T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ HORTUM YÜZEYLERİ ÜZERİNE

Tezi Hazırlayan
Mustafa KÜKCÜ

Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. Nural YÜKSEL

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Ağustos 2007
KAYSERİ

Yrd. Doç. Dr. Nural YÜKSEL danışmanlığında **Mustafa KÜKCÜ** tarafından hazırlanan**"Genelleştirilmiş Hortum Yüzeyleri Üzerine"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

15 /08 /2007

JÜRİ:

Başkan: Prof. Dr. Mehmet ÖZDEMİR

Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nural YÜKSEL

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 07/09/2007 tarih ve 2007/30-05 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

11.../09./2007

Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında; çok değerli bilgi ve deneyimleri ile bana yol gösteren, her zaman ve her konuda en büyük desteği gördüğüm, saygıdeğer hocalarım Sayın Prof. Dr. Mehmet ÖZDEMİR'e, Sayın Yrd. Doç. Dr. Nural YÜKSEL'e ve Sayın Dr. Murat Kemal KARACAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bugünlere gelmemde, maddi ve manevi hiçbir fedakarlıktan çekinmeyen aileme ve tez yazımında yardımlarını esirgemeyen eşim Reyhan ÇETİN KÜKCÜ'ye teşekkürü bir borç bilirim.

GENELLEŞTİRİLMİŞ HORTUM YÜZEYLERİ ÜZERİNE

Mustafa KÜKCÜ
Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Temmuz 2007
Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Nural YÜKSEL

ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde,tezin içeriği ile ilgili giriş yapıldı.

İkinci bölümde, bir Lie grubunun Lie cebiri, dönmeler,transformasyon grupları ve üstel dönüşümler hakkında temel tanımlar ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, genelleştirilmiş hortum yüzeylerinin karakterizasyonu ve iki parametreli hareket incelendi.

Dördüncü bölümde ise, genelleştirilmiş hortumların analizi yapılarak şekil operatörü, asli eğrilikler, Gauss eğriliği, eğrilik çizgisi ve geodezikler hakkında tanımlar ve teoremler ifade ve ispat edildi.

Anahtar Kelimeler : Hortum, hortum yüzeyi, eğrilik çizgisi, geodezik, transformasyon, üstel dönüşüm.

ON GENERALİZED TUBE SURFACES

Mustafa KÜKCÜ
Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M. Sc. Thesis, July 2007
Thesis Supervisor : Assist. Prof. Dr. Nural YÜKSEL

ABSTRACT

This study consists of four chapters. In the first chapter, the introduction is given dealing with the content of the thesis.

In the second chapter, basic definitions and theorems about Lie algebra of a Lie group, rotations, transformation groups and exponential transformations are given.

In the third chapter, the characterization of generalized tube surfaces is examined.

In the fourth chapter, generalized tubes are analyzed, the definitions and theorems about shape operator, essential curvatures, Gauss curvature, curvature line ve geodesics are stated and proved.

Keywords : Tube, tube surface, curvature line, geodesic, transformation, exponential transformation.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY…..…….....i

TEŞEKKÜR……..ii

ÖZET……iii

ABSTRACT……iv

SİMGELER LİSTESİ……...vi

1. BÖLÜM

Giriş..……1

2. BÖLÜM

2.1. Temel Kavramlar……..……...……...……2

2.2. Bir Lie Grubunun Lie Cebiri…….....6

2.3. Dönmeler ve Ortogonal Matrisler…….13

2.4. Transformasyon Grupları ve Lıe Grup Etkisi……...21

2.5. Üstel Dönüşüm…….24

3. BÖLÜM

Genelleştirilmiş Hortum Yüzeyinin Karakterizasyonu …….....37

4. BÖLÜM

4.1. Genelleştirilmiş Hortumların Analizi ……...….....44

4.2. Genelleştirilmiş Hortum Yüzeyinin Özellikleri ……..…49

4.3. ZGT'lerin Özellikleri……...52

KAYNAKLAR…….... 56

ÖZGEÇMİŞ……..... 58

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar cümlesi
E^n	:	Öklid uzayı
$T_p(M)$	:	p noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi
k_i	:	i-inci eğrilik fonksiyonu
LG	:	G Lie grubunun Lie cebiri
O(n)	:	Ortogonal matrislerin cümlesi
Rot(0)	:	E^3 ün 0 noktası etrafındaki bir dönmesi
GT	:	Genelleştirilmiş hortum
CGT	:	Dairesel çapraz kesişimli GT
ZGT	:	Kıvrımsız eksenli GT

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Bu çalışmada ilk olarak Öklid geometrisi ile ilgili temel tanım ve teoremler verilerek, bir Lie grubunun Lie cebiri iki metodla elde edildi.

Ayrıca G Lie grubunun üstel dönüşümü tanımlanarak bunlarla ilgili tanım ve teoremler ifade ve ispat edildi.

Son olarak E^3 ün $E^{3\,'}$ ye göre iki parametreli uzay hareketi tanımlanarak α eğrisi boyunca genelleştirilmiş hortum yüzeyinin parametrik denklemi elde edildi.

$$\Gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^3$$

$\mathbb{R}^3$ de bir eğri olmak üzere Γ eksenli bir genelleştirilmiş hortum yüzeyi

$$X(s,t) = \Gamma(s) + u(t).(\cos t\, \vec{n} + \sin t\, \vec{b}) \;,\; 0 \le t \le 2\pi$$

şeklinde tanımlanarak, genelleştirilmiş hortum yüzeyinin analizi yapıldı ve özellikleri incelendi.

2. BÖLÜM

2.1. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1.1 (Topolojik Manifold). M bir Hausdorff uzayı olsun.M nin her bir açık alt cümlesi E^n in bir açık alt cümlesine homeomorf ve sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebiliyorsa, M ye n-boyutlu topolojik manifold denir [1].

Tanım 2.1.2 (Harita). Topolojik M manifoldunun boş cümleden farklı bir U açık alt cümlesinden E^n in boş cümleden farklı bir V açık alt cümlesine bir

$$\Psi:U \to V$$

homeomorfizmi mevcut ise, (Ψ,U) ikilisine M de bir harita denir [1].

Tanım 2.1.3 (Atlas). M, n-boyutlu bir topolojik manifold, I da indis cümlesi olsun. $U_\alpha \subset M$ açık alt cümlelerinin $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ailesi M nin bir örtüsü olsun. Her bir U_α dan E^n nin bir V_α açık alt cümlesine bir homeomorfizm,

$$\Psi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$$

olsun. Bu şekilde elde edilen (Ψ_α, U_α) haritalarının

$$S=\{(\Psi_\alpha, U_\alpha) \mid \Psi_\alpha : U_\alpha \subset M \to E^n, \alpha \in I\}$$

ailesine M nin bir atlası denir [1].

Tanım 2.1.4 (C^k **-Sınıfından Diferensiyellenebilir Atlas).** n-boyutlu topolojik M manifoldunun bir atlası

$$S=\{(\Psi_\alpha, U_\alpha) \mid \Psi_\alpha : U_\alpha \subset M \to E^n, \alpha \in I\}$$

olsun.

$$\Psi_\alpha(U_\alpha) \cap \Psi_\beta(U_\beta) \neq \varnothing$$

olacak şekildeki her $(\alpha,\beta) \in [X]$ için $\varnothing_{\alpha\beta} = \Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1}$ ve $\varnothing_{\beta\alpha} = \Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1}$ fonksiyonları $k \in N$ için C^k **-**sınıfından ise S atlasına C^k **-**sınıfından diferensiyellenebilir atlas denir [1].

Tanım 2.1.5 (Diferensiyellenebilir Manifold). Bir n-boyutlu topolojik M manifoldunun atlası, C^k sınıfından diferensiyellenebilir ise M ye C^k **-**sınıfından n-boyutlu *diferensiyellenebilir manifold* denir [1].

C^k **-**sınıfından diferensiyellenebilir bir M manifoldunun bir $p \in M$ noktasının komşuluğunda tanımlı, reel değerli, C^∞-sınıfından diferensiyellenbilir fonksiyonların cümlesi $C^\infty(M,\mathbb{R})$ cebirindeki cebir işlemi $f:M \to \mathbb{R}$ ve $g: M \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f.g: M \to \mathbb{R}$$
$$x \to (f.g)(x)=f(x).g(x)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonların çarpım işlemidir.

Tanım 2.1.6 (Tanjant Vektör). Bir

$$X_p : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ p \in M$$

dönüşümü; $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $\forall f,g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ ve $p \in M$ için

(i) $\quad X_p[af+bg] = aX_p[f] + bX_p[g]$

(ii) $\quad X_p[f.g] = X_p[f]g(p) + f(p)X_p[g]$

şartlarını sağlıyorsa, X_p fonksiyonuna M nin p noktasında bir tanjant vektörü denir [2].

C^∞-sınıfından diferensiyellenbilir M manifoldunun tanjant vektörlerinin cümlesi $T_p(M)$ ile gösterilir. $T_p(M)$ cümlesi fonksiyonların toplamı ve bir fonksiyonun bir skalerle çarpma işlemleriyle birlikte bir reel vektör uzayıdır.

Tanım 2.1.7 (Tanjant Demeti). n-boyutlu, C^∞-sınıfından diferensiyellenbilir bir M manifoldunun bir $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı $T_p(M)$ ise, M nin bütün p noktalarındaki tanjant uzaylarının ayrık birleşimleri olan

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p(M)$$

cümlesine M manifoldunun tanjant demeti denir [1].

Tanım 2.1.8 (Vektör Alanı). M bir manifold, $p \in M$ ve p yi ihtiva eden bir açık alt cümle $U \subseteq M$ olsun. U üzerinde tanımlı

$$X: U \to \bigcup_{p \in U} T_p(U)$$

fonksiyonu için,

$$\Pi \circ X = I_u$$

ise X fonksiyonuna U üzerinde bir vektör alanı denir [1].

M manifoldu üzerindeki bütün vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ olmak üzere $\chi(M)$, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerindeki fonksiyonlar için toplama ve skaler ile çarpma işlemleriyle birlikte bir reel vektör uzayıdır [1].

Tanım 2.1.9 (E^n de Serret-Frenet Çatı Alanları Sistemi). $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda $\{\alpha', \alpha'', ..., \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}$, k>r için;

$\alpha^{(k)} \in S_p\{\alpha', \alpha'', ..., \alpha^{(r)}\}$ olmak üzere $\{\alpha', \alpha'', ..., \alpha^{(r)}\}$ den elde edilen $\{V_1, V_2, ..., V_r\}$ ortonormal sistemine M eğrisinin Serret-Frenet r-ayaklı alanı ve $m \in M$ için $\{V_1(m), V_2(m), ..., V_r(m)\}$ sistemine de m noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı denir. Buradaki V_i (i=1,2,…,r) lere ise Frenet Vektörleri denir.

Tanım 2.1.10 (E^n de Bir Eğrinin i-inci Eğriliği). E^n de bir

$$\alpha: I \to E^n$$

eğrisinin Frenet çatı alanları sistemi $\{V_1, V_2, ..., V_n\}$ olsun. Bu durumda $1 \le i \le n$ için,

$$k_i : I \to \mathbb{R}$$

$$s \to k_i(s), s \in I$$

$$k_i(s) = < V_i'(s), V_{i+1}(s) >$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna α eğrisinin i-inci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I \subset \mathbb{R}$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında α nın i-inci eğriliği denir [1].

Burada

$$V_i'(s) = D_{V_i(s)} V_i(s)$$

dir.

