilde uygulanmıştır. Klasik mekaniğin tamamlanmasını Einstein'ın görelilik kuramları ile gerçekleştiğini söylemek yanlış olmaz. Klasik mekanik çok başarılı olmasına karşın, 1800'lü yılların sonlarına doğru, siyah cisim ışıması, tayf çizgileri, fotoelektrik etki vb. gibi bir takım olayları açıklama da yetersiz kalmıştır. Açıklamaların yanlışlığı bilim adamlarının yetersizliğinden değil aksine klasik mekaniğin yetersizliğinden kaynaklanmıştır. Klasik mekanikteki sorunun ne olduğunu anlatmak aşırı teknik kaçacaktır, ancak en yalın halde klasik mekanik evreni sürekli olarak modellemiştir. Bu modelleme yanlıştı çünkü üç konum ve üç momentumla tanımlanan parçacıklar, sonsuz sayıda parametreyle tanımlanan alanlarla bir aradaydılar. Eş dağılım kuramınca sistemin enerjisinin denge durumunda sistem bileşenlerine eş biçimde dağılması gerekir. Alanlar sonsuz bileşene sahip olduğundan bütün enerji alanlara kalır. (Daha teknik daha doğru ifade, enerji sistemin bütün özgürlük derecelerine eş olarak dağılır, alanlar sonsuz özgürlük derecesine sahip olduğu için bütün enerji alanlara akar)

Kuantum kuramı ise olayı bambaşka bir şekilde ele alır. Parçacıklar artık doğrudan üç konum ve üç momentumla tanımlamak yerine bir "Dalga Fonksiyonu" ile tanımlanırlar. Bu dalga fonksiyonu parçacığın bütün bilgisini de içinde barındırır. Kuantum mekaniği

her ne kadar çok küçüklerin dünyasını modelleyen bir kuram olsa da uygulama alanları gerek dolaysız gerek dolaylı yollarla çok geniştir. Kuantum mekaniği; kimya, biyoloji, malzeme bilimi, elektronik gibi birçok alanın günümüzdeki anlamına kavuşmasını sağlamıştır. Lazer, yarı iletkenler gibi günümüzün olmazsa olmazlarının icatları, kuantum mekaniği sayesinde mümkün olmuştur. Tıp, iletişim, nanoteknoloji, elektronik gibi birçok alanda sayısız kullanımı olan fiberler kuantum mekaniğinin doğrudan uygulamasına örnektir. Bu örnekler dışında hepimiz kuantum mekaniğini öyle yada böyle kullanıyoruz. Modern kimya, kuantum fikirleri üzerine inşa edilmiş ve çok karmaşık moleküller bu sayede anlaşılmıştır. 2004 yılında araştırmacılar, kanser hücrelerinin kendilerini göstermelerini sağlayacak bir görüntüleme tekniği geliştirdiler. "Kuantum Noktaları" denilen nanometre boyunda dizayn edilmiş, boyutları çok küçük olduğu için ışıkla etkileştiklerinde değişik renklerle yanıt veren bu molekül toplulukları, kanserli fare hücrelerini görüntülemekte kullanıldı. Boyutuna bağlı olarak farklı renk ışık yayan bu kuantum noktalar, prostat kanserli hücrelerde bulunan bir proteine tutunan "antibody" ler ile kaplandı. Bu kuantum noktalar, dışarıdan ışık tutulmasıyla, canlı hayvan içinde kanserli hücre görüntülenmesinde ilk kez kullanılabildiler. Bazı sorunları olmakla birlikte gelecek için umut vaadetmektedir.

Dolayısıyla, Kuantum mekaniği çok sağlam matematik temelleri üzerine kurulmuştur. Sistemlerin doğası bu matematikle modellenir.

Bu çalışmada relativistik olmayan ve relativistik kuantum mekaniği çerçevesinde değişken kütleli zamandan bağımsız Schrödinger ve Klein-Gordon dalga denklemlerinin enerji özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının nasıl hesaplanacağı üzerinde durulacaktır. Değişken kütleli dalga denklemlerinin çözümü için farklı, etkili bir çözüm metodu kullanılacaktır. Bu metod, son zamanlarda güncel bir şekilde kullanılan Asimtotik İterasyon Metodu (AIM) dur [2]. AIM ikinci mertebeden homojen lineer diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan bir metottur. Bu tez çalışması ile de bu metodun değişken kütleli dalga denklemleri için de uygulanabilirliği ve geçerliliği test edilmiş olacaktır.

2. Bölüm'de, değişken kütleli relativistik olmayan ve relativistik zamandan bağımsız Schrödinger dalga denkleminin çözümü için hesaplamalarda kullanılan Asimtotik

İterasyon Metodu detaylı bir şekilde ele alınmakta ve bu metod uygulanarak çözülen birkaç örnek çalışmaya yer verilmektedir.

3. Bölüm'de, relativistik olmayan zamandan bağımsız Schrödinger dalga denkleminin çözümü için belirli bir forma dönüştürülmesinde yardımcı olan Nokta Kanonik Dönüşüm (PCT) Metodu ele alınmaktadır. Bu metot kullanılarak zamandan bağımsız Schrödinger dalga denklemi için bir örnek çalışmaya yer verilmektedir.

4. Bölüm'de, $M(r)=1/\left(1+\varsigma^2 r^2\right)^2$ şeklinde değişken kütleli relativistik olmayan zamandan bağımsız d-boyutlu Schrödinger dalga denklemini göz önünde bulundurarak enerji özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının nasıl hesaplanacağına yer verilmektedir. Ayrıca yine aynı şekilde $M(x)=M_0 e^{-2x}$ şeklinde değişken kütleli relativistik olmayan zamandan bağımsız bir boyutlu Schrödinger dalga denklemini göz önünde bulundurarak enerji özdeğerlerinin nasıl hesaplanacağına yer verilmektedir.

5. Bölüm'de, $M(x)=M_0 e^{\alpha x}$ şeklinde değişken kütleli relativistik dalga denklemini yani Klein-Gordon denklemini göz önünde bulundurarak enerji özdeğerlerinin nasıl hesaplanacağına yer verilmektedir.

6. Bölüm'de, tartışma ve sonuçların yorumlanması yer almaktadır.

2. BÖLÜM

ASİMTOTİK İTERASYON METODU ve BU METODUN UYGULAMARI

Bu bölümde hesaplamaların yapılacağı, ikinci mertebeden homojen lineer diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan Asimtotik İterasyon Metodu detaylı bir şekilde anlatılacak ve metodun uygulandığı örneklere yer verilecektir.

2.1. Asimtotik İterasyon Metodu (AIM)

İkinci mertebeden homojen lineer diferansiyel denklemlerle matematiksel fizikteki pek çok alanda karşılaşılır. Bu tip diferansiyel denklemleri çözmek için pek çok farklı yöntem vardır. Yapılacak hesaplamalarda, son zamanlarda geliştirilmiş güncel ve kullanışlı bir metod olan Asimtotik İterasyon metodu (AIM) kullanılacaktır. AIM aşağıdaki formda verilen ikinci mertebeden homojen lineer diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılır [2, 7, 8, 11, 15].

$$y''_n(r) = \lambda_0(r) y'_n(r) + s_0(r) y_n(r) \tag{2.1}$$

Burada $\lambda_0(r) \neq 0$, $s_0(r)$ ve $\lambda_0(r)$ türevlenebilir fonksiyonlardır. Bu denklemin genel çözümünü bulmak için (2.1) denkleminin r 'ye göre türevi alınırsa,

$$y'''_n(r) = \lambda_1(r) y'_n(r) + s_1(r) y_n(r) \tag{2.2}$$

bulunur. Burada,

$$\lambda_1(r) = \lambda'_0(r) + s_0(r) + \lambda_0^2(r), \quad s_1(r) = s'_0(r) + s_0(r)\lambda_0(r) \tag{2.3}$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde denklem (2.2)'nin bir kez daha türevi alınırsa,

$$y_n^{(4)}(r) = \lambda_2(r) y'_n(r) + s_2(r) y_n(r) \tag{2.4}$$

bulunur. Burada,

$$\lambda_2(r) = \lambda'_1(r) + s_1(r) + \lambda_0(r)\lambda_1(r) \text{ ve } s_2(r) = s_1'(r) + s_0(r)\lambda_1(r) \tag{2.5}$$

Denklem (2.1.)'in iterasyonundan (k+1) inci ve (k+2) inci türevler k=1,2,3,… olmak üzere,

$$y_n^{(k+1)}(r) = \lambda_{k-1}(r) y'_n(r) + s_{k-1}(r) y_n(r) \text{ ve } y_n^{(k+2)}(r) = \lambda_k(r) y_n'(r) + s_k(r) y_n(r) \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$$\lambda_k(r) = \lambda'_{k-1}(r) + s_{k-1}(r) + \lambda_0(r)\lambda_{k-1}(r) \text{ ve } s_k(r) = s_{k-1}'(r) + s_0(r)\lambda_{k-1}(r) \tag{2.7}$$

tekrarlama terimleri olarak bilinir. (k+2) inci ve (k+1) inci türevlerin oranından,

$$\frac{d}{dr}\ln\left[y_n^{(k+1)}(r)\right] = \frac{y_n^{(k+2)}(r)}{y_n^{(k+1)}(r)} = \frac{\lambda_k(r)\left[y_n'(r) + \frac{s_k(r)}{\lambda_k(r)} y_n(r)\right]}{\lambda_{k-1}(r)\left[y_n'(r) + \frac{s_{k-1}(r)}{\lambda_{k-1}(r)} y_n(r)\right]} \tag{2.8}$$

bulunur. Yeterince büyük k değerleri için,

$$\frac{s_k(r)}{\lambda_k(r)} = \frac{s_{k-1}(r)}{\lambda_{k-1}(r)} = \alpha(r) \tag{2.9}$$

(2.8) ifadesi sade bir formda yazılacak olunursa, bu oran AIM'in karakteristik yapısını ifade eder.

$$\frac{d}{dr}\ln\left[y_n^{(k+1)}(r)\right] = \frac{\lambda_k(r)}{\lambda_{k-1}(r)} \tag{2.10}$$

elde edilir. Böylece k'ya bağlı genel çözüm aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$y_n^{(k+1)}(r) = C_1 \exp\left(\int \frac{\lambda_k(r)}{\lambda_{k-1}(r)} dr\right) = C_1 \lambda_{k-1}(r) \exp\left(\int \left[\alpha(r) + \lambda_0(r)\right] dr\right) \tag{2.11}$$

Burada C_1 integrasyon sabitidir. Denklem (2.11), denklem (2.6) da yerine yazılırsa; birinci mertebeden diferansiyel denklem aşağıdaki şekilde ifade edilebilir,

$$y'_n(r)+\alpha(r)y_n(r)=C_1\exp\left(\int\left[\alpha(r)+\lambda_0(r)\right]dr\right) \tag{2.12}$$

Bu şekildeki birinci mertebeden diferansiyel denklem kolaylıkla çözülebilir. (2.1) eşitliğinin en genel çözümü aşağıdaki şekilde ifade edilir,

$$y_n(r)=\exp\left(-\int\alpha(r_1)dr_1\right)\left[C_2+C_1\int\exp\left(\int\left[\lambda_0(r_2)+2\alpha(r_2)\right]dr_2\right)dr_1\right] \tag{2.13}$$

Verilen bir potansiyel için radyal Schrödinger denklemi (2.1) eşitliğine dönüşür. Daha sonra $\lambda_0(r)$ ve $s_0(r)$ hesaplanıp $s_k(r)$ ve $\lambda_k(r)$ parametreleri (2.7) eşitliği yardımıyla hesaplanır. Enerji özdeğerleri de (2.9) eşitliği ile verilen kuantizasyon durumuyla elde edilir. Dolayısıyla (2.9) eşitliğiyle birlikte var olan durumun kuantizasyonu aşağıdaki şekildeki gibi yazılabilir,

$$\delta_k(r)=\lambda_k(r)s_{k-1}(r)-\lambda_{k-1}(r)s_k(r)=0 \tag{2.14}$$

Burada k ile gösterilen iterasyon sayısıdır. Dolayısıyla, $k=1,2,3,...$ şeklindedir. Tam olarak çözülebilen potansiyeller için, radyal kuantum sayısı n'in iterasyon sayısı k'ya eşit olduğu durumda problem tam çözülebiliyorsa enerji özdeğerleri (2.14) eşitliğinden bulunur. Kolayca çözülemeyen potansiyeller için tam çözüm yoktur, seçilen bir n temel kuantum sayısı için, uygun r_0 noktası seçilir ve asimtotik dalga fonksiyonunun maksimum değeri veya potansiyelin minimum değeri ve ortalama enerji özdeğerleri k iterasyon değerinin n-temel kuantum sayısından büyük değerleri için bu eşitlik yardımıyla hesaplanır [2, 15, 23].

