T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

NÖTRAL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Hazırlayan
Bengü ÇINA

Danışman
Doç. Dr. M. Tamer ŞENEL
Prof. Dr. Tuncay CANDAN

Doktora Tezi

Aralık 2017
KAYSERİ

T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

NÖTRAL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Hazırlayan
Bengü ÇINA

Danışman
Doç. Dr. M. Tamer ŞENEL
Prof. Dr. Tuncay CANDAN

Doktora Tezi

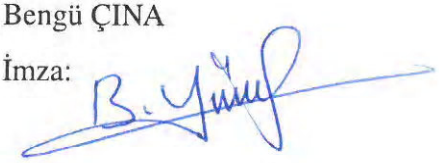
Aralık 2017
KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Bengü ÇINA

İmza:



YÖNERGEYE UYGUNLUK

"Nötral Diferensiyel Denklemlerin Salınım Yapmayan Çözümlerinin Varlığı " adlı Doktora tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan
Bengü ÇINA

Danışman
Doç. Dr. M. Tamer ŞENEL

Matematik ABD Başkanı
Prof. Dr. Hüseyin ALTINDİŞ

Doç. Dr. M. Tamer ŞENEL ve Prof. Dr. Tuncay CANDAN danışmanlığında **Bengü ÇINA** tarafından hazırlanan **"Nötral Diferensiyel Denklemlerin Salınım Yapmayan Çözümlerinin Varlığı "** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Doktora** tezi olarak kabul edilmiştir.

20.12.2017

JÜRİ :

Danışman	:	Doç. Dr. M. Tamer ŞENEL
Üye	:	Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN
Üye	:	Doç. Dr. Adnan TUNA
Üye	:	Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU
Üye	:	Doç. Dr. Halis BİLGİL

ONAY :

Bu tezin kabülü Enstitü Yönetim Kurulunun 26/12/2017 tarih ve 2017/55-11 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

26. / 12 /2017

Prof. Dr. Mehmet AKKURT
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ / TEŞEKKÜR

"Nötral Diferensiyel Denklemlerin Salınım Yapmayan Çözümlerinin Varlığı" isimli tez çalışmasının seçiminde, yürütülmesinde, sonuçlandırılmasında ve sonuçlarının değerlendirilmesinde her türlü destek ve yardımlarını esirgemeyen, yüksek hoşgörü ve engin bilgileri ile beni yönlendiren saygıdeğer hocalarım Sayın Prof. Dr. Tuncay Candan ve Sayın Doç. Dr. M. Tamer Şenel'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tezin yazım aşamasında emeğini esirgemeyen Bilgisayar Mühendisliği Bölümü Arş. Gör. Ömür ŞAHİN'e yardımlarından dolayı teşekkür ederim.

Yaşamımın her anında ve her konuda büyük bir özveriyle bana destek olan anneme, babama ve eşime sabır ve anlayışları için minnettarım.

Bu tez çalışmasını, özellikle sıkıntıya düştüğüm her anda varlıkları ile bana güç veren sevgili oğullarım Alpagu ile Tardu'ya ithaf ediyorum.

Bengü ÇINA

Kayseri, Aralık 2017

NÖTRAL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Bengü ÇINA
Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Doktora Tezi, Aralık 2017
Danışman : Doç. Dr. M. Tamer ŞENEL
Danışman : Prof. Dr. Tuncay CANDAN

ÖZET

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde tez çalışmasının önemi ve konunun tarihsel gelişimi ile ilgili bilgiler verilmiştir.

Birinci bölümde fonksiyonel diferensiyel denklem ve salınım teorisi ile ilgili temel bilgiler örneklerle açıklanmıştır. Ayrıca önemli bazı sabit nokta teoremleri verilmiştir.

İkinci bölümde, ikinci mertebeden lineer olmayan forced nötral diferansiyel denkleminin salınımsız çözümlerinin varlığı için bazı yeter şartlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, gecikme argümentli ikinci mertebeden nötral diferensiyel denkleminin salınımsız çözümlerinin davranışı incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, dağıtılmış argümentli iki nötral diferensiyel denklemlerin salınımsız çözümlerinin varlığı için yeterli şartlar verilmiştir.