Tanım 2.1.11 (Frenet Formülleri). E^n de bir

$$\alpha: I \to E^n$$

eğrisi yay parametresi ile verilmiş olsun. α nın i-inci eğrilik fonksiyonu k_i ve Frenet Çatı alanları sistemi

$$\{ V_1, V_2, ..., V_n \}$$

olmak üzere $1 \leq i \leq n$ için

$$D_{V_i} V_i = V_i'$$

$$= -k_{i-1} V_{i-1} + k_i V_{i+1}, \qquad (k_0 = k_n = 0)$$

formüllerine Frenet formülleri denir [1].

n=3 özel halinde Frenet formüllerini matrislerle

$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu halde, 1-inci eğrilik olan $k_1(s) = \kappa$ değeri sadece eğrilik adıyla ve 2-inci eğrilik olan $k_2(s) = \tau$ değeri de burulma adıyla bilinir.

2.2. Bir Lie Grubunun Lie Cebiri

Tanım 2.2.1 (Lie Grubu). Bir değişmeli $(G, \odot)$ grubu, diferensiyellenebilir manifold yapısına sahip ve

$$\odot : G \times G \to G$$

$$(g_1, g_2) \to g_1 \odot g_2$$

grup işlemi diferensiyellenebilir ise G cümlesine bir Lie Grubu denir [3].

Tanım 2.2.2 (Lie Alt Grubu). G bir Lie grubu, H da G nin bir alt cümlesi olsun. Eğer, H bir diferensiyellenebilir manifold ve G nin bir alt grubu ise, H ya G nin bir Lie grubu denir [3].

Tanım 2.2.3 (Sağ ve Sol Ötelemeler). $(G,\odot)$ bir Lie grubu ve $a\in G$ olsun. Bir $g\in G$ için

$$L_a:G\to G$$

$$g\to L_a(g)=a\odot g$$

ve

$$R_a:G\to G$$

$$g\to R_a(g)=g\odot a$$

dönüşümlerine, sırası ile $a\in G$ tarafından tanımlanan sol ve sağ öteleme denir [3].

L_a ve R_a fonksiyonları 1:1 ve örten fonksiyonlardır ve L_a ve R_a fonksiyonlarının inversleri; $a\in G$ nin inversi a^{-1} olmak üzere

$$(L_a)^{-1}=L_{a-1},(R_a)^{-1}=R_{a-1}$$

dir.

Tanım 2.2.4 (Sol İnvaryant Vektör Alanı). Bir G Lie grubu üzerindeki bir X vektör alanı sol ötelemeler altında invaryant ise X'e sol invaryant vektör alanı denir [3].

Bir vektör alanının sol invaryant olup olmadığını aşağıdaki teorem yardımıyla tespit edebiliriz.

Teorem 2.2.5. Bir G Lie grubu üstündeki bir X vektör alanı için;

$$X \text{ sol invaryanttır} \Leftrightarrow X(a.g)=(L_a)_*(X(g)); \qquad \forall a,g\in G$$

önermesi doğrudur [3].

G üzerindeki sol invaryant vektör alanının cümlesi LG ile gösterilsin. LG üzerinde bir Lie cebir yapısı inşa edilebilir.

Teorem 2.2.6. $(G,\odot)$ grubunun birim elemanı e olmak üzere

$$\zeta : LG \to T_e(G)$$

$$X \to \zeta(x) = X_e; \quad X \in LG, \quad e \in G$$

fonksiyonu bir izomorfizmdir [3].

Tanım 2.2.7. $(T_e(G),[,])$ Lie cebirine G Lie grubunun Lie cebiri denir ve LG ile gösterilir.

$T_e(G)$ uzayının bir bazı $\{V_1, V_2, ..., V_n\}$ ise,

$$x_r : g \to Lg_*(v_r), \qquad 1 \le r \le n$$

ile tanımlı x_r vektör alanları G üzerinde sol invaryant vektör alanları olup, $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ sistemi LG için bazdır. LG üzerindeki çarpım,

$$\left[x_i, x_j\right] = \sum c_{ij}^{\ h} x_h \quad , \quad (i,j,h=1,2,...,n)$$

ile verilsin. $c_{ij}^{\ h}$ sabitine G nin yapı sabitleri denir. Böylece, LG üzerindeki bir çarpım;

$$\left[v_i, v_j\right] = \sum_{i,j,h} c_{ij}^{\ h} x_h \quad , \quad (i,j,h=1,2,...,n)$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.8 (Bir Lie Grubunun Lie Cebirinin Elde Edilişi).

Bir G Lie grubunun Lie cebirini bulmak için aşağıdaki iki metodu kullanacağız.

(i) Birinci Metod:

$T_e(G)$ uzayının $\{V_1, V_2, ..., V_n\}$ bazı seçilir.

$$x_r : G \to T(G)$$

$$x_r(g) = L_{g_*}(v_r) \quad , \quad g \in G$$

olarak tanımlı $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ sistemi $X_L(G)$ için bir bazdır.

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad ; \quad X,Y \in X_L(G) \text{ ve } f \in C^{\infty}(G,R)$$

ile tanımlı $[,]$ çarpımı $X_L(G)$ de hesaplanır ve

$$[v_i, v_j] = [x_i, x_j]_{|_e}$$

ile $T_e(G)$ deki $[,]$ çarpımı belirtilmiş olur.

$$LG = (T_e(G), [,])$$

aranan Lie cebiridir.

(ii) İkinci Metod:

$T_e(G)$ nin bir bazı $\{V_1, V_2, ..., V_n\}$ olmak üzere, G üzerinde

$$\alpha_i : \mathbb{R} \to G \quad , \quad i \in I$$

eğrileri

$$\left(\frac{d\alpha_i}{dt}\right)(o) = v_i$$

olacak şekilde seçilir. $\forall i, \alpha_i(t) \in G$ dir. $(\alpha_i(t) = g \in G)$

$$L_{g^*}(v_i) = L_{g^*}\left(\alpha_i'(t)\big|_{t=0}\right)$$

$$= \left(L_g \circ \alpha_i(t)\right)_*\big|_{t=0}$$

eşitliği yardımıyla,

$$L_g \circ \alpha_i(t) = g.\alpha_i(t)$$

hesaplanır ve türevin t=0 daki değeri istenen i-inci sol invaryant vektör alanıdır. Bunu x_i ile gösterirsek $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X_L(G)$ bir bazdır. $[x_i, x_j]$ dolayısıyla $[v_i, v_j]$ hesaplanabilir.

Bundan sonraki örneklerde her iki metotda kullanılacaktır.

Örnek 2.2.9.

$$gl(n,\mathbb{R}) = \left\{A \,\middle|\, A=\left[a_{ij}\right] \in \mathbb{R}^n \; n\right\}$$

cümlesi

$$GL(n,\mathbb{R}) = \left\{A \,\middle|\, A=\left[a_{ij}\right] \in \mathbb{R}^n \; n, \det A \neq 0\right\}$$

cümlesinin Lie cebiridir [2].

Tanım 2.2.10 (Lie Alt Cebiri). Bir V vektör uzayının bir alt uzayı W olsun. Eğer, $\forall X, Y \in W$ için $[X,Y] \in W$ oluyorsa W ye V Lie cebirinin bir Lie alt cebiri denir [4].

Örnek 2.2.11. O(n) ortogonal matrislerin cümlesi, GL(n, $\mathbb{R}$) nin Lie alt grubudur. Ayrıca, GL(n, $\mathbb{R}$) nin Lie cebiri g olsun. Eğer, $\mathbb{R} = \left[v_{ij}\right] \in O(3)$ ise;

$$\mathbb{R}\ \mathbb{R} = \left[\sum_{j=1}^{3} v_{ij} v_{jk} \right] ,$$

$$I_3 = \mathbb{R}\mathbb{R}^T$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{3} v_{ij} v^T{}_{jk} \right]$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{3} v_{ij} v_{kj} \right]$$

$$= \left[\delta_{ij} \right].$$

$\mathbb{R}.\mathbb{R}^T$ nin türevi,

$$\sum_{j=1}^{3} \left(v_{ij} v_{kj} + v_{ij} v_{kj} \right) = 0$$

olup,bu türevin sıfırdaki değeri,

$$\sum_{j=1}^{3} \left(v_{ij}(0) \delta_{kj} + \delta_{ij} v_{kj}(0) \right) = 0 \Rightarrow v_{ik}(0) + v_{ki}(0) = 0$$

dır.

$$R(0) + \left(R(0)^T \right) = 0 \Rightarrow R(0) = -\left(R(0) \right)^T$$

olduğundan

$$R(0) = X$$

anti-simetrik matris olur ki,

$$\left(R(0) \right)^T = -X$$

olur. Böylece O(3) ün Lie cebiri,

$$h=\left\{X\in g\middle| X^T=-X\right\}$$

dir. Gerçekten;

Tanım 2.2.10.-inci tanımdan h, g nin bir alt vektör uzayı ise,

$$X^T=-X,\ \ Y^T=\text{-}Y\in h \text{ için}$$

$$[X,Y]^T=(XY\text{-}YX)^T$$

$$=(XY)^T-(YX)^T$$

$$=Y^TX^T-X^TY^T$$

$$=-(XY\text{-}YX)$$

$$=-[X,Y]$$

dir. Öyleyse

$$[X,Y]^T=-[X,Y]\in h$$

olur. Böylece $h\subset g$ bir Lie alt cebirdir.

Ayrıca, 3x3 anti-simetrik matrislerin cümlesi A(3), $\mathbb{R}^3$ uzayı ile birebir tekabül içindedir. $(A(3),[\,,\,])$ ve $(\mathbb{R}^3,x)$ Lie cebirleri izomorfik Lie cebirleridir. Şöyle ki, $X=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ için

$$\eta:\mathbb{R}^3\to A(3)$$

$$X\to\eta(X)$$

$$\eta(X)=\begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlı olan dönüşüm, 1:1, örten ve lineerdir. Ayrıca

$$\left[\eta(X),\eta(Y)\right]=XxY$$

eşitliği doğrudur. Yani η bir Lie cebiri izomorfizmidir.

2.3. Dönmeler ve Ortogonal Matrisler

Tanım 2.3.1 (Dönme). E^n in iki ortonormal çatısı$\left\{0;\vec{U}_1,\vec{U}_2,\vec{U}_3\right\}$, $\left\{0;\vec{U}_1',\vec{U}_2',\vec{U}_3'\right\}$ olsun.

$$g:\ E^n \to E^n$$

dönüşümü 0 noktasını sabit bırakan, lineer, yön koruyan ve $\left\{\vec{U}_i\right\}$ sistemini $\left\{\vec{U}_i'\right\}$ sistemine $g\left(\vec{U}_i\right)=U_i'$ şeklinde taşıyan bir dönüşüm ise g dönüşümüne 0 noktası etrafında bir dönme denir [5].

