T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM VE SALINIMSIZLIĞI

Tezi Hazırlayan
Hülya HASKARA

Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. Pakize TEMTEK

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Temmuz 2005
KAYSERİ

Yrd. Doç. Dr. Pakize TEMTEK danışmanlığında **Hülya HASKARA** tarafından hazırlanan **"Üçüncü Mertebeden Diferensiyel Denklemlerin Salınım Ve Salınımsızlığı "** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

22 / 07 / 2005

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. Mehmet BARAN

Üye : Doç. Dr. Fuat GÜRCAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Pakize TEMTEK

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 18/08/2005 tarih ve 2005.28/10 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

N. Ayyıldız
18 / 08 / 2005
Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ
Enstitü Müdürü
Mühür ve İmza

TEŞEKKÜR

Bu çalışma sırasında çok değerli bilgileri ve deneyimlerinden yararlandığım, bana her zaman her konuda yol gösteren ve yardımcı olan, çok değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Pakize TEMTEK'e, bu günlere gelmemde maddi, manevi hiçbir fedakarlıktan çekinmeyen aileme ve sevgili arkadaşlarım Şerife YILMAZ, Tülay ÖZKAN ve Beyhan BOZKURT'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hülya HASKARA

ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM VE SALINIMSIZLIĞI

Hülya HASKARA
Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Temmuz 2005
Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Pakize TEMTEK

ÖZET

Üç bölümden oluşan bu çalışmanın amacı, lineer differensiyel denklemlerde salınım ve salınımsızlık kavramını tanıtmak ve üçüncü mertebeden lineer diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınım ve salınımsızlık kriterlerini vermektir.

Birinci bölümde, tezin içeriği ile ilgili giriş yapıldı.

İkinci bölümde, bazı temel tanım ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, ilk olarak Dolan [1] ın

$$y''' + a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$$

şeklindeki üçüncü mertebeden lineer bir diferensiyel denklem ile bu denklemin adjointi arasındaki salınım davranışına ilişkin çalışmalarına yer verildi. Daha sonra da N. Parhi ve S. Padhi [2] nin üçüncü mertebeden lineer bir diferensiyel denklemin güçlü salınımlı olması için katsayı fonksiyonları üzerinde elde ettiği şartlar verildi.

Anahtar Sözcükler : Salınım, salınımsızlık, salınım teorisi, salınımlı çözümler, salınımsız çözümler.

OSCILLATION AND NONOSCILLATION THEORY OF THIRD ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Hülya HASKARA
Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M. S. Thesis, July 2005
Thesis Supervisor: Assist. Prof. Pakize TEMTEK

ABSTRACT

The aim of this study is to present the notions of oscillation and nonoscillation in linear differential equations and to give some oscillation and nonoscillation criteria for third linear order differential equations.

In the first chapter, the introduction dealing with thesis is given.

In the second chapter, some basic definitions and theorems are given.

In the third chapter, firstly, the relationship between the oscillatory behaviour of a linear third order differential equation

$$y''' + a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$$

given by Dolan [1] and its adjoint, is studied. Later, the conditions on the coefficient functions for a linear third order differential equation to be strongly oscillatory, are given by N. Parhi and S. Padhi [2].

Keywords : Oscillation, nonoscillation, oscillation problem, oscillation solutions, nonoscillation solutions.

İÇİNDEKİLER

KABUL ve ONAY i
TEŞEKKÜR ii
ÖZET iii
ABSTRACT iv

1. BÖLÜM
GİRİŞ 1

2. BÖLÜM
TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR 2

3. BÖLÜM
ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEM ÇÖZÜMLERİNİN SALINIM ve SALINIMSIZLIĞI İLE İLGİLİ TEOREMLER 22

KAYNAKLAR 48
ÖZGEÇMİŞ 50

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Diferensiyel denklemler fizik, mühendislik gibi birçok alanda geniş uygulamaya sahiptir. Dolayısıyla bir diferensiyel denklemin çözümlerinin bilinmesi gerekir. Ancak bilindiği gibi sadece belli formdaki diferensiyel deneklemlerin çözümleri bulunabilmektedir. Bu nedenle bir diferensiyel denklemi çözmeden, çözümleri hakkında yorum yapabilmek oldukça önemlidir. Yani diferensiyel denklemin çözümünü bulmadan, çözümlerin sıfırları hakkında yorum yapabilmek salınım kuramının bir konusudur.

Son yıllarda literatürde, ikinci ve üçüncü mertebeden diferensiyel denklemlerin salınım ve salınımsızlığı ile ilgili çok çeşitli çalışmalar yapılmıştır.

Bu tezde üçüncü mertebeden lineer homogen diferensiyel denklemlerin salınım ve salınımsızlığı üzerinde durulacaktır.

2. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde ikinci ve üçüncü mertebeden lineer diferensiyel denklemlere ilişkin, yeri geldikçe kullanılacak bazı tanım, teorem ve sonuçlar verilecektir.

Tanım 2.1. n inci mertebeden lineer homogen

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = 0 \tag{2.1}$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada a_{n-1}, $a_{n-2}, \ldots,$ a_1, a_0 katsayı fonksiyonları $T \geq 0$ olmak üzere $[T, \infty)$ yarı aralığında sürekli türevlenebilir fonksiyonlardır. (2.1) denkleminin adjointi

$$(-1)^n\, y^{(n)} + (-1)^{(n-1)}(a_{n-1}(t)\, y)^{(n-1)} + \ldots + (-1)\left(a_1(t)\, y\right)' + a_0(t)\, y = 0 \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır [3].

Örnek 2.1. $t^5 \dfrac{d^2y}{dt^2} + 5t^4 \dfrac{dy}{dt} + 2y = 0$

denkleminin adjointi

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{5t^4}{t^5}\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t^5}y = 0$$

denkleminden

$$y'' - \frac{5}{t}y' + \left(\frac{5t^3+2}{t^5}\right)y = 0$$

denklemi elde edilir.

Tanım 2.2. Bir denklemin adjointi kendisine eşit ise, bu denkleme self-adjointtir denir [3].

Teorem 2.1.

$$a_o(t)\frac{d^2y}{dt^2} + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_2(t)y = 0, \qquad t \in \mathrm{I} = [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \tag{2.3}$$

ikinci mertebeden lineer homogen diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada a_0, I aralığında ikinci mertebeden sürekli türevlenebilir, a_1, I aralığında birinci mertebeden sürekli türevlenebilir ve $\forall\ t \in \mathrm{I}$ için $a_0(t) \neq 0$ dır. (2.3) denkleminin self-adjoint olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{d}{dt}\left[a_0(t)\right] = a_1(t)$$

olmasıdır [4].

Örnek 2.2.

$$\left(1-t^2\right)\frac{d^2x}{dt^2} - 2t\frac{dx}{dt} + n(n+1)x = 0$$

Legendre diferensiyel denklemi self-adjointtir.

a, b ve *c* fonksiyonları (0, ∞) aralığında reel değerli, sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$y''' + a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0 \tag{2.4}$$

üçüncü mertebeden lineer homogen denkleme ait L operatörü

$$\mathrm{L}=\frac{\partial^3}{\partial t^3} + a(t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} + b(t)\frac{\partial}{\partial t} + c(t)$$

olmak üzere $\upsilon \mathrm{L}u - u\mathrm{L}^*\upsilon$ ifadesinden (2.4) denkleminin adjointi aşağıdaki şekilde elde edilir. Buna göre,

$$\upsilon \mathrm{L}u = \upsilon\left[\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b(t)\frac{\partial u}{\partial t} + c(t)u\right]$$

$$= \upsilon\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \upsilon a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \upsilon b(t)\frac{\partial u}{\partial t} + \upsilon c(t)u$$

ifadesinde

$$\upsilon b(t)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\upsilon b(t)u\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\upsilon b(t)\right)u\,,$$

$$\upsilon a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\upsilon a(t)\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\upsilon a(t)\right)\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\upsilon a(t)\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\upsilon a(t)\right)u\right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\upsilon a(t)\right)u\,,$$

$$\upsilon\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) - \frac{\partial\upsilon}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\upsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} u \right) - \frac{\partial^3 \upsilon}{\partial t^3} u$$

şeklinde olup

$$\upsilon \mathrm{L}u = \frac{\partial}{\partial t}\left(\upsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} u \right) - \frac{\partial^3 \upsilon}{\partial t^3} u + \frac{\partial}{\partial t}\left(\upsilon a(t) \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

$$- \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\upsilon a(t) \right) u \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\upsilon a(t) \right) u + \frac{\partial}{\partial t}\left(\upsilon b(t) u \right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\upsilon b(t) \right) u + \upsilon c(t) u$$

$$= \underbrace{u\left(- \frac{\partial^3 \upsilon}{\partial t^3} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\upsilon a(t) \right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\upsilon b(t) \right) + \upsilon c(t) \right)}_{\mathrm{L}^* \upsilon}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t}\left(\upsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} u + \upsilon a(t) \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\upsilon a(t) \right) u + \upsilon b(t) u \right)$$

dır.

$$\upsilon \mathrm{L}u - u\mathrm{L}^* \upsilon = \frac{\partial}{\partial t}\left(\upsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} u + \upsilon a(t) \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\upsilon a(t) \right) u + \upsilon b(t) u \right)$$

eşitliğindeki

$$\mathrm{L}^*(y) = y''' - [a(t)y]'' + [b(t)y]' - c(t)y = 0 \tag{2.5}$$

ifadesine (2.4) denkleminin adjointi denir.

$$\left(\left(z' - a(t)z \right)' + b(t)z \right)' - c(t)z = 0 \tag{2.6}$$

şeklinde de gösterilebilir. Burada $a \in C^2(0,\infty)$ ve $b \in C^1(0,\infty)$ dır.

(2.4) denkleminin self-adjointi bu denklemin adjointi yardımı ile bulunabilir. (2.4) denklemine ait (2.5) adjoint denklemi

$$y''' - a(t)y'' + \left[b(t) - 2a'(t)\right]y' + \left[b'(t) - a''(t) - c(t)\right]y = 0$$

şeklinde yazılarak, katsayı fonksiyonlarının karşılıklı eşitlenmesi ile

$$\begin{aligned} a(t) &= -a(t) && \Rightarrow 2a(t) = 0, \\ b(t) &= b(t) - 2a'(t) && \Rightarrow -2a'(t) = 0, \\ c(t) &= b'(t) - a''(t) - c(t) && \Rightarrow c(t) = \frac{b'(t)}{2} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu ifadelerden (2.4) denkleminin self-adjointi

$$y''' + b(t)y' + \frac{1}{2}b'(t)y = 0 \tag{2.7}$$

şeklinde bulunur.

$p \in C^1((a, b))$, $q \in C((a, b))$ ve (a, b) aralığında her t için $p(t) > 0$ olmak üzere ikinci mertebeden

$$\left(p(t)u'\right)' + q(t)u = 0 \tag{2.8}$$

denklemini göz önüne alalım.

Teorem 2.2 (Sturm-Ayırma Teoremi). u_1 ve u_2, (2.8) denkleminin (a, b) aralığında lineer bağımsız iki çözümü olsun. (a, b) aralığında u_1 in ardışık iki sıfırı arasında u_2 nin bir ve yalnız bir sıfırı vardır.

Teorem 2.3 (Sturm-Karşılaştırma Teoremi). (2.8) denkleminin (a, b) aralığında bir çözümü u ve

$$\left(p(t)u'\right)' + Q(t)u = 0 \tag{2.9}$$

denkleminde bir çözümü υ olsun. $Q(t) > q(t)$ olacak şekilde Q ve q fonksiyonları sürekli olsun. (a, b) aralığında t_1, t_2 (a, b) aralığında u nun ardışık iki sıfırı ise, $t_1 < t < t_2$ aralığında υ nin en az bir sıfırı vardır.