2.2. Uygulamaları

Konuyu açıklayıcı olması için AIM ile çözülebilen birkaç örnek verilecektir.

2.2.1. Sabit Katsayılı Diferansiyel Denklemler

$s_0(r)$ ve $\lambda_0(r)$ sabit fonksiyonlar olsun. Örneğin; $S_0=-3$ ve $\lambda_0=4$ olarak alınırsa; (2.1) diferansiyel denklemi,

$$y'' = 4y' - 3y \tag{2.15}$$

şeklinde yazılır. λ_n ve S_n (2.7) eşitliği yardımıyla hesaplanırsa,

$$\lambda_n = \frac{1}{2}\left(3^{n+2} - 1\right) \qquad S_n = -\frac{3}{2}\left(3^{n+1} - 1\right) \tag{2.16}$$

bulunur. (2.9) da verilen şarta göre $n \to \infty$ da limit değerine bakılacak olunursa; $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\lambda_n} = -1$ olduğu ve dolayısıyla genel çözümü ifade eden (2.13) eşitliğinin,

$$y_r = C_2 e^x + C_1 e^{3x} \tag{2.17}$$

şeklinde elde edilebileceği görülür. (2.1) eşitliğindeki diferansiyel denklem ele alındığında $\lambda_0(r)$ ve $s_0(r)$ nin sabit olması durumunda (2.7) ifadesindeki bu terimler aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$\lambda_n = S_{n-1} + \lambda_0 \lambda_{n-1} \text{ ve } S_n = S_0 \lambda_{n-1} \tag{2.18}$$

Sonuç olarak $\frac{S_n}{\lambda_n}$ oranı,

$$\frac{S_n}{\lambda_n} = \frac{S_0 \lambda_{n-1}}{S_{n-1} + \lambda_0 \lambda_{n-1}} = \frac{S_0}{\frac{S_{n-1}}{\lambda_{n-1}} + \lambda_0} \tag{2.19}$$

olur. (2.9) eşitliğindeki $\frac{s_k(r)}{\lambda_k(r)} = \frac{s_{k-1}(r)}{\lambda_{k-1}(r)} = \alpha(r)$ hatırlanır ise,

$$\frac{S_n}{\lambda_n} = \frac{S_0}{\frac{S_n}{\lambda_n} + \lambda_0} \tag{2.20}$$

yazılır. Bu kuadratik eşitlik $\frac{S_n}{\lambda_n}$ oranını λ_0 ve S_0 cinsinden bulmak için kullanılabilir.

Böylece (2.1) ile ifade edilen diferansiyel eşitliğin (2.13) de ifade edilen genel çözümünün sabit katsayılarla ifade edilebileceği görülür [2-15].

2.2.2. Kratzer Potansiyelinin AIM İle Tam Çözümü

Kratzer potansiyeli,

$$V(r) = -2D_e\left(\frac{\alpha}{r} - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{r^2}\right) \tag{2.22}$$

şeklinde tanımlanır. D_e ayrılma enerjisi ve a ise çekirdekler arası denge mesafesidir. Bu potansiyel Schrödinger denkleminde yerine yazılırsa, Schrödinger denkleminin radyal kısmı aşağıdaki şekilde ifade edilir,

$$\frac{d^2}{dr^2}R_{nl}(r) + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E_{nl} + 2\frac{D_e a}{r} - \frac{D_e a^2}{r^2} - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}\right)R_{nl}(r) = 0 \tag{2.23}$$

Burada n ve l radyal ve orbital açısal kuantum numaraları, r iki atomlu molekülün çekirdekleri arasındaki mesafe ve E_{nl} ise bağlı durum enerji özdeğeridir. (2.23) denklemini daha sade bir formda yazmak için aşağıda tanımlanan parametreler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= -\frac{2\mu E}{\hbar^2} \\ D' &= \frac{2\mu D_e}{\hbar^2} \\ A &= 2D'a \end{aligned} \tag{2.24}$$

Schrödinger denklemi,

$$\frac{d^2}{dr^2}R_{nl}(r) + \left(-\varepsilon^2 + \frac{A}{r} - \frac{l(l+1) + D'a^2}{r^2}\right)R_{nl}(r) = 0 \tag{2.25}$$

şeklinde ifade edilir,

$$\xi = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + D'a^2\right)} \tag{2.26}$$

dönüşümünden sonra radyal Schrödinger denklemi,

$$\frac{d^2R_{nl}(r)}{dr^2}+\left(-\varepsilon^2+\frac{A}{r}-\frac{\xi(\xi+1)}{r^2}\right)R_{nl}(r)=0 \tag{2.27}$$

şeklinde yazılır. Bu diferansiyel denklemin $r\to\infty$ da düzensiz tekillikleri vardır. Bağlı durumdaki normalize edilmiş çözümleri $\exp(-\varepsilon r)$ şeklinde davranır. Benzer şekilde $r\to 0$ da da tekillikler vardır. Bu durumda $R_{nl}(r)\approx r^{\xi+1}$ dir. Bu denklemi AIM ile çözmek için aşağıdaki şekilde verilen uygun bir dalga fonksiyonu önerilip, bu dalga fonksiyonu bir önceki denklemde yerine yazılırsa,

$$R(r)=r^{\xi+1}\exp(-\varepsilon r)\,y(r)$$

$$y''(r)=2\left(\varepsilon-\frac{(\xi+1)}{r}\right)y'(r)+\left(\frac{2(\xi+1)\varepsilon-A}{r}\right)y(r) \tag{2.28}$$

elde edilir. Bu denklem AIM ile çözülebilir. Burada,

$$\begin{aligned}
\lambda_0&=2\left[\varepsilon-\frac{(\xi+1)}{r}\right]\\
s_0&=\frac{2(\xi+1)\varepsilon-A}{r}\\
\lambda_1&=2\frac{\xi+1}{r^2}+\frac{2(\xi+1)\varepsilon-A}{r}+\left(2\varepsilon-2\frac{\xi+1}{r}\right)^2\\
s_1&=-\frac{2(\xi+1)\varepsilon-A}{r^2}+\left(2(\xi+1)\varepsilon-A\right)\left(2\varepsilon-2\frac{\xi+1}{r}\right)r^{-1}\\
&\cdots
\end{aligned} \tag{2.29}$$

şeklinde verilir. Bu sonuçlar ve (2.9) eşitliği kullanarak,

$$\begin{aligned}
\frac{s_0}{\lambda_0}=\frac{s_1}{\lambda_1}&\Rightarrow\varepsilon_0=\frac{A}{2(\xi+1)}\\
\frac{s_1}{\lambda_1}=\frac{s_2}{\lambda_2}&\Rightarrow\varepsilon_1=\frac{A}{2(\xi+2)}\\
\frac{s_2}{\lambda_2}=\frac{s_3}{\lambda_3}&\Rightarrow\varepsilon_2=\frac{A}{2(\xi+3)}\\
&\cdots
\end{aligned} \tag{2.30}$$

bulunur. Yukarıdaki ifadeler genelleştirilirse özdeğerler,

$$\varepsilon_n = \frac{A}{2\left(n+\xi+1\right)} \tag{2.31}$$

şeklinde ifade edilir. (2.24) eşitliğinden enerji özdeğerleri de E_{nl}, aşağıdaki gibi bulunur [2-37-38].

$$E_{nl} = -\frac{2\mu}{\hbar^2} D_e{}^2 a^2 \left(n+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2\mu D_e}{\hbar^2}a^2}\right)^{-2} \tag{2.32}$$

2.2.3. Hulthén Potansiyelinin AIM İle Tam Çözümü

Deforme edilmiş Hulthén potansiyeli;

$$V_{DH}(r) = -Ze^2\delta\frac{e^{-\delta r}}{1-qe^{-\delta r}} \tag{2.33}$$

şeklinde tanımlanır. Burada Z atom numarası, δ perdeleme parametresi ve q ise deformasyon parametresidir. Deforme edilmiş Hulthén potansiyeli $q=1$ için Hulthén potansiyeline, $q=-1$ için Wood-Saxon potansiyeline ve $q=0$ için eksponansiyel potansiyele indirgenir. Radyal Scrödinger denklemi aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\frac{d^2R_{nl}(r)}{dr^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E-V_{eff}\right]R_{nl}(r)=0 \tag{2.34}$$

verilen potansiyel ve aşağıda tanımlanan parametreler,

$$-\varepsilon^2=\frac{2mE}{\hbar^2\delta^2},\ \ \beta^2=\frac{2me^2Z}{\hbar^2\delta} \tag{2.35}$$

radyal Schrödinger denkleminde yerine yazılıp $\delta r = x$ dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{d^2R(x)}{dx^2}+\left(-\varepsilon^2+\beta^2\frac{e^{-x}}{\left(1-qe^{-x}\right)}\right)R(x)=0 \tag{2.36}$$

elde edilir. $y=e^{-x}$ değişkeni kullanarak yukarıdaki denklem düzenlenip yazılırsa,

$$\frac{d^2R(y)}{dy^2}+\frac{1}{y}\frac{dR(y)}{dy}+\left[-\frac{\varepsilon^2}{y^2}+\beta^2\frac{1}{y(1-qy)}\right]R(y)=0 \tag{2.37}$$

elde edilir. Bu denklemi AIM ile çözmek için uygun fiziksel bir dalga fonksiyonu aşağıdaki gibi önerilebilir,

$$R(y)=y^{\varepsilon}(1-qy)f(y) \tag{2.38}$$

Önerilen bu dalga fonksiyonu (2.37) eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$\frac{d^2f(y)}{dy^2}=\left[\frac{(2\varepsilon q+3q)y-(2\varepsilon+1)}{y(1-qy)}\right]\frac{df(y)}{dy}+\left[\frac{2\varepsilon q+q-\beta^2}{y(1-qy)}\right]f(y) \tag{2.39}$$

elde edilir. Bu şekilde denklem AIM ile çözülebilir bir forma dönüşmüş olur. Böylece,

$$\begin{aligned}
\lambda_0&=\left(\frac{2\varepsilon qy+3qy-2\varepsilon-1}{y(1-qy)}\right)\\
s_0&=\left(\frac{2\varepsilon q+q-\beta^2}{y(1-qy)}\right)\\
\lambda_1&=\frac{2+\beta^2qy^2-8\varepsilon^2yq+4\varepsilon^2y^2q^2-y\beta^2+12q^2y^2\varepsilon+11q^2y^2-18\varepsilon yq+6\varepsilon-7qy+4\varepsilon^2}{y^2(-1+qy)^2}\\
s_1&=\frac{(2\varepsilon q+q-\beta^2)(-2+5qy-2\varepsilon+2\varepsilon yq)}{y^2(-1+qy)^2}\\
&\ldots
\end{aligned} \tag{2.40}$$

olarak tanımlanır. Bu sonuçlar ve (2.9) eşitliği kullanarak,

$$\begin{aligned}
\frac{s_0}{\lambda_0}=\frac{s_1}{\lambda_1}&\Rightarrow\varepsilon_0=-\frac{1}{2}\frac{q-\beta^2}{q}\\
\frac{s_1}{\lambda_1}=\frac{s_2}{\lambda_2}&\Rightarrow\varepsilon_1=-\frac{1}{4}\frac{4q-\beta^2}{q}\\
\frac{s_2}{\lambda_2}=\frac{s_3}{\lambda_3}&\Rightarrow\varepsilon_2=-\frac{1}{6}\frac{9q-\beta^2}{q}\\
&\ldots
\end{aligned} \tag{2.41}$$

elde edilir. Yukarıdaki sonuçlar genelleştirilirse özdeğerler,

$$\varepsilon_n=-\frac{1}{(2n+2)}\left(\frac{q(n+1)^2-\beta^2}{q}\right)\qquad n=0,1,2,\ldots \tag{2.42}$$

şeklinde ifade edilir. Enerji özdeğerlerini veren eşitlik, denklem (2.35) kullanılarak,

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\frac{me^2Z}{\hbar^2}}{(n+1)q} - \frac{(n+1)\delta}{2}\right]^2 \qquad n = 0,1,2,... \qquad (2.43)$$

olarak elde edilir. Atomik birimlerde $(\hbar = m = e = 1)$ ve Z=1 için enerji özdeğerini veren eşitlik,

$$E_n = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\bar{n}q} - \frac{\bar{n}\delta}{2}\right]^2 \qquad \bar{n} = n+1 \ , \ \bar{n} = 1,2,3,... \qquad (2.44)$$

şekline dönüşür [2, 20, 25, 26].