E^3 ün 0 noktası etrafındaki bir dönmesi Rot(0) ile gösterilsin. E^3 ün bir ortonormal çatısı F=$\left\{0;\vec{U}_1,\vec{U}_2,\vec{U}_3\right\}$, keyfi bir nokta $P\in E^n$, P nin yer vektörü $\vec{OP}=\vec{P}$ ile gösterilsin.

$$\vec{P}=\sum_i a_i U_i$$

yazılabileceğini, üstelik $a_i =<\vec{P},U_i>$ olduğunu biliyoruz. O zaman $\vec{P}=\sum<\vec{P},\vec{U}_i>\vec{U}_i$ yazmak mümkündür. P nin Rot(0) altındaki resmi P'=Rot(0)(P) ve Rot(0)(F)= $\left\{0;\vec{U}_1,\vec{U}_2,\vec{U}_3\right\}$ ise,

$$\vec{P}' = \sum < \vec{P}', \vec{U}'_i > \vec{U}'_i \qquad (2.3.1)$$

ve Rot(0) fonksiyonu iç çarpımı koruduğundan

$$< \vec{P}', \vec{U}'_i > = < \text{Rot}(0)(P), \text{Rot}(0)(U_i) >$$

$$< \vec{P}', \vec{U}'_i > = < \vec{P}, \vec{U}_i >$$

elde edilir. Bu son eşitlikten $< \vec{P}', \vec{U}'_i >$ değeri (2.3.1) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\vec{P}' = \sum < \vec{P}, \vec{U}_i > \vec{U}'_i$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin yorumlarından biri şudur: $\vec{P} = \sum < \vec{P}, \vec{U}_i > \vec{U}_i$ vektörü verildiğinde $P' = \text{Rot}(0)(P)$ görüntü noktasını bulmak için $\left\{ \vec{U}'_i \right\}$ cümlesini bilmek yeterlidir. Çünkü, P nin F çatısındaki bileşenleri ile P' nün F' çatısındaki bileşenleri aynıdır. Böylece Rot(0) dönmesini tanımlamak için $\{U_i\}$ bazının $\{U'_i\}$ görüntüsünü belirtmek kafidir. P noktası yerine U'_i vektörünün uç noktası alındığında, $\{U_i\}$ bazı cinsinden

$$U'_i = \sum a_{ij} U_j$$

yazılabilir. a_{ij} bileşenleriyle belirli olan $\left[a_{ij} \right]$ matrisini irdeleyelim:

$\left[a_{ij} \right]$ matrisinin her bir satırını (veya sütununu) bir vektörün bileşenleri olarak düşünürsek,

$$< \vec{U}'_i, \vec{U}'_k > = \delta_{ik}$$

$$< \vec{U}'_i, \vec{U}'_k > = < \sum_j a_{ij} U_j , \sum_s a_{ks} U_s >$$

$$= \sum_{j,s} a_{ij} a_{ks} < U_j, U_s >$$

$$= \sum_{j,s} a_{ij} a_{ks} \ \delta_{js}$$

$$= \sum_{j} a_{ij} a_{kj}$$

ve $< U'_i, U'_k > = \delta_{ik}$ dan dolayı

$$\sum_{j} a_{ij} a_{kj} = \delta_{ik}$$

bulunur. Yani her bir satırın (sütunun) belirlediği vektör I birim uzunluktadır ve her bir vektör diğerlerine diktir.

$$< U'_i, U_k > = < \sum a_{ij} U_j , U_k >$$

$$= a_{ik}$$

ve

$$< U'_i, U_k > = \cos \theta_{ik} \left\| U'_i \right\| . \left\| U_k \right\|$$

$$= \cos \theta_{ik}$$

olduğundan her bir a_{ij} bileşeni U'_i ile U_k arasındaki açı θ_{ik} olmak kaydıyla, $a_{ik} = \cos \theta_{ik}$ ile bellidir.

Burada Rot(0) yerine R rotasyonu kullanacağız.

Şimdi R dönmesinin inversi olan R^{-1} için matris bileşenlerini araştıralım:

R^{-1} altında, $U'_i \rightarrow U_i$ dir.

$$U_i = \sum_j b_{ij} U'_j ,$$

her bir b_{ik}

$$< U_i , U'_k > = < \sum b_{ij} U'_j , U'_k >$$

$$= b_{ik}$$

ile belli olup,

$$< U_i , U'_k > = < U'_k , U_i >$$

$$= a_{ki}$$

idi. Sonuç olarak

$$b_{ik} = a_{ki}$$

dir. Yani R^{-1} in matrisi R nin matrisinin transpozudur. Matris notasyonlarında,

$$[a_{ik}][a_{ki}] = I$$

ve determinantı hesaplanırsa,

$$A A^T = I$$

$$\det A . \det A^T = 1$$

$$\det A = \pm 1$$

elde edilir. R dönmesinin matris formu olan $A=[a_{ij}]$ matrisi için elde edilen özellikler A nın bir ortogonal matris olduğunu gösterir. O halde her bir R dönmesine $A \in O(3)$ matrisi karşılık gelir. Şimdi tersini, yani bir $A \in O(3)$ ortogonal matrisinin bir R dönmesi tanımladığını gösterelim.

İki X,Y vektörünün sütun matrisi olarak ele alınmasıyla $< X,Y >= X^T.Y$ yazılabilir. E^n üzerinde bir dönüşüm, $A \in SO(n)$ olmak üzere;

$$\varphi_A : E^n \to E^n$$

$$X \to \varphi_A(X)=A.X$$

olarak tanımlanırsa,

$$< \varphi_A(X), \varphi_A(Y) >=< AX,AY >$$

$$=(AX)^T.AY$$

$$=X^T A^T AY \;\; ; \;\; A^T = A^{-1}$$

$$=X^T Y$$

$$=< X,Y >$$

eşitliğinden dolayı φ_A iç çarpımı koruyan bir dönüşümdür.

Dolayısıyla φ_A normu korur. φ_A lineer bir dönüşümdür. Orijini sabit bırakır. Ayrıca, det $A=\pm 1$ olduğundan φ_A yön korur. Sonuç olarak φ_A bir dönme belirler.

Bir Rot(0)=R dönmesine karşılık gelen A ortogonal matrisinin karakteristik vektörleri yardımıyla R nin invaryant bıraktığı alt uzayları belirleyelim. Böylece, R dönmesini daha da açık şekilde belirtmek mümkün olur. $A \in SO(3)$ ortogonal matrisinin karakteristik değer ve karakteristik vektörleri

$$AX=\lambda X \;\; , \;\; X \neq 0$$

eşitliğini sağlayan λ ve X lerdir. A normu koruduğundan,

$$\|AX\|=\|\lambda X\|$$

$$= |\lambda| \, \|X\|$$

$$\Rightarrow |\lambda| = 1$$

dir. Dolayısıyla, $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda = \pm 1$ veya $\lambda \in \mathbb{C}$ elde edilir. $\lambda \in \mathbb{R}$ ise X karakteristik vektörü

$$AX = X$$

veya

$$AX = -X$$

olarak bellidir. Yani A, aynı uzayı ki bu uzay $\mathbb{R}^3$ te bir doğrudur, yön farkıyla belirler. $\lambda = +1$ için invaryant alt uzayı V_1, $\lambda = -1$ için V_2 ile gösterelim. $\vec{U}_1 \in V_1$, $\vec{U}_2 \in V_2$ için:

$$A\vec{U}_1 = \vec{U}_1$$

$$A\vec{U}_2 = -\vec{U}_2$$

ve

$$< \vec{U}_1, \vec{U}_2 > = < A\vec{U}_1, A\vec{U}_2 >$$

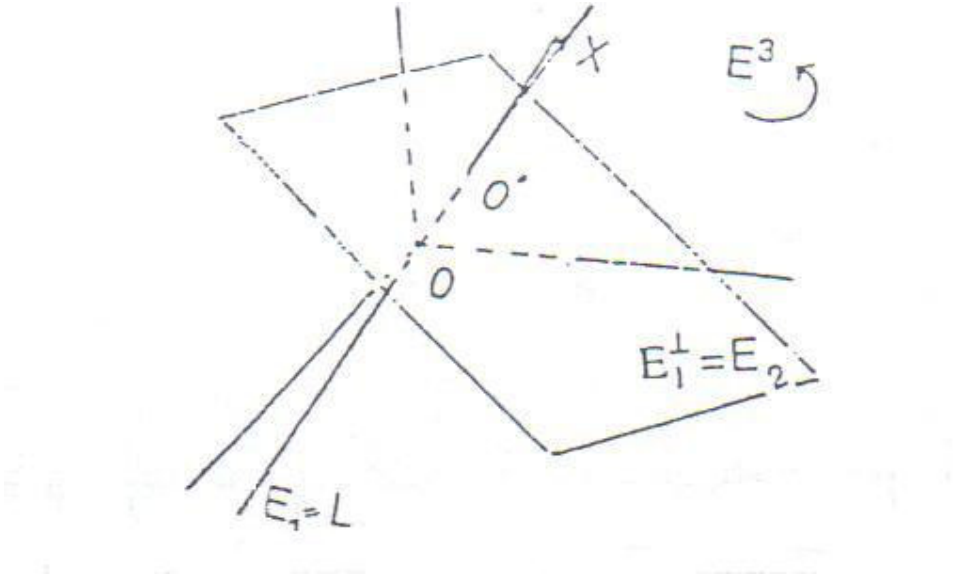
$$\Rightarrow < \vec{U}_1, \vec{U}_2 > = < \vec{U}_1, -\vec{U}_2 >$$

$$\Rightarrow 2 < \vec{U}_1, \vec{U}_2 > = 0$$

$$\Rightarrow < \vec{U}_1, \vec{U}_2 > = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla karakteristik doğrultu “kendine dik olma” özelliğine sahip bir doğrultudur.

İnvaryant bir alt uzayın ortogonal tümleyeni de invaryanttır. Böylece AX= λ X, $\lambda = \pm 1$ uzayı E_1 olmak üzere, $E_1^{\perp}$ uzayı da φ altında invaryanttır. boy $E_1^{\perp}$=2 dir.



Şekil: 2.3.1

Bu durumda R dönmesi şöyle izah edilebilir: R nin invaryant bıraktığı doğrultu L olsun. R, L ye dik olan düzlemlerde, düzlemsel dönme yapar. Her düzlemdeki dönme merkezi, L ile ilgili düzlemin kesim noktasıdır. Bu düzlemlerden biri P, $P \cap L = O'$ olsun. P de bir dik çatı $\{ O' ; \vec{U}_1 , \vec{U}_2 \}$ L ekseni üzerindeki birim vektör $\vec{\eta}$ ile gösterilsin.

$\{ O' ; \vec{U}_1 , \vec{U}_2 , \vec{\eta} \}$ bir dik çatıdır.

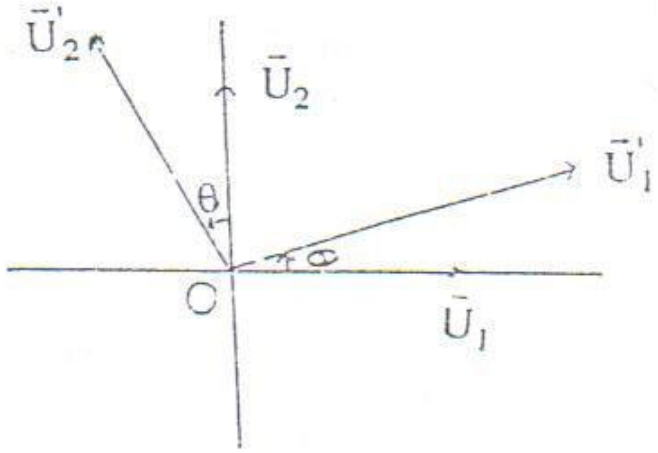
Rot(θ,L) nin analitik ifadesi şöyledir:

$$\vec{U}_1' = \vec{U}_1 \cos\theta + \vec{U}_2 \sin\theta$$

$$\vec{U}_2' = -\vec{U}_1 \sin\theta + \vec{U}_2 \cos\theta$$

$$\vec{\eta}' = \vec{\eta}$$

dır. $\vec{U}_1'$ ve $\vec{U}_2'$ nün açık hesabı şöyledir;



Şekil: 2.3.2

$$\vec{U}_1' = a_1 \vec{U}_1 + a_2 \vec{U}_2$$

$$\vec{U}_2' = b_1 \vec{U}_1 + b_2 \vec{U}_2$$

$\Rightarrow$

$$< \vec{U}_1', \vec{U}_1 > = \cos\theta$$

$$< \vec{U}_1', \vec{U}_2 > = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$= \sin\theta$$

$$< \vec{U}_2', \vec{U}_1 > = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