İspat: Kabul edelim ki υ, $t_1 < t < t_2$ aralığında hiçbir sıfıra sahip olmasın. Bu durumda genelliği bozmaksızın $t_1 < t < t_2$ aralığında $\upsilon(t) > 0$, $u(t) > 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Ayrıca hipotezden $\forall\, t \in [a,b]$ için

$$\left(p(t)u'(t)\right)' + q(t)u(t) = 0 \tag{2.10}$$

$$\left(p(t)\upsilon'(t)\right)' + Q(t)\upsilon(t) = 0 \tag{2.11}$$

yazılabilir. Buradan (2.10) denklemini $\upsilon(t)$ ile, (2.11) denklemini $u(t)$ ile çarpıp, taraf tarafa çıkarma işlemi yaptığımızda

$$\left\{p(t)\left[u'(t)\upsilon(t) - \upsilon'(t)u(t)\right]\right\}' = \left[Q(t) - q(t)\right]u(t)\upsilon(t)$$

elde edilir. Bu ifadenin t_1 den t_2 ye integrali alındığında

$$p(t_2)u'(t_2)\upsilon(t_2) - p(t_1)\upsilon'(t_1)u(t_1) = \int_{t_1}^{t_2}\left[Q(t) - q(t)\right]u(t)\upsilon(t)\,dt \tag{2.12}$$

elde edilir. Teoremdeki hipotezden $p(t_2) > 0$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca $t_1 < t < t_2$ aralığında $u(t_2) = 0$ ve $u(t) > 0$ olduğundan $u'(t_2) < 0$ elde edilir. $\upsilon(t) > 0$

olduğunda $\upsilon(t_2) \geq 0$ olur. Buna bağlı olarak

$$p(t_2)u'(t_2)\upsilon(t_2) \leq 0 \quad \text{ve} \quad p(t_1)u'(t_1)\upsilon(t_1) \geq 0$$

elde edilir. (2.12) eşitliğini göz önüne aldığımızda eşitliğin sağ yanı pozitiftir. Sol yanı ise negatiftir ki bu bir çelişkidir. O halde kabulümüz yanlıştır. Buradan $\upsilon(t)$ fonksiyonunun $t_1 < t < t_2$ aralığında en az bir sıfıra sahip olduğu sonucuna varılır.

$c(t)$ ve $C(t)$, $t_0 \geq 0$ için $t_0 \leq t < \infty$ aralığında pozitif reel değerli sürekli fonksiyonlar ve de $c(t) \leq C(t)$ olmak üzere

$$y'' + c(t)y = 0 \tag{2.13}$$

ve

$$y'' + C(t)y = 0 \tag{2.14}$$

diferensiyel denklemlerini ele alalım.

Tanım 2.3. (2.13) denkleminin aşikar olmayan bir çözümü $[t_0, \infty)$ yarı aralığında sonsuz sayıda sıfıra sahip ise, bu çözüme bu aralıkta salınımlıdır denir. Tersine (2.13) denkleminin aşikâr olmayan bir çözümü $[t_0, \infty)$ yarı aralığında sonlu sayıda sıfıra sahip ise, bu çözüme bu aralıkta salınımsızdır denir.

Bu tanıma göre, salınımlı bir y çözümü için $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ ve $y(t_n) = 0$ şekilde bir (t_n) dizisi vardır. Çözüm salınımsız ise, her $t \geq t_1$ için $y(t) \neq 0$ olacak şekilde bir t_1 sayısı mevcuttur.

Teorem 2.2 den (2.13) denkleminin çözümlerinin ya hepsi salınımlıdır ya da hepsi salınımsızdır. Buna göre (2.13) denkleminin her çözümü salınımlı ise, denkleme salınımlı; aksi takdirde salınımsızdır denir.

Belirtelim ki (2.13) denkleminin kapalı ve sınırlı bir I aralığında tanımlı aşikar olmayan bir çözümünün sıfırlarının sayısı sonlu olduğundan, kapalı ve sınırlı bir aralıkta (2.13) denklemi salınımsızdır.

Örnek 2.3.

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4y=0 \tag{2.15}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+16y=0 \tag{2.16}$$

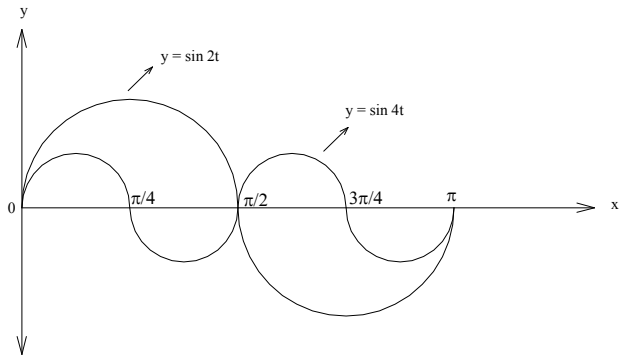
denklemlerini ele alalım. Bu denklemlerde $c(t)=4$ ve $C(t)=16$ olup $c(t)<C(t)$ dir. (2.15) denkleminin genel çözümü

$$y_1(t) = C_1\sin 2t + C_2\cos 2t$$

olur. (2.16) denkleminin genel çözümü ise,

$$y_2(t) = C_1\sin 4t + C_2\cos 4t$$

şeklinde olup Teorem 2.3 ün doğruluğu aşağıdaki grafikten görülebilir.



Şekil 2.1. Salınımlı Olan İki Fonksiyonun Karşılaştırılması

Teorem 2.3 kullanılarak, salınımlılık özelliği bilinen bir denklemden diğerinin de salınımlılık özellikleri elde edilebilir. Örneğin;

$$y'' + \frac{a}{t^2} y = 0$$

denklemini göz önüne alalım. Kolaylıkla görülebilir ki bu denklem $a \le 1/4$ olduğunda salınımsız ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere $a = (1+\varepsilon)/4$ olduğunda salınımlıdır.

Teorem 2.4. $\varepsilon > 0$ olmak üzere $\forall\ t \ge t_0 > 0$ için eğer $c(t) \ge \left((1+\varepsilon)/4t^2\right)$ ise, (2.13) denklemi salınımlıdır.

İspat : $m > 0$ reel bir sabit olmak üzere

$$y'' + m^2 y = 0$$

denklemi salınımlıdır. Bu denklemde $t_1 = \mathrm{e}^t$ konumu yapılırsa,

$$t_1^2 \frac{d^2 y}{dt_1^2} + t_1 \frac{dy}{dt_1} + m^2 y = 0$$

ve bu denkleme de $\mathrm{y} = \upsilon / \sqrt{\mathrm{t}_1}$ dönüşümü uygulanırsa, denklemin

$$\frac{d^2 \upsilon}{dt_1^2} + \frac{1+4m^2}{4t_1^2} \upsilon = 0$$

şeklinde kanonik formu elde edilir.

Göz önüne alınan dönüşümler $y'' + m^2 y = 0$ denkleminin sıfırlarını etkilemediğinden elde edilen son denklem salınımlıdır.

Böylece Teorem 2.3. den

$$c(t) \ge \frac{1+4m^2}{4t^2} = \frac{1+\varepsilon}{4t^2}, \qquad \varepsilon > 0$$

durumunda (2.13) denklemi salınımlıdır.

Sonuç 2.1. $\forall \quad t \geq t_0 > 0$ için $t^2 c(t) \geq \frac{1}{4}$ ise, (2.13) denklemi salınımlıdır [5].

Sonuç 2.2. $\forall \quad t \geq t_0$ için $c(t) \leq 0$ olsun. Bu durumda (2.13) denklemi salınımsızdır [5].

Teorem 2.5 (Hille-Kneser). Kabul edelim ki

$$w^* = \limsup_{x\to\infty} x^2 c(x) \qquad , \qquad w_* = \liminf_{x\to\infty} x^2 c(x)$$

olsun. Bu durumda eğer $w_* > \frac{1}{4}$ ise, (2.13) denklemi salınımlıdır. Eğer $w^* < \frac{1}{4}$ ise, (2.13) denklemi salınımsızdır. Fakat w_* veya w^* , $\frac{1}{4}$ e eşitse, bu durumda denklem ya salınımlı ya da salınımsızdır.

Teorem 2.6 (Leighton). $0 < t < \infty$ aralığında (2.8) denklemini göz önüne alalım. Bu denklemde p , p' ve q sürekli fonksiyonlar ve bu aralıkta $p(t) > 0$ olsun. Ayrıca

$$p_\infty = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{dx}{p(x)} \qquad , \qquad q_\infty = \lim_{t\to\infty} \int_1^t q(x)dx$$

şeklinde olsun. Bu durumda eğer $p_\infty = q_\infty = \infty$ ise, (2.8) denklemi $(1, \infty)$ aralığında salınımlıdır.

İspat : Aksini kabul edelim. Yani (2.8) denkleminin keyfi çoklukta sıfırı olmasın. Eğer $y(t)$, $t \geq t_1$ için pozitif bir çözüm ise , $t \geq t_1$ için $w(t) = -p(t)y'(t)/y(t)$ şeklinde tanımlansın. Buradan

$$w'(t) = \frac{-y(t)[p(t)y'(t)]' - p(t)y'^2(t)}{y^2(t)} = q(t) + \frac{w^2(t)}{p(t)}$$

ve böylece hipotezden $t \to \infty$ iken

$$w(t) - w(t_1) \geq \int_{t_1}^{t} q(x)dx \qquad \to \infty$$

dır. Yeterince büyük t ler için $y'(t) < 0$ ve sonuç olarak $\lim_{t\to\infty} y(t)$ sonlu olduğundan $w(t) \to \infty$ dır. Kabul edelim ki y_1 ve y_2, $t \geq t_1$ için (2.8) denkleminin pozitif lineer bağımsız çözümleri olsun. Bu durumda (2.8) denkleminden

$$\frac{d}{dt}[p(y_1y_2' - y_2y_1')] = 0$$

elde edilir. Öyle ki

$$p(y_1y_2' - y_2y_1') = k \neq 0$$

dır. Lineer bağımsız çözümlerin Wronskian'ı $y_1y_2' - y_2y_1'$ sıfıra eşit olamayacağından, k sabiti sıfır olamaz. Denklemin esas çözümleri u ve υ

$$u^2 = y_1^2 + y_2^2 \qquad , \qquad \upsilon = \arctan(y_2/y_1)$$

olarak tanımlanmış olsun. Buradan

$$\upsilon' = (y_1y_2' - y_2y_2')(y_1^2 + y_2^2) = \frac{k}{p}.u^2$$

elde edilir ve υ' $[t_1, \infty)$ aralığında pozitiftir. Böylece $t \to \infty$ iken

$$\upsilon(t) = k\int_{t_1}^{t} \frac{dx}{p(x)u^2(x)} \qquad \to +\infty$$

dır. $t \to \infty$ iken $p_\infty = \infty$ dır ve $x \to \infty$ iken $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ boyunca $u^2(x)$ in sonlu bir limiti vardır. Böylece $\upsilon < \frac{\pi}{2}$ çelişkisinden teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.7 (Potter). Kabul edelim ki (2.8) denkleminde p ve q fonksiyonları $C^1(0,\infty)$ un iki elemanı, $(0,\infty)$ aralığında p pozitif, c negatif olsun ve

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{p(t)} = \infty$$

olsun. Eğer $L = \lim p(t)\left\{\left[p(t)q(t)\right]^{-1/2}\right\}$ $(t \to \infty)$ var ise, $L < 2$ olması durumunda (2.8) denklemi salınımlıdır ve $L > 2$ olması durumunda (2.8) denklemi salınımsızdır [6].