Beşinci bölümde, yüksek mertebeden nötral diferensiyel denklem ele alınmış ve çözümlerinin davranışı incelenmiştir.

Altıncı bölümde, ele alınan denklemlere ilişkin sonuçlar verilmiştir.

Bu tezde yapılan ispatlar Banach daralma prensibi kullanılarak yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta, ikinci mertebe, Banach daralma prensibi, salınımsız çözüm.

EXISTENCE OF NONOSCILLATION SOLUTIONS OF NEUTRAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Bengü ÇINA
Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
Ph.D. Thesis, December 2017
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. M. Tamer ŞENEL
Supervisor: Prof. Dr. Tuncay CANDAN

ABSTRACT

This thesis consists of six chapters.

First, some information is given about the importance of the thesis and historical development of the concept.

Chapter one contains some basic definitions and examples about functional differential equation and oscillation theory.

In chapter two, some sufficient conditions are given for the existence of non-oscillatory solutions of the second order nonlinear forced neutral differential equation.

Chapter three deals with non-oscillatory solutions of the second-order neutral differential equation with the delay argument.

In chapter four, some sufficient conditions are given for the existence of non-oscillatory solutions of two neutral differential equations with distributed deviating arguments.

In chapter five, we consider higher order neutral differential equations and we investigate behavior of their solutions.

In chapter six, we give some conclusions about the considered equations.

The results in this thesis are proved by using Banach constraction principle.

Keywords: Fixed point, Second-order, Banach contraction principle, Nonoscillatory solution.

İÇİNDEKİLER

NÖTRAL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK SAYFASI i

YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI ii

KABUL VE ONAY iii

ÖNSÖZ / TEŞEKKÜR iv

ÖZET v

ABSTRACT vi

İÇİNDEKİLER vii

KISALTMALAR ix

GİRİŞ **1**

1. BÖLÜM
TEMEL TANIM VE TEOREMLER

1.1. Fonksiyonel Diferensiyel Denklemler **3**

1.2. Salınım Teorisi **5**

2. BÖLÜM
İKİNCİ MERTEBEDEN NÖTRAL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

2.1. Giriş **9**

2.2. Temel Sonuçlar **11**

3. BÖLÜM
İKİNCİ MERTEBEDEN GECİKME ARGÜMENTLİ NÖTRAL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

3.1. Giriş **21**

3.2. Temel Sonuçlar **22**

4. BÖLÜM
İKİNCİ MERTEBEDEN SÜREKLİ DAĞITILMIŞ ARGÜMENTLİ NÖTRAL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

4.1. Giriş **33**

4.2. Temel Sonuçlar **35**

5. BÖLÜM
YÜKSEK MERTEBEDEN NÖTRAL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

5.1. Giriş **51**

5.2. Temel Sonuçlar **52**

6. BÖLÜM
SONUÇLAR

6.1. Sonuçlar **62**

KAYNAKLAR **65**

ÖZGEÇMİŞ **69**

KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar
$\sum$	:	Toplam Sembolü
$C(A, B)$	:	A kümesinden B kümesine sürekli fonksiyonlar kümesi
σ	:	İleri Sıçrama Operatörü
τ	:	Gecikme Argümenti
$\|.\|$	:	Norm
Sx	:	Daralma Dönüşümü

GİRİŞ

Birçok gerçek dünya probleminin matematiksel modellemesi, diferensiyel denklemlerin ortaya çıkmasına neden olur. Modellemeler, dağıtılmış gecikmeler kadar ayrık zaman gecikmelerine de sahip olabilirler. Salınım teorisi, diferensiyel denklemlerin kalitatif (nitel) teorisinin önemli bir dalıdır. Salınım teorisinin temelleri 1836'da Sturm tarafından yayımlanan çalışmasındaki ikinci basamaktan lineer diferensiyel denklemlerin çözümlerinin sıfırları ile ilgili sonuçlara dayanmaktır [1]. O zamandan beri, lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemlerin farklı sınıfları için çözümlerinin salınımlılığı birçok araştırmacının ilgisini çekmiştir. Bu konuya olan ilgi birçok kitap [2–7] ve makaleye [8–26] yansımıştır.