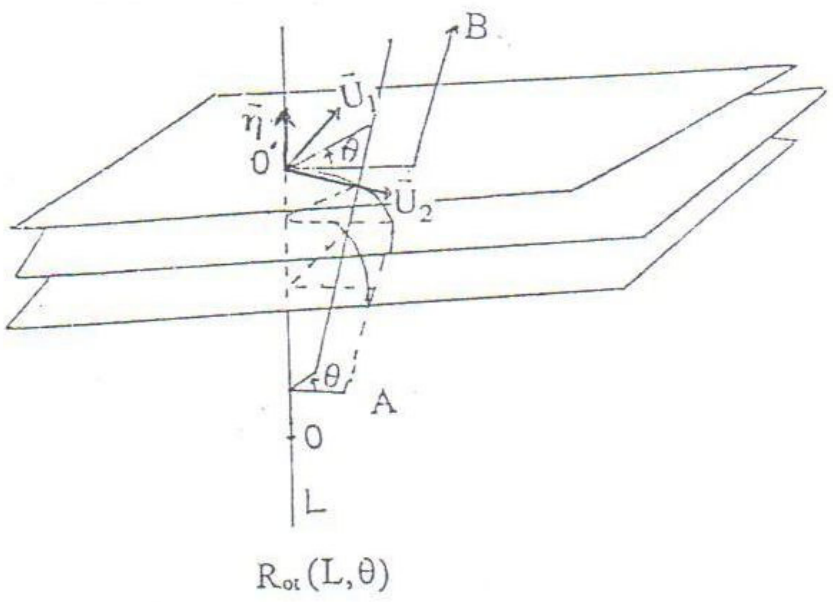
$$= -\sin\theta$$

$$< \vec{U}_2', \vec{U}_2 > = \cos\theta$$

bulunur. Şimdi Rot(L,θ) nın nasıl belirleneceğini belirtelim. L etrafında θ derecelik dönme yapan bir P noktası, $P \cap L = O'$ noktası etrafında θ derecelik bir dönme yapar.

Böylece Rot(L, θ) nın belli olması için L ve θ nın veya R yi veren ortogonal matrisin verilmiş olması yeterlidir.

L ekseniyle çakışmayan bir AB vektörünün, L ekseni etrafındaki dönmesi şöyle verilir. $\overrightarrow{AB}$ üzerindeki her nokta, L ye dik olan düzlemlerden biri ile $\overrightarrow{AB}$ nin arakesit noktası olarak bellidir. Böyle bir noktanın L etrafındaki dönmesini daha önce ele almıştık. Böylece $\overrightarrow{AB}$ nin her bir noktası ilgili düzleminde açıklanan dönmeyi yapar.



Şekil: 2.3.3.

(L ekseni etrafında bir $\overrightarrow{AB}$ vektörün dönmesi)

2.4. Transformasyon Grupları ve Lıe Grup Etkisi

Tanım 2.4.1 (Transformasyon). Bir G Lie grubundan kendi üzerine tanımlı bir dönüşüm 1:1 ise bu dönüşüme bir transformasyon denir. Transformasyon aynı zamanda bir diffeomorfizm ise diferensiyellenebilir transformasyon olarak adlandırılır [3].

Tanım 2.4.2 (Lie Grup Etkisi). G bir Lie grubu, M de diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Bir

$$\psi : GxM \to G$$

global ve örten dönüşümü:

(i) ψ diferensiyellenebilirdir,

(ii) $\psi(g, \psi(h,m)) = \psi(gh,m)$; $\forall g,h \in G$, $\forall m \in M$

şartlarını sağlıyorsa G Lie grubu M manifoldu üzerinde bir transformasyon grubu olarak etki ediyor denir [3].

Sonuç 2.4.3. $\psi : GxM \to M$

global ve örten dönüşümünün indirgenmişi olan

$$\psi_g : M \to M$$

$$\psi_g(m) = \psi(g,m) \; ; \; g \in G, \; m \in M$$

dönüşümü, diferensiyellenebilirdir. Tanım 2.4.2.nin (ii)-inci maddesindeki eşitlik;

$$\psi_g \circ \psi_h = \psi_{gh}$$

olarak yazılabilir.

$$\psi_e : M \to M$$

$$\psi_e(m) = m \quad , \; e \in G \text{ birim eleman ve } m \in M$$

dönüşümü özdeşlik dönüşümüdür. Ayrıca,

$$\psi_g \circ \psi_{g^{-1}} = \psi_{gg^{-1}} = \psi_{g^{-1}g}$$

$$= \psi_e$$

olduğundan,

$$(\psi_g)^{-1} = \psi_{g^{-1}}$$

elde edilir. Yani $(\psi_g)^{-1}$ ve $\psi_{g^{-1}}$ invers dönüşümlerdir. Sonuç olarak ψ_g bir diffeomorfizmdir [3].

Teorem 2.4.4. Bir G Lie grubu; bir M manifoldu üzerinde bir transformasyon grubu olarak etki ediyorsa G nini her $H \subset G$ Lie alt grubu da aynı etkiye sahiptir [3].

Bir M manifoldu üstünde bir transformasyon grubunun etkisi,

$$\psi : GxM \to M$$

$$(g,m) \to \psi(g,m)$$

dönüşümüyle verilsin. $\psi(g,m)$ yerine kısaca gm notasyonunu kullanalım. Bu etki yardımıyla M üzerinde bir denklik bağıntısı şöyle verilsin. M üzerinde bir denklik bağıntısı, $m_1, m_2 \in M$ için

$$m_1 \sim m_2 \Leftrightarrow \exists g \in G, \quad m_2 = g\, m_1$$

şeklinde verilsin. Bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Buna göre bir $m \in M$ noktasının denklik sınıfı

$$[m] = \{ m' \,|\, m = g\, m' \quad , \exists g \in G \}$$

olarak yazılabilir.

Tanım 2.4.5. $[m]$ denklik sınıfına $m \in M$ nin G transformasyon grubu altındaki yörüngesi denir.

Tanım 2.4.6. Bir G Lie grubu, bir diferensiyellenebilir M manifoldu üzerinde bir transformasyon grubu olarak etki etsin. Bir $A \subset M$ alt cümlesi için

$$\psi : AxG \to A$$

$$\psi(AxG) \subset A$$

ise A, G altında invaryanttır denir [3].

2.5. Üstel Dönüşüm

Tanım 2.5.1. G bir Lie grubu olmak üzere

$$\psi : \mathbb{R} \times G \to G$$

$$(t,s) \to \psi(t,s)$$

diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. ψ ye dayanarak tanımlayabileceğimiz bir ψ_t dönüşümü

$$\psi_t : G \to G$$

$$g \to \psi_t(g) = \psi(t,g)$$

olarak belirlensin. Eğer

T_1) $\quad \psi_t : G \to G \ , \ \forall t \in \mathbb{R}$

dönüşümü bir transformasyon,

T_2) $\quad \forall t,u \in \mathbb{R}$ için

$$\psi_{t+u} = \psi_t \circ \psi_u$$

şartları sağlanıyorsa, $\{ \psi_t \,|\, t \in \mathbb{R} \}$ cümlesine, G Lie grubunun transformasyonlarının 1-parametreli alt grubu denir [3].

Tanım 2.5.2. $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi (+) işlemine göre Lie grubudur. G cümlesi de (.) işlemine göre bir Lie grubu olsun.

$$f(t+s)=f(t).f(s)$$

olacak biçimde

$$f: \mathbb{R} \to G$$

Lie grup homomorfizmine bir 1-parametreli alt grup denir ve $\{f(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ cümlesiyle ifade edilir [6].

G bir Lie grubu ve

$$f: \mathbb{R} \to G$$

de bir 1-parametreli alt grup olsun. $\frac{df}{dt}\Big|_{i=0}$ tanjant vektörü, $e \in G$ birim elemanındaki $T_e(G)$ tanjant uzayının bir elemanıdır. Şimdi, G Lie grubu olarak $(\mathbb{R}-\{0\},.)$ çarpım grubunu alalım.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}-\{0\}$$

$$f(t+s)=f(t).f(s)$$

bir C^{∞}-homomorfizm olup,

(i) $f'(t)= f'(0).f(t)$

(ii) $f(0)=1$

eşitliklerini sağlar. Gerçekten,

(ii)-eşitliği; grup homomorfizmlerinin, birim elemanı, birim elemana dönüştürmesinin bir sonucudur.

(i)-eşitliği için:

$s=\Delta t \in \mathbb{R}$ alalım O zaman,

$$f(t+\Delta t)=f(t).f(\Delta t)$$

olup,

$$f'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t).f(\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(\Delta t)-1}{\Delta t}.f(t)$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(0+\Delta t)-f(0)}{\Delta t}.f(t)$$

$$=f'(0).f(t)$$

olur. Böylece, elde edilen

$$f'(t)= f'(0).f(t)$$

diferensiyel denkleminin çözümü

$$f(t)=e^{tf'(0)}$$

olarak elde edilir. Bu eşitlik,

$$f(t)=\exp(t\,f'(0))$$

olarak da yazılır. Aslında $\mathbb{R}$-{0} cümlesi, GL(1, $\mathbb{R}$) matris grubudur. Benzer olarak GL(n, $\mathbb{R}$) Lie grubu için,

$$f:\ \mathbb{R}\to GL(n,\ \mathbb{R})$$

$$f(t+s)=f(t)\odot f(s)$$

homomorfizmleri kaynaklı olarak da yazılabilir. Bu homomorfizm için; $f'(t)$, $f'(0)$, f(t), f(0) birer matris ve $\odot$ matris çarpım işlemi olmak üzere; $t,0\in\mathbb{R}$ için,

(i) $f'(t)= f'(0) \odot f(t).$

(ii) $f(0)=I$

eşitlikleri sağlanmalıdır.

$$f'(t)= f'(0) \odot f(t)$$

diferensiyel denkleminin çözümü,

$$f(t)= \exp(t f'(0))$$

$$= e^{tA} \quad , \quad f'(0)=A$$

olarak bellidir. Burada,

$$e^{tA} = I+tA+\frac{t^2A^2}{2!}+\dots$$

dır.

Karşıt olarak;

$$f: \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{R})$$

$$f(t+s)=f(t) \odot f(s)$$

homomorfizmi,

$$f(t)=\exp(t f'(0))$$

ile verilmiş ise

$$f'(t)= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\exp((t+\Delta t)f'(0))-\exp(tf'(0))}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\exp((t.f'(0)+\Delta t.f'(0))-\exp(tf'(0))}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\exp((t.f'(0)).\exp(\Delta t.f'(0))-\exp(tf'(0))}{\Delta t}$$

$$= \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\exp(\Delta t.f'(0))-I}{\Delta t} \right) \exp(t f'(0))$$

$$= \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{I+\Delta t\, f'(0) + ((\Delta t)^2/2!)(f'(0))^2 + \ldots - I}{\Delta t} \right) \exp(t f'(0))$$

$$= f'(0).\exp(t f'(0))$$

olduğundan,

$$f'(t) = f'(0) \odot f(t)$$

bulunur, yani

$$f(t) = \exp(t f'(0))$$

eşitliği ile tanımlı

$$f: \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{R})$$

homomorfizmi,

(i) $f'(t) = f'(0) \odot f(t)$

(ii) $f(0) = I$

eşitliklerini sağlar.

Böylece, exp dönüşümü; $GL(n, \mathbb{R})$ Lie grubu üstünde, e=1 noktasındaki tanjant uzayın elemanlarını $GL(n, \mathbb{R})$ ye götüren bir dönüşüm olarak, şöyle ifade edilebilir:
$X \in T_e(GL(n, \mathbb{R}))$ ise, X'in integral eğrisi f(t) olmak kaydıyla,

$$f(t) = \exp(t f'(0))$$

yazılabilir.

$$\exp X = f(1)$$

olarak verilsin. Dikkat edilirse,

$$f(1) = \exp(1.X)$$

$$= \exp X$$

olacaktır.Böylece, G bir Lie grup olmak üzere

$$\exp: \quad T_e(G) \to G$$

$$X \to \exp X$$

öyle ki,

$$\exp X = f(1)$$

olarak verilir.