Eğer (2.4) denkleminde $a(t)$, $b(t)$ ve $c(t)$ fonksiyonlarını a, b ve c ($c \neq 0$) gibi sabitler alırsak

$$y''' + ay'' + by' + cy = 0 \tag{2.17}$$

elde edilir. (2.17) denkleminin her zaman bir salınımsız çözümü olduğu iyi bilinir.

Örnek 2.4. $y''' + y' = 0$

Üçüncü mertebeden sabit katsayılı diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Denklemde $y = e^{rt}$ olarak alırsak

$$r^3 + r = 0$$

elde edilir. Buradan

$$r_1 = 0 \quad , \quad r_{1,2} = \pm i$$

dir. Buna göre denklemin çözümleri

$$y_1(t) = C_1 e^0 \quad \text{ve} \quad y_2 = C_2 \cos t + C_3 \sin t$$

şeklinde elde edilir. Görüldüğü gibi denklemin salınımsız bir çözümü vardır.

İkinci mertebeden denklemler için verilen salınım ve salınımsızlık tanımları, benzer şekilde üçüncü mertebeden (2.4) ve (2.6) denklemleri için de verilebilir. Literatürde genellikle (2.4) , {veya (2.6)} denkleminin bir çözümünün salınımı için aşağıdaki iki türlü tanım karşımıza çıkar.

Tanım 2.4. Eğer (2.4) {veya (2.6)} denkleminin aşikâr olmayan bir $y(t)$ çözümünün, $T_y > 0$ olmak üzere $[T_y, \infty)$ yarı aralığında keyfi çoklukta sıfırı varsa, $y(t)$ çözümüne $[T_y, \infty)$ yarı aralığında salınımlıdır denir. Burada $n \to \infty$ iken $t_1 \to \infty$ ve n=1,2,... için $y(t_n) = 0$ olacak şekilde bir $(t_n) \subset [T_y, \infty)$ dizisi vardır.

Tanım 2.5. (2.4) {veya (2.6)} denkleminin aşikâr olmayan bir $y(t)$ çözümünün, $[T_y, \infty)$ yarı aralığında sonsuz sayıda sıfır varsa, bu çözüme $[T_y, \infty)$ yarı aralığında salınımlıdır denir.

Bu iki tanım (2.4) {(2.6)} denklemi için aynıdır. Bununla birlikte eğer (2.4) {(2.6)} denklemini $d < \infty$ olacak şekilde $(0, d)$ aralığında göz önüne alacak olursak Tanım 2.4 anlamsızdır. Eğer (2.4) {(2.6)} denkleminin aşikâr olmayan bir $y(t)$ çözümü salınımlı değilse, bu çözüme salınımsızdır denir. Eğer (2.4) {(2.6)} denkleminin aşikâr olmayan salınımlı bir çözümü varsa, bu denkleme salınımlıdır denir. Aksi taktirde (2.4) {(2.6)} denklemine salınımsızdır denir.

[7] de Greguš

$$y''' + q(t)y' + q'(t)y = 0 \qquad t \in (-\infty, \infty)$$

denkleminin her çözümünün $(-\infty, \infty)$ aralığında sonsuz çoklukta sıfırı olacak şekilde q üzerinde yeterli şartları elde etmiştir.

Tanım 2.6. (2.4) denkleminde $(0 < \alpha < \infty)$ için $y(\alpha) = y'(\alpha) = 0$, $y''(\alpha) > 0$ olacak şekildeki $\forall$ $y(t)$ çözümünün $(0, \infty)$ (veya (α, ∞)) aralığında $y(t) > 0$ özelliği var ise, (2.4) denklemine I. sınıf (veya II. sınıf) denir.

Hanan [8] I. ve II. sınıf üçüncü mertebeden denklemler için [6] da Leighton ve Nehari nin teoremine benzer teoremler elde etmiştir. Şimdi bunları ispatsız olarak verelim.

Teorem 2.8 (Hanan). (2.4) denkleminin adjointi II. sınıf ise, (2.4) denklemi I. sınıftır.

Teorem 2.9 (Hanan). Eğer (2.4) denklemi I. sınıf (veya II. sınıf) ise, denklemin salınımlı olması için gerek ve yeter şart adjointinin salınımlı olmasıdır.

Teorem 2.10 (Hanan). Kabul edelim ki (2.4) denkleminde $a(t) \equiv 0$ olsun. Eğer

$$y'' + b(t)y = 0 \tag{2.18}$$

denklemi $(0, \infty)$ aralığında salınımsız ve eğer $c(t) \geq 0$ $(c(t) \leq 0)$ ise, bu durumda (2.4) denklemi I. sınıftır (II. sınıftır).

İspat: Sansone [9], ilk olarak $a(t) \equiv 0$, $b \in C^1(0, \infty)$ ve $2c(t) - b'(t)$ nin sabit işaretli olması durumunda teklik teoremini ispatlamıştır. Hanan [8] de, ya I. sınıf ya da II. sınıf olan keyfi üçüncü mertebeden (2.4) denklemini geliştirmiştir.

Mammana [10], $a(t)\equiv 0$ ve $2c(t)-b'(t)>0$ $\left(2c(t)-b'(t)<0\right)$ olması durumunda, (2.4) denkleminin I. sınıf (II. sınıf) olduğunu göstermiştir.

Bunu ispatlayacak olursak; kabul edelim ki y, $y(\beta)=y'(\beta)=0$ olacak şekilde (2.4) denkleminin aşikâr olmayan bir çözümü olsun. Eğer (2.4) I. sınıf değil ise, $y(\alpha)=0$ olacak şekilde bir $\alpha<\beta$ sayısı vardır. (2.4) denkleminin her iki tarafı y ile çarpılıp, α dan β ya integre edilirse,

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left[yy'''+a(t)yy''+b(t)yy'+c(t)y^2\right]dt=0$$

$a(t)\equiv 0$ olduğundan

$$\int_{\alpha}^{\beta}yy'''dt+\int_{\alpha}^{\beta}b(t)yy'dt+\int_{\alpha}^{\beta}c(t)y^2dt=0$$

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left[(yy'')'-y'y''\right]dt+\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[\left(b(t)y^2\right)'-b(t)y^2\right]dt+\int_{\alpha}^{\beta}c(t)y^2dt=0$$

$$\left[yy''-\frac{1}{2}y'^2+\frac{1}{2}by^2\right]_{\alpha}^{\beta}=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(b'-2c)y^2dt$$

veya

$$y'^2(\alpha)=-\int_{\alpha}^{\beta}(2c-b')y^2dt<0$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir. Çünkü $a(t)\equiv 0$ ve $2c(t)-b'(t)>0$ dır. Bu da (2.4) denkleminin I. sınıf olduğunu gösterir. II. sınıf için benzer yol takip edilir.

Teoremi 2.11 (Sansone-Hanan). Eğer u ve υ, I. sınıf veya II. sınıf olan üçüncü mertebeden lineer bir diferensiyel denklemin lineer bağımsız iki çözümü iseler, bu durumda u ve υ nin ortak sıfırı olamaz.

İspat : Aksini kabul edelim. $u(\alpha)=u(\beta)=\upsilon(\alpha)=\upsilon(\beta)=0$ olsun.

Eğer $\alpha=\beta$ ise,

$$\mathrm{w}(t)=\upsilon''(\alpha)u(t)-u'(\beta)\upsilon(t)$$

şeklinde tanımlanan w fonksiyonu, $\mathrm{w}(\alpha)=\mathrm{w}'(\alpha)=\mathrm{w}''(\alpha)=0$ şartlarını sağlayan, (2.4) denkleminin bir çözümüdür. Böylece bir başlangıç değer probleminin çözümü için teklik teoreminden $\mathrm{w}(t)\equiv 0$ dır. Kabulden $\alpha<\beta$ dır. I. sınıf tanımından $u'(\beta)\neq 0$ ve $u'(\beta)\neq 0$ dır. Buradan I. sınıf denklemler için geçerli olmayan, $z(\alpha)=z(\beta)=z'(\beta)=0$ şartlarını sağlayan

$$z(t)=\upsilon'(\beta)u(t)-u'(\beta)\upsilon(t)$$

(2.4) denkleminin aşikâr olmayan bir çözümüdür. II. sınıf denklemler için ispat benzer şekildedir.

$y'''+y=0$ örneği, Teorem 2.11 in keyfi üçüncü diferensiyel mertebeden denklemler için doğru olmadığını gösterir. Bu denklemin $2n\pi$ $(n=1,2...)$ de ortak sıfırları olan $u(t)=1-\cos t$, $\upsilon(t)=\sin t$ çözümleri vardır.

Ayırma Teoremi 2.12 (Hanan). Kabul edelim ki u ve υ, I. sınıf (II. sınıf) üçüncü mertebeden lineer bir diferensiyel denklemin lineer bağımsız çözümleri olsun. Eğer $u(\alpha)=\upsilon(\alpha)=0$ ise, bu durumda (α,∞) $[(0,\infty)]$ aralığında u ve υ nin sıfırları birbirini ayırır.

Bu teoremin ve aşağıdaki teoremlerin ispatı [8] de verilmiştir.

Teorem 2.13 (Hanan). Eğer (2.4) denklemi I. sınıf veya II. sınıf ise, (2.4) denkleminin herhangi bir çözümünün ardışık iki sıfırı arasında, herhangi bir diğer aşikar olmayan çözümünün en fazla iki sıfırı vardır.

Bu sonucu Kondrat'ev [11], 1958 yılında (2.4) denkleminde $a(t) \equiv b(t) \equiv 0$ olması durumunda elde etmiştir.

Birkhoff [12], 1911 de aşağıdaki ayırma teoremini (2.7) self adjoint denklemi için elde etti. Bu teorem, mertebesi ikiden büyük denklemler için bulunan ilk ayırma teoremidir.

Teorem 2.14 (Birkhoff). Eğer u ve υ, (2.4) denkleminin en az bir sıfırı olan lineer bağımsız çözümleri ise, u ve υ nin sıfırları birbirini teker teker veya çifter çifter ayırır.

Lazer [13], 1966 yılında

$$y''' + b(t)y' + c(t)y = 0 \tag{2.19}$$

denklemi için ayırma teoremini verdi. Bu denklemdeki b ve c ler sürekli ve $(0, \infty)$ aralığında sabit işaretlidir. Bu denklem $a(t) \equiv 0$ özel durumunda (2.4) denklemi ile aynıdır. (2.19) denklemi (2.4) denkleminden daha az genel değildir. Çünkü (2.4) denklemindeki ikinci türevli terim her zaman

$$y(t) = u(t)\exp\left(-\frac{1}{3}\int_{\alpha}^{t} a(x)dx\right)$$

dönüşümü ile yok edilebilir.

Teorem 2.15 (Lazer). Eğer $b(t) \le 0$, $c(t) \le 0$, $b \in \mathrm{C}^1$ ve $2c(t) \le b'(t)$ ise, (2.19) denkleminin iki lineer bağımsız çözümünün sıfırları birbirini ayırır.

Teorem 2.16 (Lazer). Eğer $b(t) \le 0$, $c(t) < 0$, $c \in \mathrm{C}^2$ ve $2b(t)/c(t) + \left[1/c(t)\right]'' \ge 0$ ise, (2.19) denkleminin herhangi iki lineer bağımsız salınımlı çözümünün sıfırları birbirini ayırır.

Şimdi üçüncü mertebeden denklemler için karşılaştırma teoremlerini ele alalım. Burada (2.4) denklemine ek olarak aynı türden

$$y''' + a(t)y'' + b(t)y' + C(t)y = 0 \tag{2.20}$$

denklemini göz önüne alalım. Hanan [8],

$$c(t) \ge C(t) \quad , \quad 0 < t < \infty \tag{2.21}$$

kabulü altında (2.4) ve (2.20) denklemleri için aşağıdaki karşılaştırma teoremlerini elde etmiştir.