Birinci mertebeden adi diferensiyel denklemler salınım davranışına sahip olmadığından salınım teorisindeki çalışmaların çoğu ikinci veya daha yüksek mertebeden adi diferensiyel denklemler etrafında merkezlenmiştir. Bernoulli, sonlu uzunlukta bir tüp içinde titreşimli ses problemi üzerine çalışmış ve sapma argümentleriyle birinci mertebeden adi diferensiyel denklemlerin özelliklerini incelemiştir. Myskis kitabında birinci mertebeden sapma argümentlerine sahip diferensiyel denklemlerin çeşitli salınım problemlerini incelemiştir [27]. Sturm, ısı iletimi problemi ile çalışırken salınım kavramını literatüre kazandırmış ve daha sonra, adi diferensiyel denklemlerin salınım teorisi, kalitatif teoride önemli bir araştırma alanı olmuştur.

1950 yılından bu yana sapma argümentlerine sahip diferensiyel denklemlerinin salınım teorisi, dünyanın birçok uygulamalı matematikçisinin yanı sıra diğer bilim adamlarının da dikkatini çekmiştir. Farklı bilim dallarında fonksiyonel diferensiyel denklemler ele alınmaya başlamıştır. Bu yaklaşımın bir parçası olarak, fonksiyonel diferensiyel denklemlerin salınım teorisi son yıllarda çok hızlı gelişti. İlk kez, G. S. Ladde, V. Lakshmikantham ve B. G. Zang [28] fonksiyonel diferensiyel denklemlerin tüm çözümlerinin salınım koşullarını incelemiştir. L. H. Erbe, Q. K. Kong ve B. G. Zhang kitaplarında 1984 yılına kadar yapılan çalışmaları yorumlamış ve sapma

argümentinin çözümlerin salınımı üzerindeki etkisini incelemişler; ancak, nötral diferensiyel denklemlere değinmemişlerdir.

Nötral diferensiyel denklemler astrofizik, atom fiziği, gaz ve akışkanlar mekaniği vb. bilimlerinden gelen birçok problemi modellemek için kullanılır. Bu nedenle, bu denklemlerin çözümlerinin kalitatif davranışının analizi uygulamalar için oldukça önemlidir. Son yıllarda nötral diferensiyel denklemlerin çeşitli sınıflarının çözümlerinin salınımlı ve salınım yapmayan davranışı, bir çok araştırmacı tarafından incelenmeye başlamıştır. Biz bu tez çalışmasında belli tipte nötral diferensiyel denklemlerin salınım yapmayan çözümlerinin varlığına ilişkin sonuçlar vereceğiz.

1. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

1.1. Fonksiyonel Diferensiyel Denklemler

Tanım 1.1.1. Fonksiyonel Diferensiyel Denklem

Adi diferensiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve türevleri sadece t anında hesaplanır. Gerçek hayatta bazı olaylar sadece şu anki zamana değil geçmiş ve gelecek zamana da bağlı olabilir. Bu tür diferensiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve türevleri sadece t anında değil $t-\tau$ veya $t+\tau$ ($\tau > 0$) anında da hesaplanır. Bu tür diferensiyel denklemlere fonksiyonel diferensiyel denklemler denir.

Tanım 1.1.2. Gecikmeli (Delay, Retarted) Fonksiyonel Diferensiyel Denklemler

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau(t))), \qquad \tau(t) \geq 0$$

şeklindeki diferensiyel denklemlerdir. Burada en yüksek mertebeden türev t anında, diğerleri ise t veya t den daha önceki zamanlarda hesaplanır.