$f'(0) = X \in T_e(G)$ ve $r,s \in \mathbb{R}$ için

$$\exp(r+s)X = (\exp rX)(\exp sX)$$

olduğundan,

$$\exp tX: \mathbb{R} \to G$$

bir diferensiyellenebilir Lie grup homomorfizmidir. exp. dönüşümü tanımlamadaki esas kaynak,

$$f: \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{R})$$

$$t \to f(t) = \exp(t f'(0)), \; f'(0) = X$$

dönüşümünün bir 1-parametreli alt grup olmasıdır.

Şimdi bu kavramı herhangi Lie gruplarına taşıyalım. Tanımlamada G nin Lie cebirinin, $T_e(G)$ ile izomorf olan $\chi_L(G)$ uzayı olması önemli rol oynar.

Tanım 2.5.3 (G Lie Grubu Üstündeki Üstel Dönüşüm). G bir Lie grubu, $\chi_L(G)$=LG de G nin Lie cebiri olsun. X$\in \chi_L(G)$ ile

$$\frac{d\varphi}{dt}\Big|_{t=0} = X$$

olarak belli olan homomorfizm φ olmak üzere

$$\exp: \chi_L(G) \to G$$

$$X \to \exp X \quad , \; X \in \chi_L(G)$$

$$\exp X = \varphi(1)$$

dönüşümüne, G Lie grubu üstündeki üstel dönüşüm denir [7].

Her

$$\varphi : \mathbb{R} \to G$$

homomorfizmi tek türlü belirli bir

$$f: \mathbb{R} \times \{X\} \to G$$

$$(t,X) \to f(t,X) = \varphi(t) \; , \; \varphi(0) = X$$

dönüşümü tanımlar. Daha önce

$$f(t) = \exp(t f'(0))$$

ile tanımlı olan homomorfizm bu notasyonlarla

$$\varphi(t) = e^{tX}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\varphi : \mathbb{R} \to G$$

$$t \to \exp tX$$

olarak belirli dönüşüm, dolayısıyla üstel dönüşüm, C^{∞} dur.

Teorem 2.5.4. Herhangi bir G Lie grubu için

$$\exp: T_e(G) \to G$$

$$X \to \exp X$$

dönüşümü C^{∞}-dur ve

$$\varphi : \mathbb{R} \to G$$

$$t \to \varphi(t) = \exp tX$$

G nin

$$\varphi(0) = X$$

olan tek türlü belirli 1-parametreli alt grubudur [7].

Teorem 2.5.5. Herhangi bir G Lie grubu için

$$\exp: T_e(G) \to G$$

$$X \to \exp X$$

üstel dönüşümü $T_e(G)$ den G ye C^{∞}-dur ve $0 \in T_e(G)$ nin bir U_0 komşuluğunu $e \in G$ nin bir V_e komşuluğuna diffeomorfik olarak dönüştürür [3].

Özellikler 2.5.6. Üstel dönüşümler aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) $(\exp\ t_1 X)\ (\exp\ t_2 X)=\exp(t_1+t_2)X \quad , t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ve $X \in T_e(G)$

(ii) $\exp(-tX)=(\exp tX)^{-1} \quad , \forall t \in \mathbb{R} \quad , X \in T_e(G)$

(iii) $X,Y \in g$ ve $[X,Y] \neq 0$ ise

$$(\exp X)(\exp Y) \neq \exp(X+Y) \ ; \ X,Y \in g$$

dir.

(iv) $[X,Y]=0$ ise

$$\exp(X+Y)=\exp X \,.\, \exp Y$$

dir.

Tanım 2.5.7. A, elemanları reel sayılar olan (nxn)-tipindeki bir matris olmak üzere, her bir

$$I, A, \frac{A^2}{2!}, \ldots, \frac{A^k}{k!}, \ldots$$

matrislerinin (i,j)-inci elemanlarının oluşturduğu

$$(I)_{ij}+\left(\frac{A}{1!}\right)_{ij}+\left(\frac{A^2}{2!}\right)_{ij}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{A^k}{k!}\right)_{ij}$$

serileri her (i,j) için yakınsak iseler,

$$e^A=I+A+\frac{A^k}{k!}+\ldots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$$

serisi yakınsaktır [8].

Teorem 2.5.8. Herhangi bir $A\in \mathbb{R}^n_n$ matrisi için

$$I+A+\frac{A^2}{2!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!} \qquad (2.5.1.)$$

serisi yakınsaktır [8].

İspat: A matrisindeki mutlak değeri en büyük olan a_{ij} elemanına m diyelim. (2.5.1) dizisinin birinci teriminin en büyük elemanı 1, ikinci teriminin en büyük elemanı $m=|a_{ij}|$ dir. Üçüncü terimin en büyük elemanı;

$$\max\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}a_{jk}| \le \sum_{j=1}^{n}\max|a_{ij}|.\max|a_{jk}|=n.m^2$$

olacağından $n.m^2$ den küçük eşittir. Dördüncü terimin en büyük elemanı $(n.m).(n.m^2)=n^2m^3$ den küçük eşit olur. Devamla, her i,j için,

$$I,m,\frac{nm^2}{2!},\frac{n^2m^3}{3!},\ldots,\frac{n^{k-2}m^{k-1}}{(k-1)!},\ldots$$

dizisi elde edilir. Oran kriterinden

$$\frac{n^{k-1}m^k}{k!}.\frac{(k-1)!}{n^{k-2}m^{k-1}}=\frac{nm}{k}$$

bulunur. n ve m ler sabit olduğundan $k\to\infty$ için dizi sıfıra yakınsar.

Teorem 2.5.9. $A,B\in\mathbb{R}^n_n$ matrisleri A.B=B.A özelliğine sahip iseler,

$$e^{A+B}=e^A.e^B$$

dir [8].

İspat:

$$e^{A+B}=I+A+B+\frac{A^2}{2}+AB+\frac{B^2}{2}+\frac{A^3}{6}+\frac{A^2B}{2}+\frac{AB^2}{2}+\frac{B^3}{6}+\dots$$

$$e^{AB}=\left(I+A+\frac{A^2}{2}+\frac{A^3}{6}+\dots\right)\left(I+B+\frac{B^2}{2}+\frac{B^3}{6}+\dots\right)$$

$$=I+A+B+\frac{A^2}{2}+AB+\frac{B^2}{2}+\frac{A^3}{6}+\frac{A^2B}{2}+\frac{AB^2}{2}+\frac{B^3}{6}+\dots$$

olduğundan,

$$e^{A+B}=e^{A}.e^{B}$$

dir.

Sonuç 2.5.10. $\mathbb{R}^{n}_{n}$ uzayının her bir A matrisi için e^{A} non-singülerdir [8].

İspat: A ve –A matrisleri çarpma işlemine göre komutatif olduğundan,

$$I=e^{0}=e^{A-A}=e^{A}.e^{-A}$$

dır.

$$I=(\det e^{A})(\det e^{-A})$$

eşitliğinden,

$$\det e^{A}\neq 0$$

olur.

Böylece, R cismi üzerinden nxn-matrisleri cebiri $M_n(R)$ olmak üzere

$$\exp: M_n(R)\to M_n(R)$$

$$\exp(A) = e^{A}$$

dır.

Teorem 2.5.11. Eğer A, bir reel anti-simetrik matris ise e^{A} ortogonaldir [8].

İspat: $A \in A(n) \Rightarrow A^{T} = -A$

dır.

$$I = e^{0} = e^{A+A^{T}} = e^{A} \cdot e^{A^{T}}$$

ise e^{A} ortogonaldir.

Uyarı 2.5.12. Eğer $A(n) \subset M_{n}(R)$ anti-simetrik matrislerin alt uzayı ise,

$$\exp: A(n) \to O(n)$$

dir. Buna göre,

(i) Her e^{A} ortogonal matrisi için A nın anti-simetrik olduğu söylenemez. Yani

$$\exp: A(n) \to O(n)$$

dönüşümü örten değildir.

(ii) e^{A} nın ortogonal olması A nın anti-simetrik olduğunu belirtmez.

Teorem 2.5.13. $A.B \in \mathbb{R}^{n}_{n}$ ve $B \in \mathbb{R}^{n}_{n}$ non-singüler iseler

$$e^{BAB^{-1}} = B\ e^{A}\ B^{-1}$$

dir [8].

3.BÖLÜM

3.1. Genelleştirilmiş Hortum Yüzeyinin Karakterizasyonu

E^3 uzayında bir hareket esnasında, E hareketli uzayı ve E' de sabit uzayı göstersin. E nin E' ye göre hareketi, 6 bağımsız parametreye bağlıdır. Bunlardan ilk 3'ü, dönmeyi temsil eden ortogonal matrisin 3 bileşeni (boy O(3)=3) ve diğer 3'ü ötelemeyi veren vektörün 3 bileşenidir. E nin E' ye göre hareketi, 5 den küçük veya eşit olan m tane ($5 \geq m$) bağımsız şarta sahip ise bu hareket n=6-m bağımsız şarta bağlıdır. Kinematik genelde n=1 durumu ile ilgilenir ve bu bir parametreli harekettir. Bu harekette parametre t zamanına bağlıdır. Bu harekette, bir hareketli nokta, düzlem veya doğru tarafından oluşturulan geometrik yer bir eğridir. n=2 durumunda E nin E' ye göre iki parametreli hareketi söz konusudur. E nin pozisyonu bu durumda iki parametreye bağlıdır. Bu parametreler s ve t ile gösterilsin. Bu durumda genel olarak bir vektörün geometrik yeri bir yüzeydir.

E nin E' ye göre genel iki parametreli hareketi,

$$P(s,t) = A(s,t)\,p + d(s,t) \qquad (3.1.1.)$$

ile verilir. Burada $A(s,t)$ bir ortogonal matris ve $d(s,t)$ öteleme vektörüdür.

E ve E' nün ortogonal çatıları sırası ile $\{0, e_1, e_2, e_3\}$ ve $\{0', e_1', e_2', e_3'\}$ olsun. Bu iki çatı başlangıç anında çakışıktır.

Bu bölümde, $A(s,t)$ ortogonal matrisi ile $d(s,t)$ öteleme vektörünün özel seçimiyle bazı yörünge yüzeylerinin parametrizasyonları verilecektir. Önce $A(s,t)$ nin özel seçimini verelim.

3x3 tipindeki ortogonal matrislerin cümlesini O(3) ile gösterelim. boy O(3)=3 dür. 3x3 tipindeki anti-simetrik matrislerin cümlesini C(3) ile gösterelim. C(3) bir vektör uzayı yapısına sahip olduğundan

$$C(3)=\left\{ C\in \mathbb{R}_3^3 \;\middle|\; C^T=-C,\; C=\begin{bmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix},\; c_i\in\mathbb{R} \right\}$$

cümlesi

$$\begin{aligned} [\ ,\ ]:\ & C(3)xC(3)\to C(3) \\ & C\ ,\ D\ \to [C,D]=CD-DC \end{aligned}$$

Bracket operatörü için

i) $[C,D]=-[D,C]$ (anti-simetrik)

ii) $[uC+vD,E]=u[C,E]+v[D,E] \qquad \forall u,v\in\mathbb{R}$ (2-lineer)

iii) $[C,[D,E]]+[D,[E,C]]+[E,[C,D]]\equiv 0$ (Jakobi özdeşliği)

eşitlikleri sağlandığından (C(3) , [,]), O(3) lie grubunun lie cebiridir [1].
Diğer taraftan $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)\in\mathbb{R}^3$ için $\|\vec{c}\|=1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \eta:\mathbb{R}^3\to C(3) \\ & \vec{c}\ \to \eta(c)=\begin{bmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm 1:1, örten ve lineer olduğundan bir izomorfizmdir. Yani her anti-simetrik matris ile özdeşleşen bir vektör vardır.