Teorem 2.17 (Hanan). Eğer (2.4) ve (2.20) denklemleri II. sınıf ve (2.21) sağlanıyor ise, bu durumda (2.4) denklemi salınımlı iken (2.20) denklemi salınımlıdır.

Mammana [10], (2.4) denkleminin, $a(t) \equiv 0$, $b \in \mathrm{C}^1$ ve $2c(t) \ge b'(t)2c(t)$ durumunda I. sınıf olduğunu gösterdi.

Hanan [8], aşağıdaki

$$y''' + b(t)y' + c(t)y = 0 \tag{2.22}$$

$$y''' + B(t)y' + C(t)y = 0 \tag{2.23}$$

denklemleri için

$$b(t) \geq B(t) \geq 0 \quad , \quad b'(t) - c(t) \geq B'(t) - C(t) \tag{2.24}$$

$$2c(t) < b'(t) \quad , \quad 2C(t) < B'(t) \quad , \quad (0 < t < \infty) \tag{2.25}$$

eşitsizliklerini ele almıştır.

Teorem 2.18 (Hanan). Kabul edelim ki (2.22) ve (2.23) denklemlerinin katsayıları, (2.24) ve (2.25) eşitsizliklerini sağlasın. Bu durumda (2.20) denklemi salınımlı ise, (2.22) denklemi salınımlıdır.

Aşağıdaki teoremlerde (2.22) denklemi ile

$$y'' + b(t)y = 0 \tag{2.26}$$

ikinci mertebeden diferensiyel denklemi karşılaştırıldı. Burada $b \in C^1(0, \infty)$ kabulü ışığında (2.26) denklemi salınımsızdır. (2.26) denkleminin salınımsızlığı için, Teorem 2.5 (Hille-Kneser) de

$$\limsup_{t \to \infty} t^2 b(t) < \frac{1}{4}$$

olduğu gibi $b(t)$ katsayısı üzerinde yeterli şartlar verildi.

Teorem 2.19 (Hanan). Kabul edelim ki (2.26) denklemi salınımsız ve (2.22) denkleminde $c(t)$, $(0, \infty)$ aralığında sabit işaretli olsun. Eğer $y(t)$, (2.22) denkleminin herhangi bir çözümü ise, $y'(t)$ salınımlıdır, bu durumda $y(t)$ de benzer şekilde salınımlıdır.

Teorem 2.20 (Hanan). Kabul edelim ki (2.26) denklemi salınımsız ve (2.22) denkleminde $c(t)$, $(0, \infty)$ aralığında pozitif olsun. Bu durumda (2.26) denklemi

salınımlı ise, bütün aşikâr olmayan y çözümleri aralığında sıfıra eşit değildir ve $|y|$ monoton azalandır.

Teorem 2.21 (Hanan). (2.26) denklemi salınımsız ve ister $b'(t) \geq c(t) > 0$ ya da ister $b'(t) \leq c(t) \leq 0$ eşitsizliklerinden biri $(0, \infty)$ aralığında sağlanıyor ise, (2.22) denklemi salınımsızdır.

Teorem 2.22 (Hanan). Eğer (2.26) denklemi salınımsız ve $\alpha > 0$ olmak üzere (α, ∞) aralığında $b(t) > 0$, $c(t) > 0$, $c(t) > b'(t)$ ve

$$\int_{\alpha}^{\infty} t\left[c(t) - b'(t)\right] dt = \infty$$

ise, (2.22) denklemi salınımlıdır.

Teorem 2.23 (Hanan). Kabul edelim ki (2.26) denklemi salınımsız, $\alpha < 0$ olmak üzere (α, ∞) aralığında $b(t) > 0$ ve $c(t) < 0$ olsun. Bu durumda eğer

$$\int_{\alpha}^{\infty} t[-c(t)]dt = \infty$$

ise, (2.22) denklemi s alınımsızdır ve eğer

$$\int_{\alpha}^{\infty} t^2[-c(t)]dt < \infty$$

ise, (2.22) denklemi salınımlıdır.

III. BÖLÜM
ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEM ÇÖZÜMLERİNİN SALINIM VE SALINIMSIZLIĞI İLE İLGİLİ TEOREMLER

Bu bölümde üçüncü mertebeden lineer homojen bir diferensiyel denklemin salınım, salınımsızlık ve güçlü salınımlılığı için katsayı fonksiyonları kullanılarak yeterli şartlar verildi.

a ve $b \in C^1\left((0,\infty),R\right)$, $c \in C\left((0,\infty),R\right)$ olmak üzere

$$L(y) = y''' + a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0 \tag{3.1}$$

denklemini göz önüne alalım. (3.1) denkleminin adjointi

$$L^*(z) = \left(\left(z' - a(t)z\right)' + b(t)z\right)' - c(t)z = 0 \tag{3.1}^*$$

şeklindedir.

S ve S* sırasıyla (3.1) ve (3.1)* denklemlerinin çözüm uzayı, yani;

$$S = \{y;\ L(y)=0,\ [d,\infty)\};$$
$$S^* = \{z;\ L^*(z)=0,\ [d,\infty)\}$$

olsun. Burada $I \subset [d,\infty)$ yarım aralığı üzerinde $S_1 \subseteq S$, $S_1^* \subseteq S^*$ lineer alt uzaylarında salınımlı (salınımsız) çözümler arasındaki ilişki göz önüne alındı.

Sonuçlar (3.1) veya (3.1)* denklemlerinin bir salınımsız çözümünün varlığına bağlıdır.

Tanım 3.1. Kabul edelim ki S $\{$veya S*$\}$ çözüm uzayının bir alt uzayı S_1 $\{$veya S_1*$\}$ olsun. Bu durumda

(i) Eğer S_1 $\{$ S_1*$\}$ alt uzayının aşikâr olmayan çözümü salınımlı değil ise, S_1 $\{$ S_1*$\}$ alt uzayına salınımsızdır denir.

(ii) Eğer S_1 $\{$ S_1*$\}$ alt uzayı aşikâr olmayan bir salınımlı çözüm ve bir salınımsız çözüm içeriyorsa, S_1 $\{$ S_1*$\}$ alt uzayına zayıf salınımlıdır denir.

(iii) Eğer S_1 $\{$ S_1*$\}$ alt uzayının bütün çözümleri salınımlı ise, S_1 $\{$ S_1*$\}$ alt uzayına güçlü salınımlıdır denir.

(iv) Eğer (ii) veya (iii) sağlanıyorsa, S_1 $\{$ S_1*$\}$ alt uzayına salınımlıdır denir.

Eğer S{S*} çözüm uzayı salınımsız, zayıf salınımlı ya da güçlü salınımlı ise, bu durumda (3.1) {(3.1)*} denklemine sırasıyla salınımsız, zayıf salınımlı ya da güçlü salınımlıdır denir.

Tanım 3.1 deki (ii) şartının geçerli olması için alt uzayının boyutunun iki veya ikiden büyük olması gerektiğine dikkat edelim.

Dolan [1], aşağıdaki sonuçları elde etmiştir.

(i) Eğer S $\{$S*$\}$ zayıf salınmlı ise, bu durumda S* $\{$S$\}$ salınımlıdır.

(ii) Eğer S $\{$S*$\}$ salınımlı ve iki boyutlu salınımsız bir alt uzay içeriyorsa veya eğer S $\{$S*$\}$ çözüm uzayının iki boyutlu bütün alt uzayları zayıf salınımlı ise, bu durumda S* $\{$S$\}$ güçlü salınımlıdır.

Dolan [1] in temel aldığı yöntem şu şekildedir: eğer S $\{$S*$\}$ çözüm uzayının salınımsız bir ρ $\{\rho$*$\}$ çözümü varsa, bu durumda (3.1) {(3.1)*} denkleminin salınım hareketi

$$\left\{R_2(\rho)\left[R_1(\rho)y'\right]'\right\}' + Q(\rho)\left[R_1(\rho)y'\right] = 0$$

$$\left\{R_2{}^*(\rho^*)\left[R_1{}^*(\rho^*)z'\right]'\right\}' + Q(\rho^*)\left[R_1{}^*(\rho^*)z'\right] = 0,$$

üçüncü mertebeden diferensiyel denklem formu ile incelenebilir. Burada i=1,2 için $R_i(\rho)$ $\left\{R_i{}^*(\rho^*)\right\}$ ın $e > d$ olmak üzere $[e, \infty)$ yarı aralığında sıfırı yoktur.

Sansone [9], güçlü salınımlı bir çözüm uzayına sahip olan üçüncü mertebeden lineer bir diferensiyel denkleme örnek olarak

$$\left(y'' + py'\right)' = 0 \tag{3.2}$$

formunu verdi. Denklemin adjointi

$$z''' + pz' = 0$$

dır. Bu denklem formunun sabit olmayan en az bir salınımsız çözümü vardır.

Tanım 3.2. Eğer (3.1) {(3.1)*} denkleminin aşikâr olmayan çözümünün $I \subset [d, \infty)$ aralığında ikiden fazla sıfırı yoksa, (3.1) {(3.1)*} denklemine I aralığında diskonjugedir denir.

[14] den biliyoruz ki; (3.1) denkleminin bir I aralığında diskonjuge olması için gerek ve yeter şart (3.1)* denkleminin I aralığında diskonjuge olmasıdır. (3.1) denkleminin salınımsız olup olmadığını sorusunu J. H. Barrett [15], bazı yarı aralıklarda (3.1) denkleminin diskonjugeliğinden yararlanarak gösterdi.

Dolan [1] ın uyguladığı metod ya (3.1) ya da (3.1)* denkleminin salınımsız bir çözümünün var olmasına bağlıdır. Hanan [8] de (3.1) denklemi

için $[\mathrm{d},\infty)$ aralığında $a(t)\equiv 0$ olması durumunu vermiştir. Eğer $a(t)$, $b(t)$ ve $c(t)\in \mathrm{C}^1(\mathrm{d},\infty)$ ise ve

$$2c(t)-b'(t),$$

$[\mathrm{e},\infty)\subseteq[\mathrm{d},\infty)$ yarı aralığında sabit işaretli ise, ya (3.1) ya da (3.1)* denkleminin salınımsız çözümü vardır. Hanan'ın sonuçlarını Barrett [16] daha genel denklemler için uyguladı.

Barrett'in (3.1) ve (3.1)* denklemleri için uyguladığı sonuçlar aşağıdaki gibidir.

Eğer $b\in \mathrm{C}^1[\mathrm{e},\infty)$ ve $a\le 0$ $\{a\ge 0\}$, $[\mathrm{e},\infty)$ yarı aralığında $2c-b'-ab\le 0$ $\{2c-b'-ab\ge 0\}$ ve bazı $\mathrm{e}\ge \mathrm{d}$ için $[\mathrm{e},\infty)$ yarı aralığında özdeş olarak sıfır değil ise, bu durumda ya (3.1) denklemi ya da (3.1)* denklemi salınımsız bir çözüme sahiptir.

Hanan [8],

$$y''+ay'+by=0$$

ikinci mertebeden diferensiyel denkleminin $[\mathrm{d},\infty)$ yarı aralığında salınımsız ve bazı $\mathrm{e}\ge \mathrm{d}$ ler için $[\mathrm{e},\infty)$ aralığında c nin sabit işaretli olması durumunda, her bir (3.1), (3.1)* denklemlerinin salınımsız bir çözümünün var olduğunu gösterdi.

Şimdi katsayıların sabit olma durumunu göz önüne alalım.