2.2.4. Morse Potansiyelinin AIM İle Tam Çözümü

Morse potansiyeli aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$V_{Morse}(r) = D_e\left(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}\right) \qquad (2.45)$$

Burada $x = (r - r_e)/r_e$ ve $\alpha = ar_e$ şeklindedir. Bu ifadede yer alan D_e ve α sırasıyla ayrılma enerjisi ve Morse parametresini ifade eder. r_e bağlı iki çekirdek arasındaki denge mesafesini, a ise potansiyel kuyusunun genişliğini ifade eden parametredir. Verilen potansiyel ve aşağıda tanımlanan parametreler radyal Schrödinger denkleminde yerine yazılırsa,

$$-\varepsilon^2 = \frac{2\mu r_e^{\,2}E}{\hbar^2}, \ \beta^2 = \frac{2\mu r_e^{\,2}D_e}{\hbar^2} \qquad (2.46)$$

Schrödinger denklemi aşağıdaki forma dönüşür,

$$\frac{d^2R_n(x)}{dx^2} + \left(-\varepsilon^2 + 2\beta^2e^{-\alpha x} - \beta^2e^{-2\alpha x}\right)R_n(x) = 0 \qquad (2.47)$$

$y = e^{-\alpha x}$ dönüşümü yapılırsa (2.47) eşitliği şu şekilde yazılabilir,

$$\frac{d^2R_n(y)}{dy^2}+\frac{1}{y}\frac{dR_n(y)}{dy}+\left[-\frac{\varepsilon^2}{\alpha^2}\frac{1}{y^2}+\frac{2\beta^2}{\alpha^2}\frac{1}{y}-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right]R_n(y)=0 \tag{2.48}$$

Bu formdaki bir denklemi AIM ile çözmek için uygun fiziksel bir dalga fonksiyonu önerilmelidir,

$$R_{nl}(y)=y^{\frac{\varepsilon}{\alpha}}e^{-\frac{\beta}{\alpha}}f_{nl}(y) \tag{2.49}$$

(2.49) denklemi (2.48) de yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\frac{d^2f_{nl}(y)}{dy^2}=\left(\frac{2\beta y-2\varepsilon-\alpha}{\alpha y}\right)\frac{df_{nl}(y)}{dy}+\left(\frac{2\varepsilon\beta+\alpha\beta-\beta^2}{y\alpha^2}\right)f_{nl}(y) \tag{2.50}$$

elde edilir. Bu formdaki bir denkleme AIM uygulanabilir,

$$\begin{aligned}
&\lambda_0=\left(\frac{2\beta y-2\varepsilon-\alpha}{\alpha y}\right)\\
&s_0=\left(\frac{2\varepsilon\beta+\alpha\beta-2\beta^2}{\alpha^2 y}\right)\\
&\lambda_1=\frac{-3\beta\alpha y+6\varepsilon\alpha+2\alpha^2-6\beta y\varepsilon-2\beta^2y+4\varepsilon^2+4\beta^2y^2}{\alpha^2y^2}\\
&s_1=2\frac{\beta(2\varepsilon+\alpha-2\beta)(-\alpha-\varepsilon+\beta y)}{\alpha^3y^2}\\
&\ldots
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Bu sonuçlar ve (2.9) eşitliği yardımıyla,

$$\begin{aligned}
&\frac{s_0}{\lambda_0}=\frac{s_1}{\lambda_1}\Rightarrow\varepsilon_0=-\frac{\alpha}{2}+\beta\\
&\frac{s_1}{\lambda_1}=\frac{s_2}{\lambda_2}\Rightarrow\varepsilon_1=-\frac{3\alpha}{2}+\beta\\
&\frac{s_2}{\lambda_2}=\frac{s_3}{\lambda_3}\Rightarrow\varepsilon_2=-\frac{5\alpha}{2}+\beta\\
&\ldots
\end{aligned} \tag{2.52}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki sonuçlar genelleştirilirse özdeğerler,

$$\varepsilon_n = \beta - \left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha \qquad n = 0,1,2,3,... \tag{2.53}$$

şeklinde bulunur. (2.46) eşitliğinden enerji özdeğerleri E_n,

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2\mu r_e^{\,2}}\left[\beta - \left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha\right]^2 \tag{2.54}$$

şeklinde elde edilir [18, 26].

2.2.5. Gol'dman ve Krichenkov Potansiyelinin AIM İle Tam Çözümü

Gol'dman ve Krichenkov Potansiyeli aşağıdaki şekildeki gibi tanımlanır,

$$V_{GK} = r^2 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{r^2} \tag{2.55}$$

Burada γ ifadesi genelleştirilmiş uzantı parametresidir. Bunun yerine açısal momentum kuantum numarası $l = 0,1,2,3,...$ karşılık gelmektedir. Potansiyel ifadesi Hamiltonyende yerine yazılırsa;

$$H\psi = E\psi \tag{2.56}$$

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + r^2 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{r^2}\right)\psi = E\psi \tag{2.57}$$

Bu ifadenin AIM ile tam çözümü için uygun bir dalga fonksiyonu,

$$\psi = r^{\gamma+1}e^{-\frac{r^2}{2}} f(r) \tag{2.58}$$

şeklinde seçilir ve (2.58) denklemi (2.57)'de yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\frac{d^2 f}{dr^2} = 2\left(r - \frac{\gamma+1}{r}\right)\frac{df}{dr} + (2\gamma + 3 - E) f \tag{2.59}$$

elde edilir. Bu formdaki bir denkleme AIM uygulanabilir.

$$\begin{aligned}
&\lambda_0 = 2\left(r - \frac{\gamma+1}{r}\right) \\
&s_0 = 2\gamma + 3 - E \\
&\lambda_1 = \frac{-3r^2 + 2\gamma r + 2r - 6\gamma r^2 - Er^2 + 4r^4 + 4\gamma^2 + 8\gamma + 4}{r^2} \\
&s_1 = \frac{4\gamma r^2 - 4\gamma^2 - 2\gamma + 6r^2 - 2r^2 E + 2\gamma E - 2E}{r} \\
&\ldots
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Bu sonuçlar ve (2.9) eşitliği yardımıyla,

$$\begin{aligned}
&\frac{s_0}{\lambda_0} = \frac{s_1}{\lambda_1} \Rightarrow E_0 = 3 + 2\gamma \\
&\frac{s_1}{\lambda_1} = \frac{s_2}{\lambda_2} \Rightarrow E_1 = 7 + 2\gamma \\
&\frac{s_2}{\lambda_2} = \frac{s_3}{\lambda_3} \Rightarrow E_2 = 11 + 2\gamma \\
&\ldots
\end{aligned} \tag{2.61}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki sonuçlar genelleştirilirse enerji özdeğerler E_n,

$$E_n = 4n + 2\gamma + 3 \qquad n = 0,1,2,3... \tag{2.62}$$

şeklinde elde edilir [2, 9, 10, 24].

3. BÖLÜM

PCT TEOREMİ (NOKTA KANONİK DÖNÜŞÜMÜ)

Bu bölümde ele alacağımız teoremi ileri ki bölümlerde göz önüne alacağımız denklemlerin çözülebilir bir hal alabilmesi için kullanacağız.

3.1. PCT Metodu

Bu metod, pek çok çözülebilir potansiyeller için sıklıkla kullanılmaktadır. Örneğin, Schrödinger denklemini, hipergeometrik ve konfluent hipergeometrik denklemlerine indirgemede bu metod kullanılır [3].

Bu metodun uygulanabilirliğini görmek için bir boyutlu Schrödinger dalga denklemini ele alalım,

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V\left(\alpha,x\right)-E_n\left(\alpha\right)\right\}\psi_n\left(\alpha,x\right)=0 \tag{3.1}$$

Bizim amacımız (3.1) denklemini dönüşüm uygularken $V\left(\alpha,x\right)$ değişmeyen potansiyel altında $x\to z$ dönüşümü uygulayarak karşılık gelen denklemi yazmak.

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dz^2}+\tilde{V}\left(\tilde{\alpha},z\right)-\tilde{E}_n\left(\tilde{\alpha}\right)\right\}\tilde{\psi}_n\left(\tilde{\alpha},z\right)=0 \tag{3.2}$$

Burada; $n=0,1,2,3...$(kuantum sayısı) α (orijinal denklemdeki potansiyel parametresi) $\tilde{\alpha}$ (dönüşümden sonraki yeni potansiyelin parametresi)

Bağlı ve bağımsız değişkenlerin her ikisi içinde aşağıdaki dönüşümü uygulayalım [13, 16, 17].

$$x=f(z) \tag{3.3}$$

$$\psi\left(\alpha,x\right)=\upsilon\left(z\right)\tilde{\psi}\left(\tilde{\alpha},z\right) \tag{3.4}$$

Burada (3.3) denklemini dikkate alırsak,

$$x = f(z) \Rightarrow dx = f'dz \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{f'} \tag{3.5}$$

buradan yola çıkarak $\frac{d}{dx}$,

$$\frac{d}{dx} = \frac{dz}{dx}\frac{d}{dz} = \frac{1}{f'}\frac{d}{dz} \tag{3.6}$$

şeklinde elde edilir. Aynı şekilde $\frac{d^2}{dx^2}$' de biraz işlemle,

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx} = \frac{1}{f'}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{f'}\frac{d}{dz}\right) = \frac{1}{f'}\left[-\frac{f''}{(f')^2}\frac{d}{dz} + \frac{1}{f'}\frac{d^2}{dz^2}\right] \tag{3.7}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = -\frac{f''}{(f')^3}\frac{d}{dz} + \frac{1}{(f')^2}\frac{d^2}{dz^2} \tag{3.8}$$

şeklinde elde edilir. (3.8) denklemini $\psi(\alpha, x)$ ile çarpılırsa,

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(\alpha,x) = -\frac{f''}{(f')^3}\frac{d}{dz}\psi(\alpha,x) + \frac{1}{(f')^2}\frac{d^2}{dz^2}\psi(\alpha,x) \tag{3.9}$$

yazılır. (3.4) deki ifade (3.9)'da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}\psi(\alpha,x) &= -\frac{f''}{(f')^3}\frac{d}{dz}\left(\upsilon(z)\tilde{\psi}(\alpha,z)\right) + \frac{1}{(f')^2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\upsilon(z)\tilde{\psi}(\alpha,z)\right) \\
\frac{d^2}{dx^2}\psi(\alpha,x) &= -\frac{f''}{(f')^3}\left[\upsilon'\psi + \upsilon\frac{d\tilde{\psi}}{dz}\right] + \frac{1}{(f')^2}\frac{d}{dz}\left[\upsilon'\psi + \upsilon\frac{d\tilde{\psi}}{dz}\right] \\
\frac{d^2}{dx^2}\psi(\alpha,x) &= -\frac{f''\upsilon'}{(f')^3}\tilde{\psi} - \frac{f''\upsilon}{(f')^3}\frac{d\tilde{\psi}}{dz} + \frac{\upsilon''}{(f')^2}\tilde{\psi} + \frac{2\upsilon'}{(f')^2}\frac{d\tilde{\psi}}{dz} + \frac{\upsilon}{(f')^2}\frac{d^2\tilde{\psi}}{dz^2}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

bağıntısı bulunur ki bu bağıntıda daha sade bir şekilde ifade edersek,

$$\frac{d^2\psi(\alpha,x)}{dx^2} = \frac{\upsilon}{(f')^2}\frac{d^2\tilde{\psi}}{dz^2} + \left(\frac{2\upsilon'}{(f')^2} - \frac{f''\upsilon}{(f')^3}\right)\frac{d\tilde{\psi}}{dz} + \left(\frac{\upsilon''}{(f')^2} - \frac{f''\upsilon}{(f')^3}\right)\tilde{\psi} \tag{3.11}$$

şeklinde elde edilir. (3.4) ve (3.11) denklemlerini (3.1) de yerine yazılırsa [13, 16].