Ayrıca $\mathbb{R}^3$ de vektörel çarpımın

$$\begin{aligned} & [\ ,\ ]:\mathbb{R}^3\ x\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 \\ & \vec{c}\ \ ,\ \ \vec{d}\ \ \to\left[\vec{c},\vec{d}\ \right]=\vec{c}\wedge\vec{d} \end{aligned}$$

özelliği vardır ve $(\mathbb{R}^3, \wedge)$ lie cebiridir [1]. Tüm bu dönüşümler ile birlikte

$$\eta(\vec{c}).\eta(\vec{d}) - \eta(\vec{d}).\eta(\vec{c}) = \left[\eta(\vec{c}), \eta(\vec{d})\right] = \eta(\vec{c} \wedge \vec{d})$$

olduğundan $(\mathbb{R}^3, \wedge)$ ve $(C(3), [,])$ lie cebirleri izomorfiktir. Üstelik $C \in C(3)$ ve $p \in \mathbb{R}^3$ için p ye karşılık gelen matris P ve $\vec{c}$ ye karşılık gelen matris C olmak üzere,

$$C.P = \vec{c} \wedge \vec{p}$$

yazılabilir. Yani iki vektörün vektörel çarpımı, bu vektörlere karşılık gelen matrislerin çarpımına eşittir. Her bir c_i (s) bileşeni $s \in \mathbb{R}$ ye göre differensiyellenebilir fonksiyonlar olan $(c_1(s), c_2(s), c_3(s))$ bileşenli vektör değerli bir fonksiyon $\vec{c}(s)$ olsun. Buna göre $\vec{c}(s) = (c_1(s), c_2(s), c_3(s))$ ve bir $p \in \mathbb{R}^3$ için

$$C(s).P(s) = \vec{c}(s) \wedge \vec{p}(s) \qquad (3.1.2.)$$

eşitliğini sağlayan

$$C(s) = \begin{bmatrix} 0 & -c_3(s) & c_2(s) \\ c_3(s) & 0 & -c_1(s) \\ -c_2(s) & c_1(s) & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlı ve $\forall s \in I \subset \mathbb{R}$ için doğru olan tek türlü bir C(s) anti-simetrik matrisi vardır. C(s) anti-simetrik matrisi yardımıyla tanımlanan

$$e^{tC(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[tC(s)]^n}{n!}$$

matrisi ortogonaldir [8]. Şimdi $e^{tC(s)}$ matrisinin kullanışlı bir karşılığını elde edelim. İşlemlerin kısalığı için C(s) yerine C ve c_i(s) yerine c alalım.

$$e^{tC} = I + tC + \frac{(tC)^2}{2!} + \frac{(tC)^3}{3!} + \ldots + \frac{(tC)^n}{n!} \qquad (3.1.3.)$$

olmak üzere

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1c_2 & c_1c_3 \\ c_1c_2 & c_2^2 & c_2c_3 \\ c_1c_3 & c_2c_3 & c_3^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^2 = B - I$$

olur. Ayrıca

$$C^3 = -C$$

$$C^4 = I - B = -(B - I)$$

$$C^5 = C$$

.

.

. (3.1.4.)

elde edilir.(3.1.4.) eşitliği (3.1.3.) de yerine yazılırsa

$$e^{tC} = I + \left(t - \frac{t^3}{3!} + .. + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + .. \right) C - \left(1 - 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + ... \right) (B - I)$$

$$= I + \sin t \; C - (\cos t - 1)(B - I)$$

$$= I + \sin t \; C + (1 - \cos t)(B - I)$$

$$= I + \sin t \; C + (1 - \cos t) \; C^2$$

$$e^{tC} = I + \sin t \; C + (1 - \cos t) C^2 \qquad (3.1.5.)$$

elde edilir. Bundan sonra e^{tC} yerine A(s,t) sembolünü kullanacağız. Bir $p \in \mathbb{R}^3$ noktasının yer vektörünü $\vec{p}$ ve matris formunu da P ile gösterelim. Buna göre

$$A(s,t)\,p = A(s,t)P$$
$$= \left[I + \sin t\ C + (1-\cos t)\,C^2\right]P \qquad (3.1.6.)$$

dır.

Ayrıca $C.P = \vec{c} \wedge \vec{p}$ ve $\vec{c} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{p}) = \langle \vec{c}, \vec{p} \rangle \vec{c} - \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle \vec{p}$ olduğundan (3.1.6.) eşitliği kullanılarak

$$A(s,t)\,p = \vec{p}\cos t + \langle \vec{c}, \vec{p} \rangle \vec{c}(1-\cos t) + (\vec{c} \wedge \vec{p})\sin t \qquad (3.1.7.)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik oldukça kullanışlıdır.

Şimdiye kadar C(s) anti-simetrik matrisinin özel seçimi ile ilgilendik ve bu seçimi $\vec{c}(s)$ vektörünün seçimine bağladık. Şimdide $\vec{c}(s)$ vektörünün bir özel seçimini ele alalım. $s \in I \subset \mathbb{R}$ için

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$s \rightarrow \alpha(s)$$

verilen eğri differensiyellenebilir bir eğri olsun. Ayrıca $\alpha(s)$ eğrisi boyunca tanımlı bir vektör alanı

$$c : \alpha(I) \rightarrow T_{\alpha(I)}\mathbb{R}^3$$
$$s \rightarrow c(s) = (\alpha(s), \vec{c}(s))$$
$$= \vec{c}(s)\big|_{\alpha(s)}$$

şeklinde verilsin. $\forall s \in I$ için $\vec{c}(s)$ vektörü ile belli olan anti-simetrik matris C(s) ve bu matris ile tanımlı ortogonal matris $A(s,t)$, $\alpha(I)$ eğrisi boyunca hareketli çatı $\left\{\alpha(s), \vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\right\}$ ve bu çatıya göre sabit bir nokta p olsun. Bu notasyon ve kabuller ile aşağıdaki tanımı yapabiliriz.

Tanım 3.1.1 (İki-Parametreli hareket).

$$\varphi(s,t)(p) = A(s,t)\,p + \alpha(s)$$

şeklinde tanımlı iki-parametreli harekete, $\alpha(s)$ eğrisi boyunca tanımlı iki-parametreli hareket denir. $\varphi(s,t)(p)$, bir yörünge yüzeyi belirtir. $\varphi(s,t)(p)$ nin özelliklerini inceleyelim.

$A(s,t)$ ortogonal matrisinin ilginç özelliklerinden birisi, karakteristik değerlerden oluşmasıdır. Buna karşı gelen karakteristik vektörlerden reel olanının $\vec{c}(s)$ vektörü olması ve kompleks karakteristik vektörlerin gerdiği uzayın da $\vec{c}(s)$ vektörüne dik düzlem olmasıdır. Dolayısıyla $A(s,t)$, $\vec{c}(s)$ vektörü etrafında dönme tanımlar. Bundan dolayı $\vec{c}(s)$ vektör alanı olarak, $\{\vec{t}(s),\vec{n}(s),\vec{b}(s)\}$ veya herhangi bir vektör alanını seçmek konusunda ipuçlarımız vardır. Bundan sonraki işlemlerimizde sık sık kullanacağımız $\{\vec{t}(s),\vec{n}(s),\vec{b}(s)\}$ çatısı yerine $\{\vec{t},\vec{n},\vec{b}\}$ yi kullanacağız. $\vec{c}(s)$ vektör alanı yerine de $\vec{t}$ teğet vektör alanını seçeceğiz.

Böylece, E hareketli uzayındaki sabit bir p noktasının E' sabit uzayındaki yörünge yüzeyinin parametrizasyonu

$$\varphi(s,t)(p) = \vec{p}\cos t + \langle\vec{t},\vec{p}\rangle\vec{t}(1-\cos t) + (\vec{t}\wedge\vec{p})\sin t + \alpha(s) \quad (3.1.8.)$$

şeklinde verilebilir. Bu yüzeyin normalini hesaplarsak

$$\varphi_t = -\sin t.\vec{p} + \sin t\langle\vec{t},\vec{p}\rangle\vec{t} + \cos t.\vec{t}\wedge\vec{p}$$
$$\varphi_s = (1-\cos t)\langle\vec{t}',\vec{p}\rangle\vec{t} + (1-\cos t)\langle\vec{t},\vec{p}\rangle\vec{t}' + \sin t.\vec{t}\wedge\vec{p} + \vec{t}$$

elde edilir. $\vec{p}$ noktasını $\vec{n}$ üzerinde almak genelliği bozmadığından

$$\vec{p} = u\vec{n} \ , u\in\mathbb{R}$$

alalım. Bu takdirde

$$\varphi_t = -u\sin t.\vec{n} + u\cos t.\vec{b}$$
$$\varphi_s = k_1 u(1-\cos t)\vec{t} + \vec{t}$$

elde edilir. Buradan

$$\varphi_t \wedge \varphi_s = \left(u^2 k_1(1-\cos t)+u\right).\sin t.\vec{b} + \left(u^2 k_1(1-\cos t)+u\right)\cos t.\vec{n}$$

elde edilir. Bu çarpım $\vec{p}$ noktasının yörüngesinin çizdiği yüzeyin normalidir. Bu yüzeyin normali, $\alpha(s)$ eğrisinin $\vec{t}$ teğet vektör alanına dik olan normal düzlemindedir.

$$\varphi(s,t)(p) = \vec{p}\cos t + \langle \vec{t}, \vec{p}\rangle \vec{t}(1-\cos t) + (\vec{t} \wedge \vec{p})\sin t + \alpha(s)$$

iki parametreli hareketinde $\vec{p} = u(t)n(s)$, $u \in \mathbb{R}$ özel seçimini yapalım.

$$\begin{aligned} &\varphi(s,t)(p) = un\cos t + \langle \vec{t}, un\rangle \vec{t}(1-\cos t) + (\vec{t} \wedge un)\sin t + \alpha(s) \\ &\varphi(s,t)(p) = un(s)\cos t + ub(s)\sin t + \alpha(s) \\ &\varphi(s,t)(p) = \alpha(s) + u(t)\left(n(s)\cos t + b(s)\sin t\right) \end{aligned} \qquad (3.1.9.)$$

elde edilir ki, bu ise $\alpha(s)$ eğrisi boyunca tanımlı genelleştirilmiş hortum yüzeyinin parametrik denklemidir.

4. BÖLÜM

4.1. Genelleştirilmiş Hortumların Analizi

Tanım 4.1.1 (Şekil operatörü). E^n bir hiper yüzeyi M ve M nin birim normal vektör alanı, N olsun. E^n de Riemann konneksiyonu D olmak üzere, $\forall X \in X(M)$ için,

$$S(X) = D_X N$$

şeklinde tanımlı, S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü denir.

Tanım 4.1.2 (Asli eğrilikler-Asli doğrultular). E^n de bir hiperyüzey M ve M nin şekil operatörü S olsun. M nin bir P noktasına karşılık gelen S(P) nin karakteristik değerleri M nin bu noktadaki asli eğrilikleri olarak adlandırılır. Asli eğriliklere karşılık gelen ve karakteristik vektör denen vektörlerin belirttiği doğrultulara da M nin bu P noktasındaki asli eğrilik doğrultuları denir [9].