Eğer $a(t)=a_2$, $b(t)=a_1$ ve $c(t)=a_0$, $t\ge \mathrm{d}$, a_{i} , i=0,1,2 için reel sayılar ise, hem (3.1) hem de (3.1)* denklemi ya salınımsızdır ya da zayıf salınımlıdır. Bu durum ya $\Delta\ge 0$ ya da $\Delta<0$ olmasına bağlıdır. Denklem $\Delta\ge 0$ ise, salınımsız; $\Delta<0$ ise, zayıf salınımlıdır. Burada Δ,

$$s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

üçüncü dereceden polinom denkleminin diskriminantıdır. Yani

$$\Delta = 18 a_2 a_1 a_0 - 4 a_2^3 a_0 + a_2^2 a_1^2 - 4 a_1^3 - 27 a_0^2$$

dır. Lazer [13] ve Zlamal [17] üçüncü mertebeden lineer denklemlerin salınım teorilerini sabit katsayılı durumdan sabit olmayan katsayılı duruma genişletti.

(3.1) ve (3.1)* denklemlerinden sırasıyla

$$L(y) = \{ r[y'' + q_1 y] \}' + q_2 y' = 0 \qquad [d, \infty) \tag{3.3}$$

$$L^*(z) = \left\{ (rz')' + q_2 z \right\}' + q_1 (rz') = 0 \qquad [d, \infty) \tag{3.3}^*$$

denklemleri elde edilir. Burada

$$\begin{cases} r(t) = \exp \int_d^t a(x)\,dx \\ q_1(t) = \dfrac{1}{r(t)} \int_d^t r(x) c(x)\,dx \\ q_2(t) = r(t)\left[b(t) - q_1(t) \right], \qquad t \geq d \end{cases} \tag{3.4}$$

dir. (3.3) denkleminin

$$r'[y'' + q_1 y] + r[y''' + q_1' y + q_1 y'] + q_2 y' = 0$$

$$r y''' + r' y'' + (r q_1 + q_2) y' + (r' q_1 + r q_1') y = 0$$

$$y''' + \frac{r'}{r}y'' + \frac{(rq_1 + q_2)}{r}y' + \frac{(rq_1)'}{r}y = 0$$

şeklinde yazılarak (3.1) denklemi ile katsayı fonksiyonlarının karşılıklı eşitlenmesi ile

$$\frac{r'(t)}{r(t)} = a(t) \qquad \Rightarrow r(t) = \exp\int_{\mathrm{d}}^{t} a(x)\,dx,$$

$$\frac{\left(r(t)q_1(t) + q_2(t)\right)}{r(t)} = b(t) \qquad \Rightarrow q_2(t) = r(t)\left[b(t) - q_1(t)\right]$$

ve

$$\frac{\left(r(t)q_1(t)\right)'}{r(t)} = c(t) \qquad \Rightarrow q_1(t) = \frac{1}{r(t)}\int_{\mathrm{d}}^{t} r(x)c(x)\,dx$$

elde edilir.

$C^1[\mathrm{d}, \infty)$ da kabul edilebilir y ve z fonksiyonları için Lagrange özdeşliği

$$\begin{cases} \{y;z\}' = z\mathrm{L}(y) + y\mathrm{L}^*(z), \\ \{y,z\} = \left(\sum_{k=0}^{2}(-1)^k D_k y D_{2-k}^* z\right) \end{cases} \tag{3.5}$$

şeklindedir ve

$$\begin{cases} D_0 y = y & D_0^* z = z \\ D_1 y = y' & D_1^* z = rz' \\ D_2 y = r(y'' + q_1 y) & D_2^* z = (rz')' + q_2 z \end{cases} \tag{3.6}$$

dır. j=1,2,3 olmak üzere $y_{\mathrm{j}} \in \mathrm{S}$ ve $z_{\mathrm{j}} \in \mathrm{S}^*$ için

$$w(y_1, y_2) = \det(D_i y_j) \quad , \quad i=0,1 \quad , \quad j=1,2; \tag{3.7}$$

$$w^*(z_1, z_2) = \det(D_i^* z_j) \quad , \quad i=0,1 \quad , \quad j=1,2; \tag{3.8}$$

$$W(y_1, y_2, y_3) = \det(D_i y_j) \quad , \quad i=0,1,2 \quad , \quad j=1,2,3; \tag{3.9}$$

$$W^*(z_1, z_2, z_3) = \det(D_i^* z_j) \quad , \quad i=0,1,2 \quad , \quad j=1,2,3; \tag{3.10}$$

şeklinde tanımlansın.

Eğer i=1,2,3 için $y_i \in S$ ve $z_i \in S^*$ ise, (3.1), (3.1)*, (3.9) ve (3.10) dan $W(y_1, y_2, y_3)$ ve $W^*(z_1, z_2, z_3)$ sabittir. İlaveten $W(y_1, y_2, y_3) \neq 0 \ \{W^*(z_1, z_2, z_3) \neq 0\}$ olması için gerek ve yeter şart y_1, y_2 ve y_3 $\{z_1, z_2$ ve $z_3\}$ ün, S $\{S^*\}$ çözüm uzayının lineer bağımsız çözümleri olmasıdır. (3.5), (3.7), (3.8), (3.9) ve (3.10) dan

$$\begin{cases} \text{eğer } y_i \in S \text{ ise, } \{y_1;\ w(y_2, y_3)\} = W(y_1, y_2, y_3) & i=1,2,3 \\ \text{eğer } z_i \in S^* \text{ ise, } \{w^*(z_1, z_2);\ z_3\} = W^*(z_1, z_2, z_3) & i=1,2,3 \end{cases} \tag{3.11}$$

yazılabilir.

Lemma 3.1. Eğer $y \in S$ $\{z \in S^*\}$ ise, bu durumda

$$y = w^*(z_1, z_2) \quad \{z = w(y_1, y_2)\}$$

olacak şekilde i=1,2 için $z_i \in S^*$ $\{y_i \in S\}$ çözümleri vardır.

Üstelik, eğer $y_i \in S$ $\{z_i \in S^*\}$, i=1,2 ise, bu durumda y_1 ve y_2 $\{z_1$ ve $z_2\}$ nin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart

$$w(y_1, y_2)(t) = 0 \quad \{z = w(y_1, y_2)(t) = 0\} \ ; \quad t \geq a$$

olmasıdır. Lemma 3.1 in ispatı Dolan [1] de verilmiştir.

Eğer $\overline{y},\ \rho \in \mathrm{S}$ ise,

$$\overline{y} = \rho\mu$$

D'Alembert dönüşümü yardımı ile (3.1) denkleminin son terimi ortadan kalkar.

$$\overline{\mathrm{y}}'=\rho'\mu+\rho\mu'$$
$$\overline{y}'' = \rho''\mu + 2\rho'\mu' + \rho\mu''$$
$$\overline{y}''' = \rho'''\mu + 3\rho''\mu' + 3\rho'\mu'' + \rho\mu'''$$

eşitliklerinden

$$\rho'''\mu + 3\rho''\mu' + 3\rho'\mu'' + \rho\mu''' + a(t)\left[\rho''\mu + 2\rho'\mu' + \rho\mu''\right] + b(t)\left[\rho'\mu+\rho\mu'\right] + c(t)\,\rho\mu = 0$$

$$\rho\mu''' + a(t)\,\rho\mu'' + b(t)\,\rho\mu' + 3\left(\rho''\mu' + \rho'\mu''\right) + 2a(t)\,\rho'\mu' + \underbrace{\left(\rho''' + a(t)\,\rho'' + b(t)\,\rho' + c(t)\,\rho\right)}_{0}\mu = 0$$

$$\mu''' + \left(a(t) + 3\frac{\rho'}{\rho}\right)\mu'' + \left(b(t) + 3\frac{\rho''}{\rho} + 2a(t)\frac{\rho'}{\rho}\right)\mu' = 0 \tag{3.12}$$

dır ve u,

$$\mathrm{L}_\rho(y) = \left\{\mathrm{R}_2(\rho)\left[\mathrm{R}_1(\rho)\,y'\right]'\right\}' + \mathrm{Q}(\rho)\left[\mathrm{R}_1(\rho)\,y'\right] = 0 \tag{3.13}$$

indirgenmiş üçüncü mertebeden diferensiyel denklemi sağlar. (3.13) denklemini

$$y''' + \left[\frac{\left(\mathrm{R}_1(\rho)\mathrm{R}_2(\rho)\right)'}{\mathrm{R}_1(\rho)\mathrm{R}_2(\rho)} + \frac{\mathrm{R}_1'(\rho)}{\mathrm{R}_1(\rho)}\right]y'' + \left[\frac{\left(\mathrm{R}_1'(\rho)\mathrm{R}_2(\rho)\right)'}{\mathrm{R}_1(\rho)\mathrm{R}_2(\rho)}\right]y' = 0 \tag{3.14}$$

şeklinde yazabiliriz. (3.12) ile (3.14) denklemlerinin katsayı fonksiyonlarını karsılaştırdığımızda elde ettiğimiz

$$\left(a(t)+3\frac{\rho'}{\rho}\right)=\left[\frac{(\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2)'}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}+\frac{\mathrm{R}_1'}{\mathrm{R}_1}\right],$$

$$\left(b(t)+3\frac{\rho''}{\rho}+2a(t)\frac{\rho'}{\rho}\right)=\left[\frac{\left(\mathrm{R}_1'\mathrm{R}_2\right)'}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}\right]$$

eşitliklerinden

$$\begin{cases} R_1(\rho)=\rho^2 \\ R_2(\rho)=\dfrac{r}{\rho} \\ Q=(\rho)=\dfrac{1}{\rho^2}[D_2\rho+q_2\rho] \end{cases} \tag{3.15}$$

dir ve ayrıca r, q_2 fonksiyonları (3.4) de tanımlandığı gibidir.

Eğer ρ salınımsız ise, $\mathrm{e}\geq\mathrm{d}$ için $[\mathrm{e},\infty)$ yarı aralığında $\rho\neq 0$ dır. Sonuç olarak u, $[\mathrm{e},\infty)$ yarı aralığında üçüncü mertebeden lineer bir denklemi sağlar.

Eğer $\overline{z}$, $\rho^*\in \mathrm{S}^*$ ise, bu durumda

$$\overline{z}=\rho^*\upsilon$$

dönüşümü yardımı ile (3.1)* denkleminin son terimi ortadan kalkar ve υ

$$L^*_{\rho^*} = \left\{ R_2^*(\rho^*)\left[R_1^*(\rho^*) z' \right]' \right\}' + Q(\rho^*)\left[R_1^*(\rho^*) z' \right] = 0 \qquad (3.13)^*$$

indirgenmiş üçüncü mertebeden lineer diferensiyel denklemi sağlar, burada

$$\begin{cases} R_1^*(\rho^*) = \dfrac{1}{\rho^*} \\ R_2^*(\rho^*) = r\rho^{*2} \\ Q^*(\rho^*) = \dfrac{1}{\rho^{*2}}\left[D_2^*\rho^* + rq_1\rho^* \right], \end{cases} \qquad (3.15)^*$$

dır ve de $r,\ q_1$ fonksiyonları (3.4) de tanımlandığı gibidir.

(3.13) ve (3.13)* denklemleri benzer denklemler olduğu için (3.13) ve (3.13)* denklemlerinin sonuçları da benzerdir. Dolayısıyla biri için göstermek yeterlidir. Burada (3.13) denklemi göz önüne alınacaktır.

Hartman [18], aşağıdaki sonuçları kullanmıştır.