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\upsilon}{\left(f'\right)^2}\frac{d^2\tilde{\psi}}{dz^2}-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\upsilon'}{\left(f'\right)^2}-\frac{f''\upsilon}{\left(f'\right)^3}\right)\frac{d\tilde{\psi}}{dz}-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\upsilon'}{\left(f'\right)^2}-\frac{f''\upsilon'}{\left(f'\right)^3}\right)\tilde{\psi}+\left[V\left(\alpha,f\left(z\right)\right)-E\left(\alpha\right)\right]\upsilon\tilde{\psi}=0 \tag{3.12}$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı denklemi $\frac{\upsilon}{\left(f'\right)^2}$ terimi ile çarpılırsa;

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\tilde{\psi}}{dz^2}-\frac{\hbar^2}{m}\left\{\frac{\upsilon'}{\upsilon}-\frac{f''}{2f'}\right\}\frac{d\tilde{\psi}}{dz}+\left[\left(f'\right)^2\left\{V\left(\alpha,f\left(z\right)\right)-E\left(\alpha\right)\right\}+\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{f''\upsilon'}{f'\upsilon}-\frac{\upsilon''}{\upsilon}\right\}\right]\tilde{\psi}=0 \tag{3.13}$$

eşitliği elde edilir ki bu da (3.1) denkleminin yeni bir formudur. (3.13) denkleminin birinci türevinin katsayısı dikkate alınır ise [13, 16, 17].

$$\frac{\upsilon'}{\upsilon}-\frac{f''}{2f'}=0\Rightarrow\int\frac{\upsilon'}{\upsilon}dz=\int\frac{f''}{2f'}dz\Rightarrow\ln\upsilon-\ln C=\frac{1}{2}\ln f'$$

$$\ln\frac{\upsilon}{C}=\ln\sqrt{f'}$$

$$\boxed{\upsilon=C\sqrt{f'\left(z\right)}} \tag{3.14}$$

elde edilmiş olur. Burada C integrasyon sabitidir. f ise dönüşüm fonksiyonudur. Dolayısıyla (3.14) denkleminin yardımıyla orijinal problemin öz fonksiyonunu yazabiliriz.

$$\psi\left(\alpha,f\left(z\right)\right)=C\sqrt{f'\left(z\right)}\tilde{\psi}\left(\tilde{\alpha},z\right) \tag{3.15}$$

(3.2) ile (3.13) denklemlerini karşılaştırılırsa,

$$\tilde{V}\left(\tilde{\alpha},z\right)-\tilde{E}\left(\tilde{\alpha}\right)=U\left(\alpha,z\right) \tag{3.16}$$

enerji özdeğeri yazılabilir. Buradan yola çıkarak,

$$U\left(\alpha,z\right)=\left(f'\right)^2\left\{V\left(\alpha,f\left(z\right)\right)-E\left(\alpha\right)\right\}+\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{f''\upsilon'}{f'\upsilon}-\frac{\upsilon''}{\upsilon}\right\} \tag{3.17}$$

yazabiliriz. Burada $\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{f''\upsilon'}{f'\upsilon}-\frac{\upsilon''}{\upsilon}\right\}$ ifadesini düzenlersek,

$$\frac{\upsilon'}{\upsilon}=\frac{f''}{2f'}\Rightarrow\frac{f''\upsilon'}{f'\upsilon}=\frac{1}{2}\frac{\left(f''\right)^2}{\left(f'\right)^2} \tag{3.18}$$

bulunur. Bu denklem (3.14) denkleminin yardımıyla,

$$\begin{aligned}
&\upsilon=C\left(f'\right)^{1/2}\Rightarrow\upsilon'=C\frac{1}{2}\left(f'\right)^{-\frac{1}{2}}f''\\
&\upsilon''=\frac{C}{2}\left(-\frac{1}{2}\left(f'\right)^{-\frac{3}{2}}\left(f''\right)^2+\left(f'\right)^{-\frac{1}{2}}f'''\right)\\
&\frac{\upsilon''}{\upsilon}=\frac{\frac{C}{2}\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(f''\right)^2}{\left(f'\right)^{3/2}}+\frac{f'''}{\left(f'\right)^{1/2}}\right)}{C\left(f'\right)^{1/2}}=-\frac{1}{4}\frac{\left(f''\right)^2}{\left(f'\right)^2}+\frac{1}{2}\frac{f'''}{f'}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Dolayısıyla da (3.18) ve (3.19) denklemlerini kullanarak,

$$\begin{aligned}
&\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{f''\upsilon'}{f'\upsilon}-\frac{\upsilon''}{\upsilon}\right\}=\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{1}{2}\frac{\left(f''\right)^2}{\left(f'\right)^2}+\frac{1}{4}\frac{\left(f''\right)^2}{\left(f'\right)^2}-\frac{1}{2}\frac{f'''}{f'}\right\}\\
&\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{f''\upsilon'}{f'\upsilon}-\frac{\upsilon''}{\upsilon}\right\}=\frac{\hbar^2}{4m}\left\{\frac{3}{2}\frac{\left(f''\right)^2}{\left(f'\right)^2}-\frac{f'''}{f'}\right\}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

şeklinde elde edilir. (3.20) denkleminin yardımı ile (3.17) denklemi ise, aşağıdaki gibi bulunur ki bu da dönüşüm fonksiyonunun enerji özdeğeridir [13, 14, 16].

$$U\left(\alpha,z\right)=\left(f'\right)^2\left\{V\left(\alpha,f\left(z\right)\right)-E\left(\alpha\right)\right\}+\frac{\hbar^2}{4m}\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2-\frac{f'''}{f'}\right\} \tag{3.21}$$

3.2. Değişken Kütleli Schrödinger Dalga Denklemine Uygulaması

Hamiltonyen ifadesini tanımlarsak,

$$H=\frac{1}{2}\left[\vec{P}\frac{1}{M\left(\vec{r}\right)}\vec{P}\right]+V\left(\vec{r}\right)=-\frac{\hbar^2}{2m_0}\left[\vec{\nabla}\frac{1}{m\left(\vec{r}\right)}\vec{\nabla}\right]+V\left(\vec{r}\right) \tag{3.22}$$

Burada, $\left(M\left(\vec{r}\right)=m_0 m\left(\vec{r}\right)\right)$ olarak alınmıştır. Bir boyutlu zamandan bağımsız Schrödinger dalga denklemi $\left(\hbar=m_0=1\right)$ alınırsa (3.22) Hamiltonyen ifadesinin yardımıyla [14, 16, 28, 30].

$$\left\{\frac{d^2}{dx^2}-\frac{m'}{m}\frac{d}{dx}-2m\left[V\left(x\right)-E\right]\right\}\phi\left(x\right)=0 \tag{3.23}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, E (enerji özdeğeri) ve $m'\equiv dm/dx$ şeklindedir.

Diğer taraftan bir boyutlu zamandan bağımsız Schrödinger dalga denklemini sabit kütle için,

$$\left\{\frac{d^2}{dy^2}-2\left[\upsilon(y)-\varepsilon\right]\right\}\psi\left(y\right)=0 \tag{3.24}$$

şeklinde yazabiliriz [30]. Burada, υ (potansiyel fonksiyonu) ε (enerji fonksiyonudur) (3.24) denklemine dönüşüm uygulanırsa,

$$y=q\left(x\right),\quad \psi\left(y\right)=g\left(x\right)\phi\left(x\right) \tag{3.25}$$

(3.25) dönüşümü yardımıyla PCT (Nokta Kanonik Dönüşümü) metodu uygulayarak (3.25) ifadeleri (3.24) bağıntısının yerine yazılacaktır. Öncelikle metodu uygulamaya başlayalım [3, 13].

$$y=q\left(x\right)\rightarrow dy=q'dx\rightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{1}{q'} \tag{3.26}$$

$$\frac{d}{dy}=\frac{dx}{dy}\frac{d}{dx}=\frac{1}{q'}\frac{d}{dx} \tag{3.27}$$

Buradan yola çıkarak d^2/dy^2 ifadesini tanımlayabiliriz,

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dy^2}&=\frac{d}{dy}\frac{d}{dy}=\frac{1}{q'}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{q'}\frac{d}{dx}\right]\\ \frac{d^2}{dy^2}&=-\frac{q''}{\left(q'\right)^3}\frac{d}{dx}+\frac{1}{\left(q'\right)^2}\frac{d^2}{dx^2}\end{aligned} \tag{3.28}$$

(3.28) ifadesini $\psi(y)$ ifadesi ile çarpıp $\psi(y)=g(x)\phi(x)$ yerine yazılır,

$$\frac{d^2}{dy^2}\psi(y)=-\frac{q^{''}}{(q^{'})^3}\frac{d}{dx}\left(g(x)\phi(x)\right)+\frac{1}{(q^{'})^2}\frac{d^2}{dx^2}\left(g(x)\phi(x)\right)$$
$$\frac{d^2}{dy^2}\psi(y)=-\frac{q^{''}}{(q^{'})^3}\left(g^{'}\phi+g\phi^{'}\right)+\frac{1}{(q^{'})^2}\left(g^{''}\phi+2g^{'}\phi^{'}+g\phi^{''}\right) \tag{3.29}$$

şeklinde elde edilir. (3.29) ifadesi düzenlenirse sonuç,

$$\frac{d^2\psi(y)}{dy^2}=\frac{g}{(q^{'})^2}\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}+\left(\frac{2g^{'}}{(q^{'})^2}-\frac{q^{''}g}{(q^{'})^3}\right)\frac{d\phi(x)}{dx}+\left(\frac{g^{''}}{(q^{'})^2}-\frac{q^{''}g^{'}}{(q^{'})^3}\right)\phi(x) \tag{3.30}$$

şeklinde elde edilir.(3.30) denklemi (3.24) de yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\left\{\frac{d^2}{dx^2}+\left(2\frac{g^{'}}{g}-\frac{q^{''}}{q^{'}}\right)\frac{d}{dx}+\left(\frac{g^{''}}{g}-\frac{q^{''}}{q^{'}}\frac{g^{'}}{g}\right)-2(q^{'})^2\left[\upsilon(q(x))-\varepsilon\right]\right\}\phi(x)=0 \tag{3.31}$$

elde edilir. (3.31) ile (3.23) karşılaştırılırsa [30, 36].

$$2\frac{g^{'}}{g}-\frac{q^{''}}{q^{'}}=-\frac{m^{'}}{m} \tag{3.32}$$

yazılabilir. Düzenleme yapılırsa,

$$\ln q^{'}-2\ln g=\ln m\Rightarrow \ln q^{'}-\ln g^2=\ln m\Rightarrow \ln\frac{q^{'}}{g^2}=\ln m$$
$$q^{'}=mg^2\Rightarrow g^2=\frac{q^{'}}{m}\Rightarrow \boxed{g(x)=\sqrt{\frac{q^{'}(x)}{m(x)}}} \tag{3.33}$$

ifadesi elde edilmiş olur. (3.33) denklemi (3.14) denklemine karşılık gelmektedir. Aynı şekilde enerji özdeğeri için (3.31) ile (3.23) karşılaştırılırsa,

$$-2m\left[V(x)-E\right]=-2(q^{'})^2\left[\upsilon(q)-\varepsilon\right]+\left(\frac{g^{''}}{g}-\frac{q^{''}}{q^{'}}\frac{g^{'}}{g}\right) \tag{3.34}$$

eşitliği bulunur. Bu bağıntı $g=\sqrt{q^{'}/m}$ kullanılarak yeniden düzenlenirse,

$$\boxed{V(x)-E=\frac{\left(q^{'}\right)^{2}}{m}\left[\upsilon(q)-\varepsilon\right]+\frac{1}{m}F(m,q)} \tag{3.35}$$

elde edilmiş olur [13, 29, 30]. (3.35) denklemindeki $F(m,q)$ ifadesi ise,

$$F(m,q)=\frac{1}{4}\left[\frac{m^{"}}{m}-\frac{3}{2}\left(\frac{m^{'}}{m}\right)^{2}-\frac{q^{'''}}{q^{'}}+\frac{3}{2}\left(\frac{q^{"}}{q^{'}}\right)^{2}\right] \tag{3.36}$$

şeklindedir [30].