Teorem 4.1.3. E^n in bir hiperyüzeyi M olsun. X_P ve Y_P, M nin bir P noktasında, farklı asli eğriliklerine karşılık gelen asli doğrultuları belirtir iseler X_P ile Y_P ortogonaldir.

İspat Asli doğrultular karakteristik vektörlere karşılık geldiklerinden, lineer cebir derslerinden bildiğimize göre

$$S(X_P) = k_1 X_P \quad \text{ve} \quad S(Y_P) = k_2 Y_P$$

yazılabilir. Burada k_1 ve k_2 ile $P \in M$ noktasındaki asli eğrilikleri gösteriyoruz. S self-adjoint olduğundan,

$$\langle S(X_P), Y_P \rangle = \langle X_P, S(Y_P) \rangle$$

yazılabilir. Buradan

$$\langle k_1 X_P, Y_P \rangle = \langle X_P, k_2 Y_P \rangle$$

$$k_1 \langle X_P, Y_P \rangle - k_2 \langle X_P, Y_P \rangle = 0$$

$$(k_1 - k_2) \langle X_P, Y_P \rangle = 0$$

bulunur. $k_1 \neq k_2$ olduğundan

$$\langle X_P, Y_P \rangle = 0$$

bulunur.

Tanım 4.1.4 (Gauss eğriliği). E^n de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir P noktasındaki şekil operatörü S(P) olmak üzere,

$$K: M \to \mathbb{R}$$

$$P \to K(P) = \det S(P)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona M nin Gauss eğrilik fonksiyonu ve K(P) değerine de M nin P noktasındaki Gauss eğriliği denir.

Teorem 4.1.5. E^n de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir P noktasındaki asli eğrilikleri $k_1(P), k_2(P), \ldots, k_{n-1}(P)$ ise,

$$K(P) = \sum_{i=1}^{n-1} k_i(P) = k_1(P).\ k_2(P).\ \ldots .\ k_{n-1}(P)$$

dir.

Teorem 4.1.6. E^n de bir hiperyüzey M ve $T_M(P)$ nin herhangi bir bazı $\psi = \{Y_1, Y_2, ..., Y_{n-1}\}$ ve E^n de bir konneksiyon D olsun. M nin bir vektör alanı Z ve birim vektör alanı $N = \frac{1}{\|Z\|} Z$ olmak üzere

$$K(P) = \frac{1}{\|Z(P)\|^{n-1}} \cdot \frac{\det \begin{bmatrix} D_{Y_1} Z \\ : \\ . \\ D_{Y_{n-1}} Z \\ Z(P) \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} Y_1 \\ : \\ . \\ Y_{n-1} \\ Z(P) \end{bmatrix}}$$

dır.

Tanım 4.1.7 (Ortalama eğrilik). E^n de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir P noktasındaki şekil operatörü S(P) olmak üzere,

$$H : M \to \mathbb{R}$$

$$P \to H(P) = İz\,(S(P))$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona M nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve H(P) değerine de M nin P noktasındaki ortalama eğriliği denir.

Tanım 4.1.8 (Eğrilik Çizgisi). E^n de bir hiperyüzey M ve M üzerinde bir eğri α olsun. α nın teğet vektör alanı T ve M nin şekil operatörü S olsun. Eğer T vektör alanı α eğrisi boyunca S nin karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa, α eğrisine M üzerinde bir eğrilik çizgisi denir.

Teorem 4.1.9. E^n de bir hiperyüzey M olsun. M üzerinde herhangi bir noktadan geçen eğrilik çizgileri ortogonal bir eğri demeti oluştururlar [10].

Tanım 4.1.10 (Eşlenik Tanjant Vektörler ve Asimptotik Doğrultu). E^n in bir hiperyüzeyi M ve $P \in M$ noktasındaki şekil operatörü S olsun. Eğer,
$X_P, Y_P \in T_M(P)$ için,

$$\langle S(X_P), Y_P \rangle = 0$$

ise bu iki tanjant vektöre eşleniktirler denir. Bir $X_P \neq 0$ tanjant vektörü için,

$$\langle S(X_P), Y_P \rangle = 0$$

ise X_P doğrultusuna, M nin P noktasındaki bir asimptotik doğrultu ve X_P yi $\forall P \in \alpha$ noktasında teğet vektörü kabul eden α eğrisine M üzerinde bir asimptotik çizgidir denir.

Teorem 4.1.11. E^n in bir hiperyüzeyi M olsun. S(X) = kX ve S(Y) = -kY olacak şekilde iki lineer bağımsız vektör alanı X ve Y ise X+Y ile X-Y vektör alanları asimptotik oldukları zaman ortogonal olurlar. Tersine X+Y ile X-Y ortogonal iseler birer asimptotik doğrultudurlar.

İspat X+Y asimptotik ise

$$\langle S(X+Y) , X+Y \rangle = 0$$

$$\langle kX - kY, X+Y \rangle = 0$$

$$\langle X-Y , X+Y \rangle = 0$$

dır. Benzer şekilde X-Y asimptotik ise

$$\langle S(X-Y) , X-Y \rangle = 0$$

$\langle kX + kY, X-Y \rangle = 0$

$\langle X+Y , X-Y \rangle = 0$

olur. Burada, X ve Y lineer bağımsız olduğundan, X-Y $\neq$ 0 ve X+Y $\neq$ 0 dır. O halde, X-Y ile X+Y ortogonaldir. Teoremin tersinin de ispatı açıktır. Gerçekten;

$\langle X-Y , X+Y \rangle = 0$ ise $X-Y = \frac{1}{k} S(X+Y)$ olacağından,

$\langle \frac{1}{k} S(X+Y) , X+Y \rangle = 0 \Rightarrow \frac{1}{k} \langle S(X+Y) , X+Y \rangle = 0$

$\Rightarrow k \neq 0$ dan $\frac{1}{k} \neq 0$ ve $\langle S(X+Y) , X+Y \rangle = 0$

olur, bu da X+Y nin asimptotik olması demektir.

Somut dünyadaki çoğu obje hortum şeklindedir ve bu bölüm boyunca 'genelleşmiş tubular' yani 'hortumlar' şeklinde ifade edeceğimiz bu obje sınıfını anlamakla ilgilidir. Genelleşmiş bir hortum(GT), bir 3D uzay eğrisi yani GT ekseni boyunca bazı düzlemsel kapalı eğrilerin çevrelenmesiyle oluşur. İlk olarak, GT sınıfı bir bütün olarak incelenir ve daha sonra parametrik eğrilerin ve esas yönler cümlesinin ilişkili olduğu yerdeki iki önemli GT alt sınıfı saptanır.

i) Dairesel Çapraz Kesişimli GT ler (CGT)

ve

ii) Kıvrımsız Eksenli GT ler (ZGT)

dir.

Daha sonra, genelleşmiş hortumun iki sınıfı yüzeysel ve izdüşümsel özelliklerine göre incelenir.

4.2. Genelleştirilmiş Hortum Yüzeyinin Özellikleri

Burada, GT nin genel sınıfının yüzeysel ve izdüşümsel özelliklerini inceliyoruz.

$\Gamma:(a,b)\to\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3$ de bir eğri olsun. Eğer Γ, s yay parametresi ile parametrelendirilmişse Frenet çatıları $(\vec{t},\vec{n},\vec{b})$ şöyle açıklanır;

$$\frac{\partial\Gamma(s)}{\partial s}=\vec{t} \quad , \quad \frac{\partial\vec{t}}{\partial s}=k\vec{n} \quad , \quad \frac{\partial\vec{n}}{\partial s}=-k\vec{t}+\tau\vec{b} \quad , \quad \frac{\partial\vec{b}}{\partial s}=-\tau\vec{n}$$

$\vec{t}$, $\vec{n}$ ve $\vec{b}$ vektörleri $\mathbb{R}^3$ de ortonormal çatı oluştururlar. "κ" ve "τ" sırasıyla Γ nın eğriliği ve torsiyonudur. $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$, κ ve τ hepsi "s" in fonksiyonlarıdır. Γ eksenli GT şu şekilde yazılabilir.

$$X(s,t)=\Gamma(s)+u(t).(\cos t\,\vec{n}+\sin t\,\vec{b}) \ , \ 0\le t\le 2\pi$$

GT regüler ve iyi tanımlı yüzeyler olduğundan, biz ek sınırlamalar ortaya koyuyoruz; "u" iki kere diferensiyellenebilir, $u(t)>0$ ve $u(0)=u(2\pi)$ dir. Yüzeydeki normal $\vec{N}(s,t)$ iki kısmi türevin vektörel çarpımı olarak gösterilebilir.

$$X_t=0+u'\cos t\vec{n}-u\sin t\vec{n}+u'\sin t\vec{b}+u\cos t\vec{b}$$

$$=(u'\cos t-u\sin t)\vec{n}+(u'\sin t+u\cos t)\vec{b}$$

$$X_s=\vec{t}+u\cos t(-k\vec{t}+\tau\vec{b})+u\sin t(-\tau\vec{n})$$

$$=(1-ku\cos t)\vec{t}-u\tau\sin t\vec{n}+u\tau\cos t\vec{b}$$

olup, yüzey normali;

$$\vec{N}=\frac{X_t\Lambda X_s}{\|X_t\Lambda X_s\|}$$
$$=uu'\tau\vec{t}+(1-ku\cos t)[(u'\sin t+u\cos t)\vec{n}+(u\sin t-u'\cos t)\vec{b}]$$

dır.

GT lerin yüzeysel özelliklerini çalışabilmek için, birinci ve ikinci temel formlarının katsayılarını açıklamak gerekir. Burada,

$$E = \langle \mathrm{X}_t . \mathrm{X}_t \rangle$$

$$= \langle (0, u' \cos t - u \sin t, u' \sin t + u \cos t), (0, u' \cos t - u \sin t, u' \sin t + u \cos t) \rangle$$

$$= 0 + u'^2 \cos^2 t + u^2 \sin^2 t - 2uu' \cos t \sin t + u'^2 \sin^2 t + u^2 \cos^2 t + 2uu' \sin t \cos t$$

$$= u'^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) + u^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)$$

$$= u^2 + u'^2$$

dir. Ayrıca

$$F = \langle \mathrm{X}_s . \mathrm{X}_t \rangle$$

$$= \langle (1 - ku \cos t, -u\tau \sin t, u\tau \cos t), (0, u' \cos t - u \sin t, u' \sin t + u \cos t) \rangle$$

$$= 0 - uu'\tau \cos t \sin t + u^2 \tau \sin^2 t + uu' \cos t \sin t + u^2 \tau \cos^2 t$$

$$= u^2 \tau (\sin^2 t + \cos^2 t)$$

$$= u^2 \tau$$

dır. Son olarak

$$G = \langle \mathrm{X}_s . \mathrm{X}_s \rangle$$

$$= \langle (1 - ku \cos t, -u\tau \sin t, u\tau \cos t), (1 - ku \cos t, -u\tau \sin t, u\tau \cos t) \rangle$$

$$= (1 - ku \cos t)^2 + u^2 \tau^2 \sin^2 t + u^2 \tau^2 \cos^2 t$$

$$= (1 - ku \cos t)^2 + u^2 \tau^2$$

bulunur. Ayrıca,

$$e = \mathrm{X}_{tt}.\vec{N} = \frac{1}{\left\|\vec{N}\right\|}(1-k\,u\cos t)(u\,u'' - u^2 - 2(u')^2)$$

$$f = \mathrm{X}_{ts}.\vec{N} = \frac{1}{\left\|\vec{N}\right\|}\tau[k\,u\,u'(u\sin t - u'\cos t) - (1-k\,u\cos t)(u^2 + (u')^2)]$$

$$g = \mathrm{X}_{ss}.\vec{N} = \frac{1}{\left\|\vec{N}\right\|}[\tau u^2 u'(k\,\tau\sin t - k'\cos t) - (1-k\,u\cos t)(u^2\tau^2 + u\,u'\tau')$$

$$+ k(1-k\,u\cos t)^2(u'\sin t + u\cos t)]$$

şeklinde elde edilir. Şimdi GT lerin belirli düzgün yüzey özelliklerine sahip olan sınıflarını göz önünde bulunduralım. Öncelikle, diferensiyel geometriden çok iyi bilinen iki teoreme yer verelim [11].