Eğer $f\ \{f^*\}$, aşağıdaki şartları sağlayan kabul edilebilir bir fonksiyon ise,

(i) $f > 0\ \ \{f^* > 0\}$,

(ii) $L(f) \geq 0\ \ \{L^*(f^*) \geq 0\}$,

(iii) bazı $e \geq d$ için $[e, \infty)$ yarı aralığında $Q(f) \leq 0\ \ \{Q^*(f^*) \leq 0\}$ dır. Bu durumda (3.1) {(3.1)*} denkleminin salınımsız bir çözümü vardır.

$\rho \in S$ için, H_ρ, (3.13) denkleminin çözüm uzayı olsun. Bu durumda

$$S = [\rho].H_\rho \qquad (3.16)$$

dır, burada $[\rho]$, ρ çözümünden oluşan bir boyutlu bir alt uzaydır.

Eğer $\rho \in \mathrm{S}$ salınımsız ve $\bar{z} \in \mathrm{S}^*$ ise, bu durumda (3.5) Lagrange özdeşliğinden, $\bar{z}, \rho$ nun sıfırının olmadığı herhangi bir aralıkta

$$\left\{\mathrm{R}_2(\rho)y'\right\}' + \mathrm{Q}(\rho)y = \frac{\{\rho;\ \bar{z}\}}{\mathrm{R}_1(\rho)} \tag{3.17}$$

ikinci mertebeden lineer denklemi sağlar.

Tanım 3.3. Eğer $y_0 \in \mathrm{S}\ \ \{z_0 \in \mathrm{S}^*\}$ ise,

(i) $\mathrm{S}^*_{y_0} = \{z \in \mathrm{S}^*;\ \{y_0;\ z\} = 0\}$
$\{\mathrm{S}_{z_0} = \{y \in \mathrm{S};\ \{y; z_0\} = 0\}\};$

(ii) $[y_0] = \{\lambda y_0;\ \lambda \in (-\infty, \infty)\}$
$\{[z_0] = \{\lambda z_o;\ \lambda \in (-\infty, \infty)\}\}$

dır.

Lemma 3.2. (i) Eğer $y\ \{z\}$, $\mathrm{S}\ \{\mathrm{S}^*\}$ çözüm uzayının aşikâr olmayan bir çözümü ise, bu durumda $z_0 \in \mathrm{S}^*_{\mathrm{y}}\ \ \{y_0 \in \mathrm{S}_z\}$ olması için gerek ve yeter şart bazı $\bar{y} \in \mathrm{S}\ \ \{\bar{z} \in \mathrm{S}^*\}$ için $z_0 = \mathrm{w}(y, \bar{y})\ \ \{y_0 = \mathrm{w}^*(z, \bar{z})\}$ olmasıdır.

(ii) Eğer $y\ \{z\}$, $\mathrm{S}\ \{\mathrm{S}^*\}$ çözüm uzayının aşikar olmayan bir çözümü ise, bu durumda $\mathrm{S}^*_{\mathrm{y}}\ \{\mathrm{S}_z\}$ iki boyutludur.

(iii) Eğer $y_0\ \{z_0\}$, $\mathrm{S}\ \{\mathrm{S}^*\}$ çözüm uzayında aşikar olmayan bir çözüm ve $\bar{z} \in \mathrm{S}^* / \mathrm{S}^*_{y_0}\ \ \{\bar{y} \in \mathrm{S} / \mathrm{S}_{z_0}\}$ ise bu durumda

$$\mathrm{S} = [y_0] \oplus \mathrm{S}_{\bar{z}}\ \ \{\mathrm{S}^* = [z_0] \oplus \mathrm{S}^*_{\bar{\mathrm{y}}}\}$$

dır, yani $\mathrm{S}\ \{\mathrm{S}^*\}$, $[y_0]$ ve $S_{\bar{z}}$ alt uzaylarının doğrudan toplamıdır.

(iv) Eğer S_1 $\{S_1^*\}$, S $\{S^*\}$ uzayının iki boyutlu bir alt uzayı ise, bu durumda

$$S_1 = S_{z_0} \quad \{S_1^* = S_{z_0}^*\}$$

olacak şekilde aşikâr olmayan bir $z_0 \in S^*$ $\{y_0 \in S\}$ çözüm vardır.

(v) Eğer i=1,2 olmak üzere $y_i \in S$ $\{z_i \in S^*\}$ ler S $\{S^*\}$ uzayının lineer bağımsız çözümleri ise,

$$S_{y_1}^* \cap S_{y_2}^* = [w(y_1, y_2)] \quad \{S_{z_1} \cap S_{z_2} = [w^*(z_1, z_2)]\}$$

dır.

(vi) Eğer ρ_0 $\{\rho_0^*\}$, S $\{S^*\}$ çözüm uzayının salınımsız bir çözümü ise, bu durumda $S_{\rho_0}^*$ $\{S_{\rho_0^*}\}$ uzayı ya salınımsızdır ya da güçlü salınımlıdır. Ayrıca $S_{\rho_0}^*$ $\{S_{\rho_0^*}\}$ uzayının güçlü salınımlı olması için gerek ve yeter şart her bir salınımsız $\rho \in S$ $\{\rho^* \in S^*\}$ çözümü için S_{ρ}^* $\{S_{\rho^*}\}$ uzayının güçlü salınımlı olmasıdır. Üstelik $S_{\rho_0}^*$ $\{S_{\rho_0^*}\}$ da salınımlı bir çözümün sıfırları basittir ve $S_{\rho_0}^*$ $\{S_{\rho_0^*}\}$ da lineer bağımsız çözümlerin sıfırları belli bir yerden sonra birbirini ayırır.

İspat: (i) Eğer $z_0 \in S_y^*$ ise, bu durumda Tanım 3.3 den

$$\{y, z_0\} = 0 \tag{3.18}$$

dır. Lemma 3.1 den

$$z_0 = w(y_1, y_2)$$

olacak şekilde $y_i \in S$ $(i=1,2)$ vardır. Sonuç olarak (3.11) ve (3.18) den

$$W=(y, y_1, y_2)=0$$

dır ve bazı reel λ, λ_1 ve λ_2 $\left(\lambda^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2>0\right)$ sayıları için $[d, \infty)$ yarı aralığında

$$\lambda y+\lambda_1 y+\lambda_2 y_2=0$$

dır. Eğer $\lambda_1=0$ ise, y aşikar olmayan bir çözüm olduğu için $\lambda_2 \neq 0$ dır. Buradan $\overline{y}=(\lambda/\lambda_1) y_1$ olmak üzere

$$z_0=w(y, \overline{y})$$

dır. Eğer $\lambda_1 \neq 0$ ise, $\overline{y}=-(\lambda/\lambda_1) y_2$ olmak üzere

$$z_0=w(y, \overline{y})$$

dır. Sonuç olarak ; eğer $\overline{y} \in S$ için $z_0=w(y, \overline{y})$ ise, (3.11) den

$$\{y;\ z_0\}=0$$

dır. Buradan $z_0 \in S_y^*$ dır. Diğer durum benzerdir.

(ii) $y \in S$ ve $z \in S^*$ olsun. Kabul edelim ki $k=0,1,2$ için $(-1)^k D_{2-k} y$ ve $D_k^* z$ nin $(k+1)$. bileşenleri Y ve Z, E^3 de iki vektör olsun. (3.5) den

$$\{y;\ z\}=\tilde{Y}^T Z,$$

$\tilde{Y}$ ve Z nin iç çarpımıdır. Eğer $t_0 \geq d$ ise, bu durumda S* uzayında

$$\{y;\ z_i\}(t_0)=\tilde{Y}^T(t_0) Z_i(t_0) \qquad (3.19)$$

olacak şekilde z_1 ve z_2 lineer bağımsız çözümleri vardır. Eğer y aşikar olmayan bir çözüm ise, bu durumda (3.19) u sağlayan, S* uzayında en fazla iki lineer bağımsız çözüm vardır.

$\{y; z\}$, $y \in \mathrm{S}$ ve $z \in \mathrm{S}^*$ için sabit olduğundan (ii) doğrudur. Diğer durumun ispatı benzerdir.

(iii) Kabul edelim ki $y_0 \in \mathrm{S}$ aşikar olmayan bir çözüm olsun. Bu durumda

$$\mathrm{S}^* / \mathrm{S}^*_{y_0}$$

cümlesi sadece S* ın aşikar olmayan çözümlerini içerir. (ii) den eğer $\bar{z} \in \mathrm{S}^* / \mathrm{S}^*_{y_0}$ ise, $\mathrm{S}_{\bar{z}}$ iki boyutlu bir alt uzaydır.

Hatta $\bar{z} \in \mathrm{S}^* / \mathrm{S}^*_{y_0}$ ise,

$$[\mathrm{y}_0] \cap \mathrm{S}_{\bar{z}}$$

sadece aşikar çözüm içerir. Sonuç olarak S, $[\mathrm{y}_0]$ ve $\mathrm{S}_{\bar{z}}$ alt uzaylarının direkt toplamıdır, yani;

$$\mathrm{S} = [\mathrm{y}_0] \oplus \mathrm{S}_{\bar{z}}, \quad \bar{z} \in \mathrm{S}^* / \mathrm{S}^*_{y_0}$$

dır. Diğer durumun ispatı benzerdir.

(iv) Kabul edelim ki S çözüm uzayının S_1 iki boyutlu alt uzayı, y_1 ve y_2 gibi iki lineer bağımsız çözüm içersin. $z_0 = \mathrm{w}(y_1, y_2)$ olsun. Eğer

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad \left(c_1^{\,2} + c_2^{\,2} \geq 0\right)$$

ise (3.11) den

$$\{y;\ z_0\} = \mathrm{W}=\left(c_1 y_1 + c_2 y_2, y_1, y_2\right) = 0$$

dır. Bu nedenle

$$\mathrm{S}_1 \subseteq \mathrm{S}_{z_0}$$

dır.Lemma 3.1 den z_0, S* da aşikar olmayan bir çözümdür. (ii) den S_{z_0}, S uzayının iki boyutlu bir alt uzayıdır ve

$$\mathrm{S}_1=\mathrm{S}_{z_0}$$

dır. Diğer durumun ispatı benzerdir.

(v) y_{i} $\left(\mathrm{i}=1,2\right)$, S de lineer bağımsız çözümler olsun.Tanım 3.3 ve (i) şartından, eğer

$$z_0 \in \mathrm{S}^*_{y_1} \cap \mathrm{S}^*_{y_2}$$

ise,

$$z_0 = \mathrm{w}\left(y_1, \overline{y}_1\right), \quad \text{bazı } \overline{y}_1 \in \mathrm{S} \text{ için} \tag{3.20}$$

$$\{y_2;\ z_0\} = 0 \tag{3.21}$$

dır. (3.11), (3.20) ve (3.21) den

$$\lambda_1 y_1 + \overline{\lambda}_1 \overline{\mathrm{y}}_1 + \lambda_2 y_2 = 0 \quad , \qquad \left[\mathrm{d}, \infty\right) \tag{3.22}$$

olacak şekilde λ_1, $\overline{\lambda_1}$ ve λ_2 $\left(\lambda^2+\overline{\lambda_1}^2+\lambda_2^2>0\right)$ sayıları vardır. y_1 ve y_2 lineer bağımsız, $\lambda_1 \neq 0$ olduğundan (3.20) ve (3.22) den

$$z_0 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathrm{w}\left(y_1, y_2\right)$$

dır. Buradan

$$\mathrm{S}^*_{y_1} \cap \mathrm{S}^*_{y_2} \subseteq \left[\mathrm{w}\left(y_1, y_2\right)\right]$$

dır. (i) şartından $\mathrm{w}\left(y_1, y_2\right) \in \mathrm{S}^*_{y_i}$ $\left(\mathrm{i}=1,2\right)$ olduğu için (v) şartı ispatlanmış olur.