4. BÖLÜM

DEĞİŞKEN KÜTLELİ RELATİVİSTİK OLMAYAN DALGA DENKLEMİ

Bu bölümde relativistik olmayan Schrödinger dalga denkleminin kütleye bağlı durumu incelenecek ve AIM metodu kullanılarak farklı kütle dağılımları için çözümler yapılacaktır.

4.1. $M(r) = 1 / (1+\varsigma^2 r^2)^2$ Biçimindeki Kütle Dağılımının Çözümü

Başlangıç noktası olarak öncelikle d-boyutlu Schrödinger dalga denklemi göz önünde bulundurulacaktır.

$$\vec{\nabla}\frac{1}{M(\vec{r})}\vec{\nabla}\psi(\vec{r})+2\left[E-V(r)\right]\psi(\vec{r})=0 \tag{4.1}$$

burada,

$$M(\vec{r})=m_0 m(\vec{r}) \tag{4.2}$$

şeklinde kütleye bağlı durum alınır ve $\hbar = m_0 = 1$ alınıp (4.2) ifadesi (4.1) de yerine yazılırsa,

$$\vec{\nabla}\frac{1}{m(\vec{r})}\vec{\nabla}\psi(\vec{r})+2\left[E-V(r)\right]\psi(\vec{r})=0 \tag{4.3}$$

bağıntısı bulunur. (4.3) denkleminin $\vec{\nabla}\frac{1}{m(\vec{r})}\vec{\nabla}\psi(\vec{r})$ terimi [4],

$$\vec{\nabla}\frac{1}{m(\vec{r})}\vec{\nabla}\psi(\vec{r})=\left(\vec{\nabla}\frac{1}{m(\vec{r})}\right)\left[\vec{\nabla}\psi(\vec{r})\right]+\frac{1}{m(\vec{r})}\nabla^2\psi(\vec{r}) \tag{4.4}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. (4.4) ifadesi (4.3) de yerine yazılırsa,

$$\left\{\left(\vec{\nabla}\frac{1}{m(\vec{r})}\right)\left[\vec{\nabla}\psi(\vec{r})\right]+\frac{1}{m(\vec{r})}\nabla^2\psi(\vec{r})\right\}+2\left[E-V(r)\right]\psi(\vec{r})=0 \tag{4.5}$$

şeklinde yazılabilir. Burada dalga fonksiyonu $\psi(\vec{r})$ ifadesi ise,

$$\psi(\vec{r})=r^{-(d-2)/2}R_{n_r,l}(r)Y_{l_d,m_d}(\theta,\vartheta) \tag{4.6}$$

olarak alınıp (4.4) ifadesinde yerine yazılıp ayrı ayrı ifade edilirse,

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla}\frac{1}{m(\vec{r})}\right)\left[\vec{\nabla}\psi(\vec{r})\right]&=\frac{d}{dr}\frac{1}{m(r)}\left[\frac{d}{dr}r^{-(d-1)/2}R_{n_r,l}(r)Y_{l_d,m_d}(\theta,\vartheta)\right]\\ \frac{1}{m(\vec{r})}\nabla^2\psi(\vec{r})&=\frac{1}{m(r)}\frac{d^2}{dr^2}\left[r^{-(d-1)/2}R_{n_r,l}(r)Y_{l_d,m_d}(\theta,\vartheta)\right]\end{aligned} \tag{4.7}$$

şeklinde elde edilir. (4.7) numaralı denklemler düzenlenip (4.5) de yerine yazılırsa, serbest bir parçacık için ($V=0$) d-boyutlu radyal Schrödinger dalga denklemi,

$$\boxed{\left\{\frac{d^2}{dr^2}-\frac{l_d(l_d+1)}{r^2}+\frac{m'(r)}{m(r)}\left(\frac{d-1}{2r}-\frac{d}{dr}\right)+2m(r)E\right\}R_{n_r,l}(r)=0} \tag{4.8}$$

şeklinde elde edilmiş olur [29].

Burada; $m'(r)=dm/dr$, $\left(l(l+1)/r^2\to l_d(l_d+1)/r^2\right)$ ve $\left(l_d=l+(d-3)/2,\quad d\geq 2\right)$ şeklindedir. Aynı zamanda $\left(\hbar=m_0=1\right)$, $\left(M(\vec{r})=m_0m(\vec{r})\right)$, $\left(\alpha=\gamma=0\,ve\,\beta=-1\right)$ olarak alınmıştır. $n_r=0,1,2,3,...$ (radyal kuantum sayısı), $d=1\to l_d=-1\;ve\;l_d=0$ şeklindedir.

(4.8) denklemine Bölüm 3'de anlatılan PCT (Nokta Kanonik Dönüşümü) metodu uygulanır ve

$$R(r)=g(r)\phi\left(q(r)\right) \tag{4.9}$$

şeklinde alınırsa; $g(r)^2q'(r)=m(r)$ yazılabilir [29]. Burada $q'(r)^2=m(r)$ dir. Dolayısıyla $\left(2Em(r)/q'(r)^2\Rightarrow 2E\right)$ yazılabilir. Bu nedenle,

$$q(r)=\int^{r}\sqrt{m(t)}dt \Rightarrow g(r)=m(r)^{1/4} \tag{4.10}$$

yazılabilir. Dolayısıyla dönüşümden sonra denklem,

$$\left\{-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dq^2}+V_{eff}\left(q(r)\right)\right\}\phi_{n_r,l_d}\left(q(r)\right)=E_d\phi_{n_r,l_d}\left(q(r)\right) \tag{4.11}$$

şeklinde elde edilmiş olur. (4.11) denkleminde yer alan $V_{eff}\left(q(r)\right)$ ifadesi ise,

$$V_{eff}\left(q(r)\right)=\frac{l_d(l_d+1)}{2r^2m(r)}-U_d(r) \tag{4.12}$$

şeklindedir. (4.12) de yer alan $U_d(r)$ ifadesi ise,

$$F(m,q)=\frac{1}{4}\left[\frac{m''}{m}-\frac{3}{2}\left(\frac{m'}{m}\right)^2-\frac{q'''}{q'}+\frac{3}{2}\left(\frac{q''}{q'}\right)^2\right] \tag{4.13}$$

şeklinde tanımlanan (3.36) bağıntısında [30]. $q'(r)^2=m(r)$ yazılmak suretiyle,

$$U_d(r)=\frac{m''}{8m(r)^2}-\frac{7m'(r)^2}{32m(r)^3}+\frac{m'(r)(d-1)}{4rm(r)^2} \tag{4.14}$$

şeklinde elde edilmiş olur [29, 30]. Kütle ifadesini,

$$m(r)=1/\left(1+\varsigma^2r^2\right)^2 \tag{4.15}$$

şeklinde bir kütle dağılımını göz önüne alalım ($r\to\infty$ a giderken kütle yok olmaktadır. ς (sabit)) [13, 27, 29]. Biraz işlemle $q(r)$,

$$q'(r)^2=m(r)\Rightarrow q'(r)^2=\left(1+\varsigma^2r^2\right)^{-2}\Rightarrow q'(r)=\frac{1}{\left(1+\varsigma^2r^2\right)}\Rightarrow q(r)=\int\frac{1}{\left(1+\varsigma^2r^2\right)}dr \tag{4.16}$$

$$q(r)=\frac{1}{\varsigma}\arctan(\varsigma r)\Rightarrow \boxed{\varsigma r=\tan(\varsigma q)} \tag{4.17}$$

şeklinde yazılabilir. (4.15) ifadesine tekrar göz önüne alırsak, (4.17) denklemi yardımıyla,

$$
\begin{aligned}
m(r) &= 1/\left(1+\varsigma^2 r^2\right)^2 = \cos^4(\varsigma q) \\
m'(r) &= -4\varsigma^2 r\cos^6(\varsigma q) \\
m''(r) &= -4\varsigma^2 r\cos^6(\varsigma q) + 24\varsigma^4 r^2\cos^8(\varsigma q)
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

elde edilir. (4.18) ifadeleri (4.14) de yerine yazıp düzenlenirse,

$$
\boxed{U_d(r) = -\left(\varsigma^2 d\right)\tan^2(\varsigma q) + \frac{\varsigma^2}{2}(1-2d)}
\tag{4.19}
$$

şeklinde elde edilen [29]. (4.19) denklemini (4.12) de yerine yazılırsa, $V_{eff}\left(q(r)\right)$ aşağıdaki gibi elde edilir [29].

$$
\begin{aligned}
V_{eff}\left(q(r)\right) &= \frac{l_d(l_d+1)}{2r^2\cos^4(\varsigma q)} + \varsigma^2 d\tan^2(\varsigma q) - \frac{\varsigma^2}{2}(1-2d) \\
V_{eff}\left(q(r)\right) &= \frac{\varsigma^2}{2}\left[\frac{l_d(l_d+1)}{\varsigma^2 r^2\cos^4(\varsigma q)} + \frac{2d}{\cos^2(\varsigma q)}\right] - \frac{\varsigma^2}{2}, \quad \left(\varsigma^2 r^2 = \tan^2(\varsigma q)\right) \\
V_{eff}\left(q(r)\right) &= \frac{\varsigma^2}{2}\left[\frac{l_d(l_d+1)}{\sin^2(\varsigma q)} + \frac{l_d(l_d+1)+2d}{\cos^2(\varsigma q)}\right] - \frac{\varsigma^2}{2}
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

Burada, $\left[\left(\chi(\chi-1) = l_d(l_d+1), \lambda(\lambda-1) = l_d(l_d+1)+2d\right)\right]$ alınırsa potansiyel ifadesi,

$$
\boxed{V_{eff}\left(q(r)\right) = \frac{\varsigma^2}{2}\left[\frac{\chi(\chi-1)}{\sin^2(\varsigma q)} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cos^2(\varsigma q)}\right] - \frac{\varsigma^2}{2}}
\tag{4.21}
$$

şeklinde yeniden tanımlanır ve Pöschl-Teller tipi bir potansiyeldir. (4.21) ifadesi (4.11) de yerine yazılırsa,

$$
\left\{-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dq^2} + \frac{\varsigma^2}{2}\left[\frac{\chi(\chi-1)}{\sin^2(\varsigma q)} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cos^2(\varsigma q)}\right]\right\}\phi_{n_r,l_d}(q) = \varepsilon\phi_{n_r,l_d}(q)
\tag{4.22}
$$

elde edilir [29]. Burada, $\varepsilon = E + \frac{1}{2}\varsigma^2$ olarak alınmıştır. (4.22) denklemini yeni bir düzenleme ile,

$$
\left\{-\frac{d^2}{dq^2} + \varsigma^2\left[\frac{\chi(\chi-1)}{\sin^2(\varsigma q)} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cos^2(\varsigma q)}\right]\right\}\phi = 2\varepsilon\phi
\tag{4.23}
$$