Örnek 1.1.1.

$$x'(t) = x(t-5) + tx(2t) + 2$$

$$x''(t) = 3x'(t) - x(t-1) + 2t$$

$$x'''(t) = 2tx(t) - (t+5)x'(t-\pi)$$

denklemleri, gecikmeli fonksiyonel diferensiyel denklemlerdir.

Tanım 1.1.3. İleri (Advanced) Fonksiyonel Diferensiyel Denklemler

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t + \tau(t))), \qquad \tau(t) \geq 0$$

şeklindeki diferensiyel denklemlerdir. Burada en yüksek mertebeden türev t anında, diğerleri ise t veya t den daha ileriki zamanlarda hesaplanır.

Örnek 1.1.2.

$$x'(t) = -x(t+1) + x(t + \sqrt{t}) - 8$$

$$x''(t) = x'(t) - x(t + \pi)$$

$$x'''(t) = 5tx'(t) + x'(t + \sqrt[3]{t}) - \sin t$$

denklemleri advanced (ileri) fonksiyonel diferensiyel denklemdir.

Tanım 1.1.4. Nötral Fonksiyonel Diferensiyel Denklemler

En yüksek mertebeden türevin sadece t ye bağlı değil sapma argümentlerinin bulunduğu terimlerde de görüldüğü fonksiyonel diferensiyel denklemlerdir.

Örnek 1.1.3.

$$x'(t) = (t^2 - 1)x'(t-4) + x(t-2) + \sin t$$

$$x'(t) + \frac{1}{3t-1}x'(t-1) - \cos(5t) = 0$$

$$x''(t) - \sqrt{t+1} - x''(t-\pi) + 5t + 12 = 0$$

$$x'''(t) + 3t^2x''(t) - x'''(t-7) + 2tx(t) = 0$$

denklemleri, nötral fonksiyonel diferensiyel denklemdir.

1.2. Salınım Teorisi

Tanım 1.2.1. Salınım (Oscillation)

Salınım ile ilgili aşağıdaki gibi farklı tanımlar yapılabilmektedir:

i) Eğer aşikar olmayan $x(t)$ çözümü, $t \geq t_0$ için $[t_0, \infty)$ aralığında keyfi sayıda sıfıra sahipse $x(t)$ çözümüne salınımlıdır; aksi halde yani $x(t)$ çözümü $[t_0, \infty)$ aralığında sonlu sayıda sıfır yerleri varsa salınım yapmayan denir.

ii) Eğer, $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ olacak şekilde $x(t)$ çözümünün sıfırlarının bir $\{t_n\}$ $(x(t_n) = 0)$ dizisi varsa $x(t)$ çözümüne salınımlıdır; aksi halde yani her $t \geq t_1$ için $x(t) \neq 0$ olacak şekilde bir t_1 varsa $x(t)$ çözümüne salınım yapmayan denir.

iii) Eğer $x(t)$ çözümü, keyfi $T > 0$ için (T, ∞) aralığında işaret değiştiriyorsa $x(t)$ çözümüne salınımlıdır; aksi halde yani $x(t)$ sonunda pozitif veya negatif oluyorsa salınım yapmayan denir.

Bir diferensiyel denklemin her $x(t)$ çözümü salınımlı ise bu denkleme salınımlı denklem; aksi halde salınım yapmayan denklem denir.

Örnek 1.2.1. $x''(t) + x(t) = 0$ denklemi $x_1 = \cos(t)$ ve $x_2 = \sin(t)$ salınımlı çözümlerine sahiptir. Gerçekten $(t_n) = (\frac{2n+1}{n})\pi$ alırsak $t_n \to \infty$ için $\cos(t_n) = 0$ ve $(t_n) = (n\pi)$ alırsak $t_n \to \infty$ için $\sin(t_n) = 0$ olur. Dolayısıyla bu denklem salınımlıdır.

Örnek 1.2.2. $x''(t) - x(t) = 0$ denkleminin $x_1 = \exp(t)$ ve $x_2 = \exp(-t)$ çözümleri salınım yapmayan çözümlerdir, dolayısıyla bu denklem salınım yapmayan denklemdir.