(vi) Eğer ρ_0, S nin aşikar olmayan salınımsız bir çözümü ise, (3.17) den S* uzayının $\mathrm{S}^*_{\rho_0}$ alt uzayı

$$\left[\mathrm{R}_2\left(\rho_0\right)y'\right]' + \mathrm{Q}\left(\rho_0\right)y = 0 \qquad \left[\mathrm{e}, \infty\right) \tag{3.23}$$

ikinci mertebeden lineer diferensiyel denkleminin bir çözüm uzayıdır. Eğer ρ_0 ın $\mathrm{e} \geq \mathrm{d}$ için $\left[\mathrm{e}, \infty\right)$ yarı aralığında sıfırı yoksa, (3.23) denklemi ya güçlü salınımlı ya da salınımsız olduğundan , $\mathrm{S}^*_{\rho_0}$ ya güçlü salınımlıdır ya da salınımsızdır. Eğer (3.23) denklemi salınımlı ise, (3.23) denkleminin tüm çözümlerinin $\left[\mathrm{e}, \infty\right)$ yarı aralığında yalnız bir sıfırı vardır ve

$$\mathrm{R}_2\left(\rho_0\right) \neq 0 \quad , \quad \left[\mathrm{e}, \infty\right)$$

olduğundan, lineer bağımsız çözümlerin sıfırları birbirini ayırır.

Eğer ρ_1 ve ρ_2, S de lineer bağımsız çözümler ise, bu durumda (v) şartından

$$\mathrm{w}\left(\rho_1,\rho_2\right)\in \mathrm{S}^*_{\rho_1}\cap \mathrm{S}^*_{\rho_2}$$

dır. Böylece $\mathrm{S}^*_{\rho_1}$ ın güçlü salınımlı olması için gerek ve yeter şart $\mathrm{S}^*_{\rho_2}$ nın güçlü salınımlı olmasıdır. Diğer durumun ispatı benzerdir.

Tanım 3.3 den; eğer $y\in \mathrm{S}$ $\left\{z\in \mathrm{S}^*\right\}$ ise, bu durumda $\overline{y}\in \mathrm{S}_z$ $\left\{\overline{z}\in \mathrm{S}^*_y\right\}$ olması için gerek ve yeter şart $z\in \mathrm{S}^*_{\overline{y}}$ $\left\{y\in \mathrm{S}_{\overline{z}}\right\}$ olmasıdır. Eğer y $\left\{z\right\}$, S $\left\{\mathrm{S}^*\right\}$ uzayının aşikar olmayan bir çözümü ise, Tanım 3.3 ve Lemma 3.2 nin (v) sartından.

$$\begin{aligned}&\mathrm{w}:\mathrm{S}_z\times \mathrm{S}_z\to\left[z\right]\\&\left\{\mathrm{w}^*:\mathrm{S}^*_y\times \mathrm{S}^*_y\to\left[y\right]\right\}\end{aligned}\qquad(3.24)$$

dır.Sonuç olarak (3.24) den, eğer S_z $\left\{\mathrm{S}^*_z\right\}$ zayıf salınımlı ise, z $\left\{y\right\}$ salınımlıdır. Bu nedenle, eğer S $\left\{\mathrm{S}^*\right\}$ uzayının her iki boyutlu alt uzayı zayıf salınımlı ise, S* $\left\{\mathrm{S}\right\}$ güçlü salınımlıdır.

Teorem 3.1. Eğer (3.1) {(3.1)*} denklemi zayıf salınımlı ise, bu durumda (3.1)* {(3.1)} denklemi salınımlıdır.

İspat : Zayıf salınımlılık tanımı gereğince bir $\rho\in \mathrm{S}$ salınımsız çözümü vardır ve (3.16) dan H_ρ uzayı salınımlı olmalıdır. Kabul edelim ki u,H_ρ da salınımlı bir çözüm olsun. Bu durumda (3.13), (3.17) ve Tanım 3.3. den

$$\rho^2u'\in \mathrm{S}^*_\rho\subseteq \mathrm{S}^*$$

dır. Sonuç olarak S* salınımlıdır ve (3.1)* salınımlıdır. Diğer durumun ispatı benzerdir.

Eğer ρ, S zayıf salınımlı çözüm uzayının salınımsız bir çözümü ise, Lemma 3.2. deki (vi) şartından S_ρ^* uzayı, S* uzayının güçlü salınımlı iki boyutlu bir alt uzayıdır. Sonuç olarak, yeterince büyük her bir $t \geq \mathrm{d}$ değeri için (3.1)* denkleminin $[t, \infty)$ yarı aralığında en az üç sıfıra sahip olan bir çözümü vardır.

Teorem 3.1. den Sonuç 3.1. Eğer (3.1) {(3.1)*} denklemi zayıf salınımlı ise, S $\{\mathrm{S}^*\}$ uzayının güçlü salınımlı iki boyutlu bir alt uzayı vardır ve (3.1) ve (3.1)* denklemleri $t \geq \mathrm{a}$ için $[t, \infty)$ yarı aralığında diskonjuge değildir.

Teorem 3.1. den Sonuç 3.2. Eğer (3.1) {(3.1)*} salınımsız ise, (3.1)* {(3.1)} denklemi salınımsız ya da güçlü salınımlıdır.

Teorem 3.2. Eğer S $\{\mathrm{S}^*\}$ uzayının iki boyutlu salınımsız bir alt uzayı varsa, bu durumda S* $\{\mathrm{S}\}$ ya salınımsızdır ya da güçlü salınımlıdır ve eğer i=1,2 için $z_\mathrm{i}\ \{y_\mathrm{i}\}$, S* $\{\mathrm{S}\}$ uzayının lineer bağımsız çözümleri ise, bu taktirde $z_1\ \{y_1\}$, $\mathrm{I} \subseteq [t, \infty)$ aralığında üç sıfıra sahip ise, bu durumda $z_2\ \{y_2\}$, I üzerinde en az bir sıfıra sahip olacak şekilde bir $t_0 \geq \mathrm{a}$ sayısı vardır.

İspat : Kabul edelim ki S_1, S uzayının iki boyutlu salınımsız bir alt uzayı olsun. Bu durumda Lemma 3.2. nin (iv) şartından

$$\mathrm{S}_1 = \mathrm{S}_{z_0}$$

olacak şekilde $z_0 \in \mathrm{S}^*$ vardır.

Kabul edelim ki i=1,2 için $y_\mathrm{i} \in \mathrm{S}_1$ olsun. Eğer $z \in \mathrm{S}^*$ ise

$$\{c_1 y_1 + c_2 y_2;\ z\} = 0 \qquad c_1^{\,2} + c_2^{\,2} > 0$$

olacak şekilde i=1,2 için c_i sayıları vardır.

Tanım 3.3. den

$$\overline{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2 \in S_1$$

olmak üzere

$$z \in S^*_{\overline{y}}$$

dir. Sonuç olarak

$$S^* = \bigcup_{\overline{y} \in S_1} S^*_{\overline{y}}$$

olduğundan Lemma 3.2 deki (vi) şartından S* uzayının salınımsız veya güçlü salınımlı olması, z_0 ın salınımsız veya salınımlı olmasına bağlıdır.

Eğer S* güçlü salınımlı ise, i=1,2 olmak üzere z_i, S* uzayının lineer bağımsız çözümleri ve i=1,2 için $\overline{y}_i \in S$ olmak üzere $z_i \in S^*_{\overline{y}}$ ise, Lemma 3.2 in (v) şartından

$$w(\overline{y}_1, \overline{y}_2) \in S^*_{\overline{y}_1} \cap S^*_{\overline{y}_2}$$

olduğundan Lemma 3.2 nin (vi) şartından $w(\overline{y}_1, \overline{y}_2)$ çözümünün sıfırları, y_1 ve y_2 çözümünün sıfırlarını ayırır. Böylece ispat tamamlanmış olur. Diğer durum için ispat benzerdir.

Ayrıca, (3.1) denkleminin güçlü salınımlı olması için a, b ve c katsayı fonksiyonları dikkate alındığında, doğruluğu kolaylıkla gösterilebilir yeterli şartlar elde edilmiştir [2].

(3.1) denkleminin her iki tarafını $\exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right)$ ile çarpalım.

$$\exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right)y''' + \exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right)a(t)\,y'' + \exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right)b(t)\,y'$$

$$+\exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right)c(t)\,y = 0$$

$$\left[\exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right)y''\right]' + \exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right)b(t)\,y' + \exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right)c(t)\,y = 0$$

ve buna göre (3.1) denklemi

$$\left(r(t)\,y''\right)' + q(t)\,y' + p(t)\,y = 0$$

şeklinde yazılabilir. Burada $r(t) = \exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right)$, $q(t) = b(t)r(t)$ ve $p(t) = c(t)r(t)$ dir.

Kabul edelim ki

$$a(t) \le 0,\ b(t) \ge 0\ ,\ c(t) < 0\ , \qquad t > 0 \tag{3.25}$$

ve

$$\begin{cases} \text{ikinci mertebeden homogen denklem} \\ \left(r(t)\,z'\right)' + q(t)\,z = 0 \\ \text{salınımsız} \end{cases} \tag{3.26}$$

olsun.

Uyarı 3.1. $p(t)<0$, $q(t)\geq 0$, $r(t)>0$, $r'\leq 0$ ise, buradan

$$\int_0^{\infty}\frac{dt}{r(t)}=\infty$$

dır. (3.26) ve Teorem 2.6 (Leighton) salınım kriterinden görüldüğü gibi

$$\int_0^{\infty}q(t)dt<\infty$$

elde ederiz.

Burada Keener [19] dan faydalanarak aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Teorem 3.3. (3.26) sağlanıyor ise, f fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığında reel değerli sürekli, $f(t)\geq 0$, $t>0$ olmak üzere

$$\left(r(t)z'\right)'+q(t)z=f(t)$$

denkleminin bütün çözümleri salınımsızdır.

Lemma 3.3. Kabul edelim ki (3.25) ve (3.26) sağlansın. Eğer $y(t)$, (3.1) denkleminin salınımsız bir çözümü ise, bu durumda yeterince büyük t ler için $y(t).y'(t)>0$ dır.

İspat : Genelliği bozmadan kabul edelim ki $t\geq t_0>0$ için $y(t)>0$ olsun.

$$\left(r(t)z'\right)'+q(t)z=-p(t)y(t),\qquad t\geq t_0$$

denkleminin bir çözümü $y'(t)$ olduğundan Teorem 3.3 den $t \geq t_1 \geq t_0$ için $y'(t) > 0$ ya da $y'(t) < 0$ dır. Eğer mümkünse $t \geq t_1$ için $y'(t) < 0$ olsun, $t \geq t_1$ için $\left(r(t)y''(t)\right)' > 0$ olduğundan $t \geq t_2 \geq t_1$ için $y''(t) > 0$ veya $y''(t) < 0$ dır. Bununla birlikte $t \geq t_2$ için $y''(t) < 0$ olması yeterince büyük t ler için $y(t) < 0$ olmasını gerektirir ki bu da bir çelişkidir. Böylelikle $t \geq t_2$ için $y''(t) > 0$ dır. Buradan (3.1) denkleminden, yeterince büyük t ler için $y'''(t) > 0$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak yeterince büyük t ler için $y'(t) > 0$ dır. Bu da bizim kabulümüz olan $t \geq t_1$ için $y'(t) < 0$ ile çelişir. Böylece $t \geq t_1$ için $y'(t) > 0$ dır. Lemma 3.3 ün ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.4. Kabul edelim ki (3.25) ve (3.26) sağlansın. Eğer

$$\begin{cases} (\mathrm{i}) -\infty < \liminf_{t\to\infty} a(t) \leq 0 \\ (\mathrm{ii}) \dfrac{1}{3}a^2(t) - b(t) + a'(t) > 0 \\ (\mathrm{iii}) \displaystyle\int_{\sigma}^{\infty} \left[\frac{2a^3(t)}{27} - \frac{a(t)b(t)}{3} + \frac{a(t)a'(t)}{3} + c(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{a^2(t)}{3} - b(t) + a'(t) \right)^{3/2} \right] dt = \infty, \quad \sigma > 0 \end{cases} \tag{3.27}$$

ise, bu durumda (3.1) denklemi güçlü salınımlıdır.