şeklinde yazılabilir. Burada AIM' i (asimtotik iterasyon metodunu) uygulamak için ϕ dalga fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayarak,

$$\phi = \sin^{\chi}(\varsigma q)\cos^{\lambda}(\varsigma q)\, f(q) \tag{4.24}$$

$\frac{d\phi}{dq}$ ve $\frac{d^2\phi}{dq^2}$ terimlerini hesaplayalım,

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dq} &= \chi\varsigma\sin^{\chi-1}(\varsigma q)\cos(\varsigma q)\cos^{\lambda}(\varsigma q)\, f(q) - \lambda\varsigma\sin^{\chi}(\varsigma q)\cos^{\lambda-1}(\varsigma q)\sin(\varsigma q)\, f(q)\\ &\quad + \sin^{\chi}(\varsigma q)\cos^{\lambda}(\varsigma q)\, f'(q)\\ \frac{d\phi}{dq} &= \chi\varsigma\sin^{\chi-1}(\varsigma q)\cos^{\lambda+1}(\varsigma q)\, f(q) - \lambda\varsigma\sin^{\chi+1}(\varsigma q)\cos^{\lambda-1}(\varsigma q)\, f(q)\\ &\quad + \sin^{\chi}(\varsigma q)\cos^{\lambda}(\varsigma q)\, f'(q)\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\phi}{dq^2} = {} & \chi(\chi-1)\varsigma^2\sin^{\chi-2}(\varsigma q)\cos^{\lambda+2}(\varsigma q)\, f(q) - \chi\varsigma^2(\lambda+1)\sin^{\chi-1}(\varsigma q)\cos^{\lambda}(\varsigma q)\sin(\varsigma q)\, f(q)\\ & + \chi\varsigma\sin^{\chi-1}(\varsigma q)\cos^{\lambda+1}(\varsigma q)\, f'(q) - \lambda\varsigma^2(\chi+1)\sin^{\chi}(\varsigma q)\cos^{\lambda}(\varsigma q)\, f(q)\\ & - \lambda(\lambda-1)\varsigma^2\sin^{\chi+1}(\varsigma q)\cos^{\lambda-2}(\varsigma q)\sin^{\chi}(\varsigma q)\, f(q) - \lambda\varsigma\sin^{\chi+1}(\varsigma q)\cos^{\lambda-1}(\varsigma q)\, f'(q)\\ & + \chi\varsigma\sin^{\chi-1}(\varsigma q)\cos(\varsigma q)\cos^{\lambda}(\varsigma q)\, f'(q) - \lambda\varsigma\sin^{\chi}(\varsigma q)\cos^{\lambda-1}(\varsigma q)\sin^{\chi}(\varsigma q)\, f'(q)\\ & + \sin^{\chi}(\varsigma q)\cos^{\lambda}(\varsigma q)\, f''(q)\end{aligned} \tag{4.26}$$

elde edilmiş olur. (4.26) ifadesi (4.23) de yerine yazılır ve

$$\begin{aligned}&-\sin^{\chi}(\varsigma q)\cos^{\lambda}(\varsigma q)\, f''(q) - \chi\varsigma\sin^{\chi-1}(\varsigma q)\cos^{\lambda+1}(\varsigma q)\, f'(q) + \lambda\varsigma\sin^{\chi+1}(\varsigma q)\cos^{\lambda-1}(\varsigma q)\, f'(q)\\ &-\chi\varsigma\sin^{\chi-1}(\varsigma q)\cos^{\lambda+1}(\varsigma q)\, f'(q) + \lambda\varsigma\sin^{\chi+1}(\varsigma q)\cos^{\lambda-1}(\varsigma q)\, f'(q) + \chi\varsigma^2(\lambda+1)\sin^{\chi}(\varsigma q)\cos^{\lambda}(\varsigma q)\, f(q)\\ &-\lambda(\lambda-1)\varsigma^2\sin^{\chi+2}(\varsigma q)\cos^{\lambda-2}(\varsigma q)\, f(q) + \varsigma^2\chi(\chi-1)\sin^{\chi-2}(\varsigma q)\cos^{\lambda}(\varsigma q)\, f(q)\\ &+\varsigma^2\lambda(\lambda-1)\sin^{\chi}(\varsigma q)\cos^{\lambda-2}(\varsigma q)\, f(q) - \varsigma^2\chi(\chi-1)\sin^{\chi-2}(\varsigma q)\cos^{\lambda+2}(\varsigma q)\, f(q)\\ &= 2\varepsilon\sin^{\chi}(\varsigma q)\cos^{\lambda}(\varsigma q)\, f(q)\end{aligned} \tag{4.27}$$

şeklinde elde edilen (4.27) ifadesinin bütün terimleri $\sin^{\chi}(\varsigma q)\cos^{\lambda}(\varsigma q)\, f(q)$ ifadesi ile bölüp düzenlenirse,

$$f''(q) - 2\varsigma\left[-\chi\cot(\varsigma q) + \lambda\tan(\varsigma q)\right] f'(q) + \left[2\varepsilon - \varsigma^2(\chi+\lambda)^2\right] f(q) = 0 \tag{4.28}$$

elde edilir. Bu denklemde

$$x = \cos(\varsigma q) \tag{4.29}$$

dönüşümünü uygularsak,

$$x = \cos(\varsigma q) \Rightarrow -\varsigma \sin(\varsigma q)\, dq \tag{4.30}$$

yazılabilir. $\sin^2(\varsigma q) + \cos^2(\varsigma q) = 1$ eşitliğinden,

$$\sin(\varsigma q) = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow -\varsigma\sqrt{1-x^2}\, dq = dx \Rightarrow dq = -\frac{1}{\varsigma}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{4.31}$$

aynı şekilde (4.28) denkleminde yer alan $\cot(\varsigma q)$ ve $\tan(\varsigma q)$ ifadelerini de x cinsinden tanımlarsak,

$$\cot(\varsigma q) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \tan(\varsigma q) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \tag{4.32}$$

yazılabilir. (4.28) denkleminde bulunan $d^2 f / dq^2$ ve df/dq ifadelerini tanımlarsak,

$$\frac{d}{dq} = -\varsigma\sqrt{1-x^2}\,\frac{d}{dx} \Rightarrow \boxed{\frac{df}{dq} = -\varsigma\sqrt{1-x^2}\,\frac{df}{dx}} \tag{4.33}$$

$$\frac{d^2 f}{dq^2} = \frac{d}{dq}\left(\frac{df}{dq}\right) = -\varsigma\sqrt{1-x^2}\,\frac{d}{dx}\left(-\varsigma\sqrt{1-x^2}\,\frac{d}{dx}\right) f$$

$$\boxed{\frac{d^2 f}{dq^2} = \varsigma^2\left(\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx}\right) f} \tag{4.34}$$

elde edilmiş olur. (4.32), (4.33) ve (4.34) ifadelerini (4.28) de yerine yazılırsa,

$$\boxed{\frac{d^2 f}{dx^2} - \left[\frac{(2\chi+1)x}{1-x^2} - \frac{2\lambda}{x}\right]\frac{df}{dx} + \frac{1}{\varsigma^2\left(1-x^2\right)}\left(2\varepsilon - \varsigma^2\left(\chi+\lambda\right)^2\right) f = 0} \tag{4.35}$$

bulunur. (4.35) denkleminde bulunan, $d^2 f / dx^2$ ifadesini yalnız bırakırsak;

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \left[\frac{(2\chi+1)x}{1-x^2} - \frac{2\lambda}{x}\right]\frac{df}{dx} + \frac{1}{\varsigma^2\left(1-x^2\right)}\left(\varsigma^2\left(\chi+\lambda\right)^2 - 2\varepsilon\right) f \tag{4.36}$$

yazılabilir. (4.36) denklemi AIM ile çözülebilir [10, 15, 23, 24]. Burada,

$$
\begin{aligned}
&\lambda_0 = \frac{(2\chi+1)x}{1-x^2} - \frac{2\lambda}{x} \\
&s_0 = \frac{1}{\varsigma^2\left(1-x^2\right)}\left(\varsigma^2(\chi+\lambda)^2 - 2\varepsilon\right) \\
&\lambda_1 = \frac{x^4\varsigma^2\left(6\chi+2+6\lambda+3\chi^2+5\lambda^2+6\chi\lambda+2\varepsilon\right)+x^2\left(-2\chi\varsigma^2-\varsigma^2-8\lambda\varsigma^2+\varsigma^2\chi^2-7\varsigma^2\lambda^2-6\varsigma^2\chi\lambda-2\varepsilon\right)+\varsigma^2\lambda(2+4\lambda)}{\varsigma^2x^2\left(1-x^2\right)^2} \\
&s_1 = \frac{x^2\left(2\chi^3\varsigma+6\chi\lambda^2\varsigma+6\chi^2\lambda\varsigma-4\chi\varepsilon+2\lambda^3\varsigma-4\lambda\varepsilon\right)+\lambda\left(4\varepsilon-2\chi^2\varsigma-2\lambda^2\varsigma-4\chi\lambda\varsigma\right)}{\varsigma x\left(1-x^2\right)^2} \\
&\ldots
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

değerleri (2.7) bağıntısı yardımıyla bulunur. Bu değerler ve (2.9) eşitliği kullanılarak enerji özdeğerleri için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$
\begin{aligned}
&\frac{s_0}{\lambda_0} = \frac{s_1}{\lambda_1} \Rightarrow \varepsilon_0 = \frac{\varsigma^2}{2}(\chi+\lambda)^2 \\
&\frac{s_1}{\lambda_1} = \frac{s_2}{\lambda_2} \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{\varsigma^2}{2}(\chi+\lambda+2)^2 \\
&\frac{s_2}{\lambda_2} = \frac{s_3}{\lambda_3} \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{\varsigma^2}{2}(\chi+\lambda+4)^2 \\
&\ldots
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

Yukarıdaki sonuçlar genelleştirilirse enerji özdeğerleri,

$$
\varepsilon_n = \frac{\varsigma^2}{2}(\chi+\lambda+2n)^2, \qquad \boxed{E_n = \frac{\varsigma^2}{2}(\chi+\lambda+2n)^2 - \frac{\varsigma^2}{2}} \qquad n = 0,1,2,3,... \tag{4.39}
$$

şeklinde bulunur. Bulunan bu enerji özdeğerleri benzer çalışmalarla karşılaştırılmıştır [13, 29]. Şimdi ise ϕ dalga fonksiyonunun AIM ile elde edilebilmesi için, (2.11) denklemi kullanılırsa,

$$
f_n(x) = C_2 \exp\left(-\int \frac{s_k(x')}{\lambda_k(x')}dx'\right) \qquad n = 0,1,2,3,... \tag{4.40}
$$

$$
\begin{aligned}
&f_0(x)=1\\
&f_1(x)=-C_2 2\sigma\left(1-\frac{(\rho+1)}{\sigma}x^2\right)\\
&f_2(x)=C_2 2^2\sigma(\sigma+1)\left(1-\frac{2(\rho+2)}{\sigma}x^2+\frac{(\rho+2)(\rho+3)}{\sigma(\sigma+1)}x^4\right)\\
&f_3(x)=-C_2 2^3\sigma(\sigma+1)(\sigma+2)\left(1-\frac{3(\rho+3)}{\sigma}x^2+\frac{3(\rho+3)(\rho+4)}{\sigma(\sigma+1)}x^4-\frac{(\rho+3)(\rho+4)(\rho+5)}{\sigma(\sigma+1)(\sigma+2)}x^6\right)\\
&\ldots
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

değerleri elde edilir. (4.41) eşitliğini genelleştirirsek,

$$f_n(x)=(-2)^n C_2(\sigma)_n\, {}_2F_1\left(-n,\rho+n;\sigma;x^2\right) \tag{4.42}$$

şeklinde yazılabilir. (4.42) dalga fonksiyonunda yer alan, σ ve ρ ifadesi ise,

$$\sigma=\lambda+\frac{1}{2},\qquad \rho=\chi+\lambda \tag{4.43}$$

olarak alınmıştır. (4.24) eşitliğinde dalga fonksiyonu, $\phi=\sin^{\chi}(\varsigma q)\cos^{\lambda}(\varsigma q)\,f(q)$ şeklinde idi. (4.29) eşitliğindeki $x=\cos(\varsigma q)$ dönüşümünü de kullanarak dalga fonksiyonu,

$$\boxed{\phi_{n_r,l_d}(q)=(-2)^n C_2\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_n \sin^{\chi}(\varsigma q)\cos^{\lambda}(\varsigma q)\,{}_2F_1\left(-n_r,\chi+\lambda+n_r;\cos^2(\varsigma q)\right)} \tag{4.44}$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen dalga fonksiyonları benzer çalışmalarla yine karşılaştırılmış ve uyumlu olduğu gözlenmiştir [13, 29].