Teorem 4.2.1 (Eğriliğin Çizgileri Teoremi). Bir parça üzerindeki umbilik olmayan noktasında parametre eğrilerinin yönleri esas yönlerinin yönündedir $\Leftrightarrow$ F=f=0 noktalarında ise [12].

Burada F ve f sırasıyla birinci ve ikinci temel formdur ve bir umbilik noktasında her yön bir esas yöndür.

Teorem 4.2.2 (Geodezik Teoremi). Yüzey üzerindeki tüm düz çizgiler geodeziktir. Bir eğri düz çizgi değilse bir geodeziktir $\Leftrightarrow$ Eğrinin Oskulatör düzlemi her noktadaki yüzey için tanjant düzlemine diktir [12].

Eğriler için doğal parametrelemenin genel kavramları çok iyi açıklamasına rağmen, eğrinin birim hızlı parametresi yüzeyler için doğal parametrelemede neyin göz önünde bulundurulduğu tam olarak açık değildir. [15] te yüzeyler için birçok doğal tasvir öneriliyor. Hepsi yüzeyin diferensiyel geometrik özellikleriyle ilişkilidir. Bu nedenle [15] te, yüzey için iki tane doğal parametreleme yöntemi öneriliyor. Bunlar parametre eğrilere sahip olmanın karşılığı olarak ya eğriliğin çizgileri ya da asimptotik çizgilerdir.

Burada bunları daha fazla göz önünde bulundurmayacağız. Fakat eğriliğin çizgilerine gelince, bir soru soruyoruz; "GT nin parametrik eğrileri olan s -ve t - ne zaman, aynı

zamanda da onun eğrilik çizgileri oluyor?" Bu soruya cevap vermek için sıradaki teoremleri verelim.

Teorem 4.2.3. GT nin parametre eğrileri, eğrilik çizgileridir $\Leftrightarrow$ Γ ekseni torsiyon-free yani $\tau=0$ ise [13].

Fakat, gerçek şu ki GT ler ya da ZGT ler bu tek özelliğe sahip olmaları onları önemli bir alt sınıf yapıyor. Parametrik eğrinin aynı zamanda "geodezik" olduğunu bilmek yoğun bazlı şekil elde etmek için çok kullanışlıdır. Böylece, GT parametrik eğrilerinin ne zaman eğriliğin çizgisi ya da "geodezik" olduğuyla ilgileniyoruz. Burada, sadece GT nin t parametrik eğrisiyle –yani çapraz kesişimlerle- ilgili soruyu göz önünde bulunduruyoruz. Şimdi GT nin çapraz kesişimini göz önünde bulunduran sıradaki teoremi ispatlayacağız.

Teorem 4.2.4. GT nin non-lineer çapraz kesişimleri 'geodezik'tir $\Leftrightarrow$ GT; ya ZGT yada CGT dir.

İspat: GT ekseninin üzerinde bulunan bazı $\Gamma(s)$ noktalarındaki çapraz kesişimli olan GT nin 'oskulatör' düzlemi $\vec{t}(s)$'e her zaman dik, $\Gamma(s)$'e teğettir. Fakat sonra, GT yüzeyinde bir nokta olan $X(s,t)$ için, $\vec{t}(s)$, $\vec{N}(s,t)$ ya tam olarak dik olduğu zaman, çapraz kesişimli eğrinin 'oskulatör' düzlemi, teğet düzlemine dik olur.
$n_t=\vec{N}(s,t).\vec{t}=u\,u'\,\tau$ ve $u>0$ olduğu için, 'Geodezik' teoreminden $u'=0$ yada $\tau=0$ olduğu zaman $n_t=0$ sonucu çıkar.

Teorem 4.2.5. GT nin non-lineer çapraz kesişimleri eğrilik çizgisidir eğer GT ya ZGT yada CGT ise.

4.3. ZGT' lerin Özellikleri

Bu bölümde, ZGT ler ve CGT lerin yüzeysel ve izdüşümsel özellikleri üzerinde duracağız. Burada gerekli olan, izdüşüm modelini açıklamaktır. Genelde izdüşüm, ya ortografiktir yada perspektiftir. GT leri analiz etmek için kordon, kablo gibi objeler genelde uzun ve dolambaçlı olduğundan ortografik model gerçekçi değilken, kuramsal

perspektif model çalışmak için zordur. Çoğu GT lere gösterilen yoğunluğun az olması ortografik modeli gerçek izdüşüm geometrisine kötü bir yaklaşımdır. Bunun yerine burada bir parametre ve perspektif, diğerlerine göre ortografik olan izdüşüm modeli olarak 'parametrik-perspektif' dediğimiz bir model kullandık. Özellikle daha uzatılmış s-parametresine göre yön göstermek perspektif iken, yoğun parametre t-ye göre yön göstermenin ortografik olduğunu varsaydık. (Yani $\vec{V}(s)$ eksen parametresi bir fonksiyon, fakat çapraz kesişimli değil)



Şekil 4.3.1. Sandalyenin çatısı ZGT ye örnektir. Bükülerek değil eğilerek inşa edilmiş, düz ve dairesel hortum.

Şekil 4.3.1. deki ZGT den görüldüğü gibi kıvrımsızlık, ayrıntılı düzlem olan GT eksenine ihtiyaç duymayan yerel bir özellik, yani, $\frac{\partial \vec{b}}{\partial s}$=0. ZGT için ispatlamamız istenilen özelliklerden biri de, onun parametre eğrileri aynı zamanda eğrilik çizgileridir. Gauss eğriliği K=0 olduğu yerde ve aynı zamanda ZGT nin parametrik eğrileri boyunca uzanan parabolik çizgiler oldukları sonucu çıkar. Bu yukarıda verilen birinci ve ikinci temel formlar ve sonra

$$K=\frac{eg-f^2}{EG-F^2}=0$$

çözülen açıklamalarda $\tau=0$ yerine konarak da açıkça görülebilir. ZGT nin bu esas özellikleri istenilendir. Sonuç olarak, konveks, konkav ve yüzeydeki hiperbolik bölgeler arasındaki sınır, objenin çapraz kesişimleri ve meridyenleri üzerine konmasıyla sınırlanmıştır.

Lemma 4.3.1. Verilen limb P noktasından geçen yüzeydeki tüm eğriler şekil düzlemindeki aynı çizgi olarak izdüşerler [14].

Teorem 4.3.2 (ZGT Kenar Teoremi). Aynı s değerine sahip herhangi iki tane ZGT kenar noktası için, bu noktalardaki teğetleri paraleldir.

İspat: GT, ZGT olduğu için $\tau=0$ dır. Yukarıda verilen kısmi türev X_s in açıklamasında $\tau=0$ yerine konularak, meridyene göre $\vec{t}(s)$ birim tanjant vektörü elde edilir. Böylece omurgadaki $\Gamma(s)$ in çapraz kesişimli, bütün 3 boyutlu meridyenleri paraleldir. $\Gamma(s)$ deki meridyenler uzayda paralel oldukları ve s-e uygun izdüşümleri ortografik olduğu için, izdüşürülmüş meridyenleri de paraleldir. Fakat sonra, Lemma 4.3.1. i kullanarak, aynı s değerine sahip olan iki tane ZGT kenar noktalarının teğetleri de paralel olmak zorundadır.



Şekil 4.3.2. İki tane ZGT için kenar şekilleri



Şekil 4.3.3. Aynı ZGT ler için yoğunluk şekilleri

Uygun limb noktalar ZGT kenar teoremini kullanarak uygunlaştırılmalarına rağmen, ZGT eksenine yada çapraz kesişimli eğrilere ilişkin detaylı varsayımlar olmadan elde edilen kenar noktalarından, şekil eksenine kesin karar verilemez. Fakat, eğer bir çapraz kesişimli eğrinin iki kıvrımlı dönmeli simetrik olduğunu varsayarsak, sonra iki uygun kenar noktasını birbirine bağlayan orta nokta ZGT şekil ekseninin üstünde olur.

Şekil 4.3.2. ve Şekil 4.3.3. de gösterilen ZGT şekillerinden, ZGT yüzeyindeki yansıma bilgisinin şekil elde etmede kritik olduğu görülür. Şekil 4.3.2. de sağda ve solda gösterilen ZGT kenarları çok benzemesine rağmen, Şekil 4.3.3. de sağda ve solda gösterilen yansıma şekilleri, belirtilen ZGT yüzeylerinin birbirinden çok farklı olduğunu göstermektedir.

KAYNAKLAR

1. Hacısalihoğlu, H.H. "Diferensiyel Geometri", İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi yayınları-1983.
2. Hacısalihoğlu, H.H. "Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş", Fırat Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi yayınları. Mat. No:2-1980.
3. Brickell, F. and Clark, R.S. "Differentiable Manifolds An Introduction" Van Nostvand Reinhold Company London-New York Cincinnati Toronto Melbourne-1870.
4. Humphreys, E.J. "Introduction to Lie Alcebreas and Representation Theory" Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin-1972.
5. Karger, A. and Novak, J. "Space Kinematics and Lie Groups" Gordon and Breach Science Publishers-1985.
6. Westenholz, C.V. "Differential Forms In Mathematical Physics" Elsevier Sciense Publishing Company, Inc 52 Vanderbilt Avenve New York-1991.
7. Prakash, N. "Differential Geometry-An Integrated Approach" Tata Mc graw-Hill Publishing Company Limited-1981.
8. Curtis, M.L. "Matrix Groups" Rice University Weiss School of Natural Sciences Department of Mathematics-1984.
9. Ikeuchi, K. and Horn, B.K.P., Numerical Shape from Shading and Occluding Boundaries, "Artificial Intelligence", vol. 17, pp. 141-184-1981.
10. Ponce, J., Chelberg, D., and Mann, W., Analytical properties of Generalized Cylinders and their projections, in Proceedings of the First International Conference on Computer Vision-1987.
11. Spivak, M., "A comprehensive introduction to differential geometri", Publish or Perish Pres, Vol. 3, 2nd Edition, Berkeley-1979.
12. Zerroug, M. and Nevatia, R., Quasi-Invariant Properties and 3D Shape Recovery of Non-Straight, Non-Constant Generalized Cylinders, Proc. of the Darpa Image Understanding Workshop, pp. 725-735, Wash., D.C. April 18-21-1993.
13. Horn, B.K.P., Shape from Shading: A Method for Obtaining the Shape of a Smooth Opaque Object From One View, PhD Thesis, Dept. of Electrical Engineering, MIT-1970.

14. Gross, A. and Latecki, L., Digitizations preserving topological and differential geometric properties, CVGIP:IU, to appear-1994
15. Brady, J.M., Ponce, J., Yuille, A., Asada, H., Describing Surfaces, in Proceedings of the 2nd Int'l Symposium on Robotics Research, Harasuja and Inoue, MIT Pres-1985.

ÖZGEÇMİŞ

Mustafa KÜKCÜ, 1980 yılında Kayseri'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kayseri'de tamamladı. 2001 yılında Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü'nden mezun oldu. 2003 yılında Erciyes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen Kayseri ili Akkışla ilçesi Akkışla Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

Adres : Altınoluk Mah. Sakar Cad. Derya 1 Apt. 17/14 Melikgazi/KAYSERİ
E-posta : mkukcu@gmail.com