İspat: Eğer mümkünse $y(t)$, (3.1) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Lemma 3.3 den $t \geq t_0 > 0$ için $y(t).y'(t) > 0$ dır. $t \geq t_0$ için $z(t) = y'(t)/y(t)$, ikinci mertebeden Riccati denkleminin pozitif çözümüdür yani,

$$y'(t) = z(t)y(t)$$
$$y''(t) = z'(t)y(t) + z^2(t)y(t)$$
$$y'''(t) = z''(t)y(t) + 3z'(t)z(t)y(t) + z^3(t)y(t)$$

türevleri (3.1) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$u''+3uu'+a(t)u'=-\left[z^3(t)+a(t)z^2(t)+b(t)z(t)+c(t)\right] \tag{3.28}$$

şeklinde ikinci mertebeden Riccati denklemi elde edilir.

(3.28) denklemi t_0 dan t ye $(t>t_0)$ integre edilirse,

$$\int_{t_0}^{t}\left[u''+3uu'+a(s)u'\right]ds=-\int_{t_0}^{t}\left[z^3(s)+a(s)z^2(s)+b(s)z(s)+c(s)\right]ds$$

$$\int_{t_0}^{t}\left[u''+3uu'+a(s)u'+a'(s)u-a'(s)u\right]ds=-\int_{t_0}^{t}\left[z^3(s)+a(s)z^2(s)+b(s)z(s)+c(s)\right]ds$$

$$\int_{t_0}^{t}\left[u''+3uu'+\left(a(s)u\right)'-a'(s)u\right]ds=-\int_{t_0}^{t}\left[z^3(s)+a(s)z^2(s)+b(s)z(s)+c(s)\right]ds$$

$$\left(u'+\frac{3}{2}u^2+a(s)u\right)\Big|_{t_0}^{t}-\int_{t_0}^{t}a'(s)uds=-\int_{t_0}^{t}\left[z^3(s)+a(s)z^2(s)+b(s)z(s)+c(s)\right]ds$$

$$\begin{aligned}z'(t)=z'(t_0)+\frac{3}{2}z^2(t_0)+a(t_0)z(t_0)-\frac{3}{2}z^2(t)-a(t)z(t)\\ -\int_{t_0}^{t}\left[z^3(s)+a(s)z^2(s)+\left(b(s)-a'(s)\right)z(s)+c(s)\right]ds\end{aligned} \tag{3.29}$$

bulunur.

Eğer

$$\mathrm{H}\left(z(t)\right)=z^3(t)+a(t)z^2(t)+\left(b(t)-a'(t)\right)z(t)+c(t)$$

şeklinde alınır ise,

$$\mathrm{H}'\left(z(t)\right)=3z^2(t)+2a(t)z(t)+\left(b(t)-a'(t)\right)$$

olduğundan $\mathrm{H}\left(z(t)\right)$,

$$z(t)=\frac{1}{3}\left[-a(t)+\left(a^2(t)-3b(t)+3a'(t)\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

olmak üzere $z(t)>0$ için onun minimum değerine ulaşır ve minimum değeri

$$\frac{2}{27}a^3(t)-\frac{1}{3}a(t)b(t)+\frac{1}{3}a(t)a'(t)+c(t)-\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a^2(t)}{3}-b(t)+a'(t)\right)^{\frac{3}{2}}$$

şeklindedir. Üstelik

$$\mathrm{F}\left(z(t)\right)=\frac{3}{2}z^2(t)+a(t)z(t)$$

şeklinde alınır ise,

$$\mathrm{F}'\left(z(t)\right)=z(t)+a(t)$$

olduğundan $\mathrm{F}\left(z(t)\right)$, $z(t)=-a(t)/3$ de $z(t)>0$ için minimum değerine ulaşır ve minimum değeri $-a^2(t)/b$ dir. Böylece (3.29) dan

$$z'(t)\le z'(t_0)+\frac{3}{2}z^2(t_0)+a(t_0)z(t_0)+\frac{a^2(t)}{6}$$
$$-\int_{t_0}^{t}\left[\frac{2}{27}a^3(s)-\frac{a(s)b(s)}{3}+\frac{a(s)a'(s)}{3}+c(s)-\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a^2(s)}{3}-b(s)+a'(s)\right)^{\frac{3}{2}}\right]dt$$

elde edilir. (3.27) den $\lim_{t\to\infty} z'(t) = -\infty$ dır. Buradan yeterince büyük t ler için $z(t) < 0$ dır. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla teoremin ispatı tamamlanır.

Uyarı 3.2. Teorem 3.4 Euler denklemi için sağlanmaz.

$$y''' + \frac{a_0}{t} y'' + \frac{b_0}{t^2} y' + \frac{c_0}{t^3} y = 0$$

burada $a_0 < 0$, $b_0 > 0$, $c_0 < 0$ dır. Çünkü (3.27) in (iii) şartı sağlanmaz.

Aşağıdaki teorem, Teorem 2.7 (Potter) den dolayı verilebilir.

Teorem 3.5. Kabul edelim ki r ve $q \in \mathrm{C}^1((0,\infty), \mathrm{R})$, $(0,\infty)$ aralığında r pozitif ve q negatif olsun ve de

$$\int_1^\infty \frac{dt}{r(t)} = \infty$$

olsun. Eğer $\mathrm{L} = \lim_{t\to\infty} r(t)\left\{\left[r(t)q(t)\right]^{-1/2}\right\}'$ var ve $\mathrm{L} > 2$ ise, bu durumda (3.26) salınımsızdır.

Uyarı 3.3. Teorem 3.4, $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$ olacak şekildeki üçüncü mertebeden sabit katsayılı (2.17) denklemi için sağlanmaz. Çünkü

$$\mathrm{L} = \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{at}\left\{\left[\mathrm{e}^{2at} b\right]^{-1/2}\right\}' > 2$$

şartı ancak ve ancak $a^2 > 4b$ olması durumunda sağlanır.

Üstelik

$$\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}-\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a^2}{3}-b\right)^{3/2}>0$$

şartı ancak ve ancak $a^2<4b$ iken sağlanır. Buradan (3.27) in (iii) şartı ve $L>2$ olması durumu aynı zamanda sağlanmaz.

Örnek 3.1. $$y'''-y''+\left(\frac{1}{4.0000004}+\frac{1}{t}\right)y'-\frac{k}{t^2}y=0, \qquad t\geq 12 \qquad (3.30)$$

$k>0$ olacak şekilde bir sabittir. Bu durumda $L=2.0000001>2$ dir. Buradan Teorem 3.5 den (3.26) sağlanır. Hesaplarsak

$$\frac{2a^3(t)}{27}-\frac{a(t)b(t)}{3}+\frac{a(t)a'(t)}{3}+c(t)-\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a^2(t)}{3}-b(t)+a'(t)\right)^{3/2}$$

$$=0{,}00000005+\frac{1}{3t}+\frac{0{,}1666664}{t}+\ldots-\frac{k}{t^2}$$

ve

$$\frac{a^2(t)}{3}-b(t)+a'(t)=\frac{1.0000004}{12.000001}-\frac{1}{t}>0\ , \qquad t\geq 12 \text{ için}$$

dır. Böylece (3.27) sağlanır. Teorem 3.4 den (3.30) denklemi güçlü salınımlıdır.

KAYNAKLAR

1. Dolan, J. M., On The Relationship Between The Oscillatory Behaviour of a Linear Third Order Differential Equation and Its Adjoint, J. Differential Equations 7, 367-388, 1970.

2. Parhi, N. And Padhi S., On Oscillatory Linear Differential Equations of Third Order, Archivum Mathematicum (BRNO) Tomus 37, 33-38, 2001.

3. Nohel, F., Ordinary Differential Equation, W. A. Benjamin Inc, New York, 1966.

4. Ross, S. L., Diferential Equations, John Wiley&Sons, New York, 1984.

5. Rao, R. M., Ordinary Differential Equations, Edward Arnold Limited, London, 1980.

6. Swanson, C. A., Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations, Academic Press, New York, London, 1968.

7. Gregušš, M., On Some New Properties of Solutions of The Differential Equation $y''' + Qy' + Q'y = 0$, Spisy Prır. fak. MU (Brno), 365, 1-18, 1955.

8. Hanan, M., Oscillation Criteria for Third Order Linear Differential Equations, Pasific J. Math, 11, 919-944, 1961.

9. Sansone, G., Studi Sulle Equazioni Differenziali Lineari Omogenee di Terzo Ordine Nel Campo Reale, Revista Mat. Fis. Teorica (Tucuman) 6, 195-253, 1948.

10. Mammana, G., Decomposizione Delle Espressioni Differenziali Lineari Omogenee in Prodotti di Fattori Simbolici e Applicazione Rellativa Allo Studio Delle Equozioni Differenziali Lineari, Math. 2. 33, 186-231, 1931.

11. Kondart'ev V.A., On The Oscillation of Solutions of Linear Differential Equations of The Third and Fourth Order. Dokl Akad. Nauk SSSR [N.S] 118, 22-24, 1958.

12. Birkhoff, G. D., On Solutions of Ordinary Linear Homogeneous Differential Equations of The Third Order. Ann. of Math. 12, 103-127, 1911.

13. Lazer, A. C., The Behavior of Solutions of Differential Equation $y''' + p(x)y' + q(x)y = 0$, Pasific J. Math. 17, 435-466, 1966.

14. Azbelev, N. V and Caljuk, Z. B, On The Question of Distribution of Zeros of Solutions of Linear Differential Equations of The Third Order, Trans. Am. Math. Soc. 42, 233-245, 1964.

15. Barret, J. H., Oscillation Theory of Ordinary Linear Differential Equations, Associated Western Üniversities Differential Equations Symposium, Boulder, Colorado, 1967.

16. Barret, J. H., Canoncial Forms for Third-Order Linear Differential Equations, Ann. Matematics appl. LXV, 253-274, 1964.

17. Zlamal, M., Asymptotic Properties of Solutions of The Third Order Linear Differential Equations, Publ. Faculte Sci. Univ. Masaryk 6, 159-167, 1951.

18. Hartman, P., Ordinary Differential Equations, Wiley, New York, 1964.

19. Keener, M. S., On The Solutions of Certain Linear Nonhomogeneous Second Order Differential Equations, Appl. Anal. 1, 57-63, 1971.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Hülya HASKARA
Baba Adı : Recep
Ana Adı : Hayriye
Doğum Yeri : Kayseri
Doğum Tarihi : 28.01.1979

İlk ve orta öğrenimini Kayseri'de tamamladı. Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden lisans diploması alarak 2002 yılında mezun oldu. Aynı yıl Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2004-2005 eğitim öğretim yılında Ahmet Kirazgiller İlk Öğretim Okulunda matematik öğretmenliği yaptı.

İLETİŞİM BİLGİLERİ :

Adres : Alpaslan Mah. Farabi Cad. Nihan Apt. 13/18.
Melikgazi/KAYSERİ

e-posta : hhaskara@yahoo.com.

GSM : 0 533 453 35 96