4.2. $M(x)=e^{-2x}$ Biçimindeki Kütle Dağılımının Çözümü

Başlangıç noktası olarak öncelikle bir boyutlu Schrödinger dalga denklemi göz önünde bulundurulacaktır. (4.8) denkleminden,

$$\left(-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{m'}{m^2}\frac{d}{dx}+V_{eff}-E\right)\phi(x)=0 \tag{4.45}$$

(4.45) denklemine Bölüm 3'de anlatılan PCT (Nokta Kanonik Dönüşümü) metodu uygulanırsa ve $\phi = \sqrt{m}\psi$ alınırsa [3, 13, 16].

$$\left(-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{3}{4}\frac{(m')^2}{m^3} - \frac{1}{2}\frac{m''}{m^2} + V_{eff} - E \right)\psi = 0 \tag{4.46}$$

(4.46) denkleminde yer alan V_{eff} değeri ise (4.12) denklemi göz önüne alınırsa,

$$V_{eff} = V - U_d(r) \tag{4.47}$$

(4.47) denkleminde yer alan V referans potansiyeli ifadesini 'Morse Potansiyeli' alınırsa [14, 16, 18, 36],

$$V = V_1 e^{2x} - V_2 e^{x} \tag{4.48}$$

(4.47) denkleminde yer alan $U_d(r)$ ifadesi ise (4.14) denkleminden [29]

$$U_d(r) = \frac{m''}{8m(r)^2} - \frac{7m'(r)^2}{32m(r)^3} \tag{4.49}$$

şeklinde idi. $m = e^{-2x}$ alınıp (4.48) ve (4.49) denklemleri (4.47) de yerine yazılırsa,

$$V_{eff} = V_1 e^{2x} - V_2 e^{x} - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{7}{8}e^{2x} \tag{4.50}$$

elde edilir. $m = e^{-2x}$ alınıp (4.50) denklemi (4.46) da yerine yazılırsa,

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{11}{8} + V_1 - V_2 e^{-x} - E e^{-2x} \right)\psi = 0 \tag{4.51}$$

şeklinde bulunur. (4.51) denklemine $y = e^{-x}$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\left(\frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{1}{y}\frac{d\psi}{dy} + \left(E + \frac{V_2}{y} - \left[\frac{11}{8} + V_1 \right]\frac{1}{y^2} \right)\psi \right) = 0 \tag{4.52}$$

denklemi elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} E &= -\varepsilon^2 \\ \frac{11}{8} + V_1 &= \beta^2 \end{aligned} \tag{4.53}$$

kısaltmaları kullanılırsa ve (4.52) denklemine AIM (asimtotik iterasyon metodunu) uygulamak için ψ dalga fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlar,

$$\psi = y^{\beta} e^{-\varepsilon y} f\left(y\right) \tag{4.54}$$

ve (4.52) denkleminde yerine yazılırsa,

$$f^{"}\left(y\right)+\left(\frac{1+2\beta-2\varepsilon y}{y}\right)f^{'}+\left(\frac{-2\varepsilon\beta-\varepsilon+V_2}{y}\right)f=0 \tag{4.55}$$

denklemi elde edilmiş olur. (4.55) denklemi AIM ile çözülebilir [15, 23]. Burada, (2.7) yardımıyla

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \frac{2\varepsilon y-1-2\beta}{y} \\
s_0 &= \frac{\varepsilon\left(2\beta+1\right)-V_2}{y} \\
\lambda_1 &= \frac{\left(2\varepsilon y-1-2\beta\right)^2+2\varepsilon y\beta+\varepsilon y+1+2\beta-V_2 y}{y^2} \\
s_1 &= \frac{2\varepsilon\beta+\varepsilon-V_2+\left(2\varepsilon\beta+\varepsilon-V\right)\left(2\varepsilon y-1-2\beta\right)}{y^2} \\
&\ldots
\end{aligned} \tag{4.56}$$

şeklinde elde edilir. Bu sonuçlar ve (2.9) eşitliği kullanarak,

$$\begin{aligned}
\frac{s_0}{\lambda_0}=\frac{s_1}{\lambda_1} &\Rightarrow \varepsilon_0=\frac{V_2}{2\beta+1} \\
\frac{s_1}{\lambda_1}=\frac{s_2}{\lambda_2} &\Rightarrow \varepsilon_1=\frac{V_2}{2\beta+3} \\
\frac{s_2}{\lambda_2}=\frac{s_3}{\lambda_3} &\Rightarrow \varepsilon_2=\frac{V_2}{2\beta+5} \\
&\ldots
\end{aligned} \tag{4.57}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki sonuçlar genelleştirilirse özdeğerler,

$$\varepsilon_n=\frac{V_2}{2\beta+2n+1} \qquad n=0,1,2,3,... \tag{4.58}$$

şeklinde elde edilir. Enerji özdeğerlerini veren eşitlik, denklem (4.53) kullanılarak,

$$E_n = -V_2^2\left[2n+1+2\sqrt{V_1+\frac{11}{8}}\right]^{-2} \qquad n=0,1,2,3,... \tag{4.59}$$

elde edilmiş olur. AIM ile elde edilen bu sonuç, farklı metotlar kullanılarak yapılan benzer çalışmalarla karşılaştırılmış ve enerji özdeğerlerinin bu çalışmalarla uygunluk gösterdiği tespit edilmiştir [16, 36].

5. BÖLÜM

DEĞİŞKEN KÜTLELİ RELATİVİSTİK DALGA DENKLEMİ

Bu bölümde relativistik Klein-Gordon dalga denkleminin kütleye bağlı durumu incelenecek ve AIM metodu kullanılarak relativistik Klein-Gordon dalga denkleminin çözümü yapılacaktır.

5.1. $M(x) = M_0 e^{\alpha x}$ Biçimindeki Kütle Dağılımının Çözümü

Başlangıç noktası olarak öncelikle Klein-Gordon dalga denklemi göz önünde bulundurulacaktır. Schrödinger 1926'da relativistik olmayan dalga denklemini veya Klein-Gordon denklemini tanıttı ve kullandı. Aynı zamanda relativistik hızlarla hareket eden parçacıklar için nasıl dalga denklemi kullanabileceğini de önerdi. Bu dalga denklemini elde edersek [1, 4].

$$H\phi = E\phi \Rightarrow \left[-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2 + V(x) \right] \phi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{5.1}$$

şeklinde bir boyutlu zamana bağlı Schrödinger dalga denklemi yazılabilir. (5.1) denkleminde yer alan relativistik olmayan enerji operatörü ise,

$$\hat{E} = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} + V(x) \Rightarrow \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{p} = -i\hbar\nabla \tag{5.2}$$

olarak yazılabilir. Relativistik denklem,

$$E^2 = p^2c^2 + {m_0}^2c^4 \tag{5.3}$$

ifade edilip, (5.2) denklemi de (5.3) de yerine yazılırsa,

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -c^2 \hbar^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + {m_0}^2 c^4 \phi \tag{5.4}$$

yazılabilir. (5.4) denklemi düzenlenirse,

$$\boxed{\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \left(\frac{m_o c}{\hbar} \right)^2 \phi} \tag{5.5}$$

elde edilir [1, 4]. (5.5) denklemi serbest parçacığın relativistik Schrödinger denklemi veya Klein-Gordon denklemidir. Eğer $\left(m_0 c\right)^2$ durgun kütle enerjisi sıfır ise,

$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \tag{5.6}$$

olmaktadır. Bu ifade ise klasik fizikteki dalga denklemidir. Dolayısıyla karşılama prensibinin geçerliliği de sağlanmış olur [1].

Burada bir boyutlu zamandan bağımsız Klein-Gordon dalga denklemini göz önüne alırsak [28],

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{\hbar^2 c^2} \left[m^2 c^4 - \left(E - V\right)^2 \right] \right] \phi(x) = 0 \tag{5.7}$$

şeklinde yazılabilir. (5.7) denkleminde yer alan E parçacığın enerjisi, c ışık hızı, $\hbar$ planck sabitidir. m ise parçacığın kütlesidir. (5.7) denkleminde yer alan V potansiyel ifadesi üstel bir potansiyel olarak ve kütle ifadesi de aşağıdaki gibi üstel olarak değişen bir kütle alınırsa [39],

$$V = V_0 e^{\alpha x} \tag{5.8}$$

$$m(x) = m_0 e^{\alpha x} \tag{5.9}$$

(5.7) denkleminde yerlerine yazıldığında,

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}+\left[\frac{E^2}{\hbar^2c^2}-\frac{m_0{}^2c^4e^{2\alpha x}}{\hbar^2c^2}+\frac{V_0{}^2e^{2\alpha x}}{\hbar^2c^2}-\frac{2EV_0e^{\alpha x}}{\hbar^2c^2}\right]\phi(x)=0 \tag{5.10}$$

elde edilmiş olur. Burada m_0 parçacığın sabit kütlesi olarak alınmaktadır. (5.10) denklemine $y=e^{\alpha x}$ dönüşümü uygulanır ve aşağıdaki kısaltmalar kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\beta_1{}^2&=\frac{m_0{}^2c^4-V_0{}^2}{\hbar^2c^2},\\ \beta_2{}^2&=\frac{2EV_0}{\hbar^2c^2},\\ -\varepsilon^2&=\frac{E^2}{\hbar^2c^2}\end{aligned} \tag{5.11}$$

(5.10) denklemi,

$$\frac{d^2\phi(y)}{dy^2}+\frac{1}{y}\frac{d\phi(y)}{dy}+\left[-\frac{\varepsilon^2}{\alpha^2}\frac{1}{y^2}-\frac{\beta_2{}^2}{\alpha^2}\frac{1}{y}-\frac{\beta_1{}^2}{\alpha^2}\right]\phi(y)=0 \tag{5.12}$$

şeklinde elde edilmiş olur. Burada AIM' i (asimtotik iterasyon metodunu) uygulamak için ϕ dalga fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlarsak,

$$\phi\ (y)=\ y^{\frac{\varepsilon}{\alpha}}e^{\frac{\beta_1}{\alpha}}\ f\ (y) \tag{5.13}$$

ve (5.12) denkleminde yerine yazılarak,

$$f''(y)+\left(\frac{1}{y}+\frac{2\varepsilon}{\alpha y}+\frac{2\beta_1}{\alpha}\right)f'(y)+\left(-\frac{\beta_2{}^2}{\alpha^2 y}+\frac{\beta_1}{\alpha y}+\frac{2\varepsilon\beta_1}{\alpha^2 y}\right)f(y)=0 \tag{5.14}$$

elde edilir. (5.14) denklemi AIM ile çözülebilir [2, 15, 23]. Burada (2.7) bağıntısı yardımıyla,

$$\lambda_0 = \frac{-\alpha - 2\varepsilon - 2\beta_1 y}{\alpha y}$$

$$s_0 = \frac{-2\varepsilon\beta_1 - \beta_1\alpha + {\beta_2}^2}{\alpha^2 y}$$

$$\lambda_1 = -\frac{2\beta_1}{\alpha y} - \frac{-\alpha - 2\varepsilon - 2\beta_1 y}{\alpha y^2} + \frac{-2\varepsilon\beta_1 - \beta_1\alpha + {\beta_2}^2}{\alpha^2 y} + \frac{\left(-\alpha - 2\varepsilon - 2\beta_1 y\right)^2}{\alpha^2 y^2} \tag{5.15}$$

$$s_1 = -\frac{-2\varepsilon\beta_1 - \beta_1\alpha + {\beta_2}^2}{\alpha^2 y^2} + \frac{\left(-2\varepsilon\beta_1 - \beta_1\alpha + {\beta_2}^2\right)\left(-\alpha - 2\varepsilon - 2\beta_1 y\right)}{\alpha^3 y^2}$$

...

değerleri bulunur. Bu sonuçlar ve (2.9) eşitliği kullanarak,

$$\begin{aligned} &\frac{s_0}{\lambda_0} = \frac{s_1}{\lambda_1} \Rightarrow \varepsilon_0 = \frac{{\beta_2}^2 - \beta_1\alpha}{2\beta_1} \\ &\frac{s_1}{\lambda_1} = \frac{s_2}{\lambda_2} \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{{\beta_2}^2 - 3\beta_1\alpha}{2\beta_1} \\ &\frac{s_2}{\lambda_2} = \frac{s_3}{\lambda_3} \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{{\beta_2}^2 - 5\beta_1\alpha}{2\beta_1} \\ &... \end{aligned} \tag{5.16}$$

olarak elde edilir. Yukarıdaki sonuçlar genelleştirilirse özdeğerler,

$$\varepsilon_n = \frac{{\beta_2}^2 - (2n+1)\beta_1\alpha}{2\beta_1}, \qquad n = 0,1,2,3,... \tag{5.17}$$

şeklinde bulunmaktadır. Enerji özdeğerlerini veren eşitlik, denklem (5.12) kullanılarak,

$$E_n = \frac{(2n+1)\sqrt{\frac{{m_0}^2c^4 - {V_0}^2}{\hbar^2c^2}}}{2\left\{V_0 - \left(\sqrt{\frac{{m_0}^2c^4 - {V_0}^2}{\hbar^2c^2}}\right)\hbar c\right\}}\hbar^2c^2, \qquad n = 0,1,2,3,... \tag{5.18}$$

açık bir şekilde elde edilmiş olur. Bu enerji özdeğerleri relativistik Klein-Gordon denkleminin değişken kütleli olması durumunda elde edilen değerler olması sebebiyle farklı bir çalışma olarak gösterilebilir.

6. BÖLÜM

SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında, relativistik olmayan ve relativistik kuantum mekaniği çerçevesinde değişken kütleli zamandan bağımsız Schrödinger dalga denkleminin çözümü için farklı bir analitik metod olan ve son zamanlarda güncel bir şekilde kullanılan Asimtotik İterasyon Metodu (AIM) kullanılmıştır.

Değişken kütleli relativistik olmayan ve relativistik zamandan bağımsız Schrödinger ve Klein-Gordon dalga denklemlerinin çözümü için hesaplamalarda kullanılan Asimtotik İterasyon Metodu detaylı bir şekilde verilmiş ve bu metod uygulanarak çözülen birkaç örnek çalışma gösterilmiştir. Daha sonraki kısımda, relativistik olmayan zamandan bağımsız Schrödinger dalga denkleminin çözümü için belirli bir forma dönüştürülmesinde yardımcı olan Nokta Kanonik Dönüşüm (PCT) Metodu ele alınmıştır. Bu metod kullanılarak zamandan bağımsız Schrödinger dalga denklemi için bir örnek çalışmaya yer verilmiştir. Nokta Kanonik Dönüşüm (PCT) metodu, tam ve yaklaşık olarak çözülebilen potansiyel içeren farklı fizik problemlerine başarıyla uygulanmaktadır. Bu metod kullanılarak, değişken kütleli Schrödinger denklemi, sabit kütleli Schrödinger denklemi ile karşılaştırılarak çözümlenmektedir. Değişken kütleli Schrödinger dalga denkleminde etkin potansiyel olarak adlandırılan potansiyel, referans potansiyeli olarak adlandırılan gerçek potansiyel ve kütlenin konuma bağlı olmasından kaynaklanan terimlerin toplamı olarak bulunmaktadır.

Bu çalışmada, ilk olarak serbest durum için kütle bağımlı Schrödinger dalga denklemi AIM ile çözümlenmiş ve daha sonra referans potansiyeli olarak Morse potansiyeli alınıp, kütle bağımlı Schrödinger dalga denklemi çözümleri AIM kullanılarak elde edilmiştir. Son olarak, değişken kütleli relativistik Klein-Gordon denklemi üstel bir potansiyel ve kütle için AIM kullanılarak çözümlenmiş ve enerji özdeğerleri elde edilmiştir.

Böylece relativistik olmayan ve relativistik değişken kütleli zamandan bağımsız Schrödinger ve Klein-Gordon dalga denklemlerinin çözümü farklı ve son zamanlarda etkili ve yaygın bir şekilde kullanılan bir metod olan AIM ile yapılarak, değişken kütleli relativistik ve relativistik olmayan dalga denklemlerinin çözümlenmesinde AIM'in kullanılabilirliği ve geçerliliği bu tez çalışmasında gösterilmiştir. Bu teknikle daha duyarlı ve iyi sonuç veren yöntemlerle araştırmaya çalışan veya çalışacak bilim camiasına bir temel oluşturulacağını ve fiziksel uygulamalarda, deneysel sonuçlar ile teorik sonuçların karşılaştırılmasında faydalı olunacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

1. Grenier, W., Relativistic Quantum Mechanics Wave Equations, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
2. Göküzüm, B., Manyetik Alanda Hareket Eden Yüklü Bir Parçacığın Hareket Denklemleri Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi, Kayseri, 2007.
3. Koçak M., Applications of a Novel Approach to Relativistic and Non-Relativistic Problems in Physics Ph. D. Thesis in Engineering Physics Gaziantep University, Gaziantep, 2007.
4. Flügge, S., Practical Quantum Mechanics Vol. I, Springer, Berlin, 1994.
5. Dirac, P.A.M., Quantum Mechanic Clarendon Press, Oxford, 1930.
6. Nikiforov, F., Uvarov, V.- B., Special Functions of Mathematical Physics, Birkhauser, Basel, 1988.
7. Ciftci, H., Hall, R.- L., Saad, N.- J., Iterative Solutions to the Dirac Equation, Phys. Rev. A 72, 022101, 2005.
8. Ciftci, H., Hall, R.- L., Saad, N.- J., Perturbation Theory in a Framework of İteration Methods, Phys. Lett. A 340, 388, 2005.
9. Fernandez, F.- M., Energy Expansion for the Period of Anharmonic Oscillators by the Method of Lindstedt-Poincare, J. Phys. A 37, 6173, 2004.
10. Barakat, T., The Asymptotic İteration Method for the Eigenenergies of the Anharmonic Oscillator Potential, Phys. Lett. A 344, 411, 2005.
11. Saad, N., Hall, R.- L., Ciftci, H. Sextic Anharmonic Oscillators Orthogonal Polynomials, J.Phys.A: Math. Gen. 39, 8477, 2006.
12. Levai, G., On Some Exactly Solvable Potentials Derived From Supersymmetric Quantum Mechanics, J. Phys. A: Math. Gen. 25, L521, 1992.
13. Mustafa, O., Habib Mazharimousavi, S., *d*-dimensional Generalization of the Point Canonical Transformation for a Quantum Particle With Position Dependent Mass, J.Phys. A 39, pp. 10537, 2006.
14. Yeşiltaş, Ö., Sever, R., Exact Solutions of Schrödinger Equation for PT/Non-PT Symmetric and Non-Hermitian Exponential Type Potentials With the Position Dependent Effective quant-ph/0609089V1, 2006.
15. Ciftci, H., Hall, R.- L., Saad, N., Asymptotic İteration Method for Eigenvalue Problems J. Phys. A: Math. Gen. 36, 11807, 2003.

16. Tezcan, C., Sever, R., Exact Solutions of the Schrödinger Equation With Position Dependent Effective Mass via General Point Canonical Transformation, quant-ph/0604041V1, 2006.
17. Guo- Xing, JU Chang-Ying, Cai, Yang, Xiang, Zhong- Zhou, Ren, The Coordinate Transformation and the Exact Solutions of the Schrödinger Equation With Position Dependent Effective Mass, quant-ph/0601004V1, 2005.
18. Bayrak, O., Boztosun, I., Arbitrary ℓ-state of the Rotating Morse Potential by the Asymptotic İteration Method, J. Phys. A: Math. Gen. 39, 6955, 2006.
19. Yasuk, F., Berkdemir, C., Berkdemir, A., Exact Solutions of the Schrodinger Equation With Non-Central Potential by the Nikiforov-Uvarov Method, J. Phys. A: Math. Gen. 38, 2006.
20. Yasuk, F., Berkdemir, C., Berkdemir, A., Onem, C., Exact Solutions of the Duffin Kemmer Petiau Equation for the Deformed Hulthen Potential, Physica Scripta 71, 340, 2005.
21. Boztosun, I., Karakoc, M., Yasuk, F., Durmus, A., Asymptotic Iteration Method Solutions to the Relativistic Duffin-Kemmer-Petiau Equation, J. Math. Phys. 47, 062301, 2006.
22. Durmus, A., Yasuk, F., Relativistic and Nonrelativistic Solutions for Diatomic Molecules in the Presence of Double Ring-Shaped Kratzer Potential, J. Chem. Phys. 126, 074108, 2007.
23. Ciftci, H., Hall, R.- L., Saad, N., Construction of Exact Solutions to Eigenvalue Problems by the Asymptotic İteration Method, J. Phys. A: Math. Gen. 38, 1147, 2005.
24. Ciftci, H., Hall, R.- L., Saad, N., Asymptotic İteration Method for Eigenvalue Problems, math-ph/0309066V1, 2003.
25. Bayrak, O., Boztosun, I., Bound State Solutions of the Hulthén Potential by Using the Asymptotic İteration Method, Phy. Scr. 76, pp. 92-96, 2007.
26. Bayrak, O., Boztosun, I., Analytical Solutions to the Hulthén and the Morse Potentials by Using the Asymptotic İteration Method, Journal of Molecular Structure: Theochem 802, pp. 17-21, 2006.
27. Moayedi, S.- K., Abraham, F., Jalbout, M., Solimannejad, The Position Dependent Effective Mass Schrödinger Equation: a Quasi-Exact Solution Journal of Molecular Structure: Theochem 663, pp. 15-18, 2003.

28. Arda, A., Sever, R., Bound States of the Klein- Gordon Equation for Woods-Saxon Potential With Position Dependent Mass, quant-ph/0712.4192V1, 2007.
29. Mustafa, O., Habib Mazharimousavi, S., Quantum particles Trapped in a Position Dependent Mass Barrier; a d-dimensional, quant-ph/0603134V2, 2006.
30. Alhaidari, A.- D., Solutions of the Nonrelativistic Wave Equation With Position Dependent Effective Mass, Physical Review A 66, 042116, 2002.
31. Edelstein, R.- M., Govinder, K.-S., Mahomed, F.- M, J. Phys. A: Math. Gen. 34, 1141, 2001.
32. Stahlhofen, A., Bleuler, K. An Algebraic Form of the Factorization Method, Nuovo Cimento B 104, 447, 1989.
33. Infeld, L., Hull, T.- E., The Factorization Method, Rev. Mod. Phys. 23, 21, 1951.
34. Cooper, F., Khare, A., Sukhatme, U., Supersymmetry and Quantum-Mechanics, Phys. Rep. 2501 267, 1995.
35. Morales, D.- A. Chem. Supersymmetric Improvement the Pekeris Approximation for the Rotating Morse Potential, Phys. Lett., 394, 68, 2004.
36. Tezcan, C., Sever, R., Yeşiltaş, Ö., A New Approach to the Exact Solutions of the Effective Mass Schrödinger Equation, quant-ph/0705.2940V2, 2007.
37. Bayrak, O., et al., Exact Analytical Solutions to the Kratzer Potential by the Asymptotic İteration Method International Journal of Quantum Chemistry 107, pp. 540-544, 2007.
38. Kratzer, A., Die Ultraroten Rotationsspektren der Halogenwasserstoffe, Z. Phys. 3, pp. 289, 1920.
39. Gönül, B., Gönül, B.,Tutcu, D., Özer, O., Supersymmetric Approach To Exactly Solvable Systems With Position-Dependent Effective, quant-ph/0211112V2, 2002.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı: Selim TEKİN
Doğum: Kayseri
Doğum Tarihi: 09. 12. 1983

İlk, orta ve lise öğrenimini Kayseri'de tamamladı. 2002 yılında Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümünü kazandı. Bu bölümü 2006 yılında 3.27 / 4.00 not ortalaması ile ikinci olarak bitirdi ve aynı yıl Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Yüksek Lisans öğrenimine başladı.

İletişim Bilgileri:

Adres : Köşk mah. Bahar cad. No: 19 / 16 Melikgazi / KAYSERİ
Telefon : 0533 309 53 63
E-mail : slmtekin @ gmail. com