Örnek 1.2.3. $x''(t) - x(-t) = 0$ denkleminin bir çözümü $x_1 = \sin(t)$ salınımlı iken diğer çözümü $x_2 = \exp(t) + \exp(-t)$ salınım yapmayan çözümdür.

Örnek 1.2.4. $x'''(t) - x''(t) + x(t) = \sin(t)$ denkleminin bir $x(t) = \frac{2}{5}\sin(t) + \frac{1}{5}\cos(t)$ çözümü salınımlıdır.

Örnek 1.2.5. $t^2x''(t) + tx'(t) = t + t^2$ denkleminin genel çözümü $x(t) = C_1 + C_2 \ln t + t + \frac{1}{4}t^2$ salınım yapmaz. Dolayısıyla denklem salınım yapmayan çözümdür.

Tanım 1.2.2. Sabit Nokta

Bir X kümesinin yine X kümesi içine bir dönüşümüne X in kendi içine bir dönüşümü denir. f fonksiyonu X in kendi içine bir dönüşümü olsun. X nin $f(x) = x$ koşulunu sağlayan her bir x elemanına f nin bir sabit noktası denir.

Tanım 1.2.3. Banach Daralma Dönüşümü

(X, d) tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde bir $k \in (0, 1)$ var ise T ye Banach Daralma Dönüşümü denir.

Teorem 1.2.1. Banach Daralma Dönüşümü Prensibi

Bir tam metrik uzay üzerindeki her daralma (contraction) dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: (X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir daralma dönüşümü olmak üzere k daralma dönüşümünün sabiti olsun. X de herhangi bir x_0 sabit nokta alalım ve her $n \geq 1$ için X de bir

$$x_n = f(x_{n-1})(= f^n(x_0))$$

dizisi tanımlayalım. f bir daralma dönüşümü olduğundan her $n \geq 1$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq kd(x_{n-1}, x_n)$$

olur. Buradan her $n \geq 1$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq kd(x_{n-1}, x_n) \leq k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq ... \leq k^n d(x_0, x_1)$$

elde edilir. Her $m > n$ için üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq (k^n + k^{n+1} + ... + k^{m-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

sonucuna varırız. O halde x_n Cauchy dizisidir ve X tam olduğundan x_n yakınsaktır. $x_n \to a \in X$ alalım. f in sürekliliğinden

$$a = \lim_{t\to\infty} x_n = \lim_{t\to\infty} f(x_{n-1}) = f(a)$$

yazabiliriz ki bu a nın f in sabit noktası olduğunu gösterir.
Son olarak f in bir tek sabit noktası olduğunu gösterelim. a ve b f in sabit noktaları olsun. Dolayısıyla

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq k d(a, b)$$

dir. $0 < k < 1$ olduğundan $d(a, b) = 0$ ve buradan da $a = b$ dir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 1.2.2. Schauder Sabit Nokta Teoremi

X bir Banach uzayı, S de X in boş olmayan kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. Ayrıca TS, X in yerel kompakt bir alt kümesi olmak üzere $T : S \to S$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda T en az bir sabit noktaya sahiptir. Yani bir $x \in S$ vardır öyle ki $Tx = x$ olur.

Teorem 1.2.3. Schauder-Tychonov Sabit Nokta Teoremi

X lokal konveks lineer uzayı, S, X in bir kompakt konveks bir alt kümesi ve $T(S)$ kompakt olmak üzere $T : S \to S$, sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda T nin S de bir sabit noktası vardır.

Teorem 1.2.4. Knaster Sabit Nokta Teoremi

X, $\leq$ ile sıralanmış kısmi sıralı Banach uzayı, M, X in bir alt kümesi olmak üzere,
i) M nin infimumu M ye ait ve M nin boş kümeden farklı her alt kümesinin M ye ait bir

supremumu var,

ii) $T : M \to M$ artan bir dönüşüm yani $x \leq y$ ise $Tx \leq Ty$

olsun. Bu durumda T nin M içinde bir sabit noktası vardır.

Teorem 1.2.5. Krasnoselskii Sabit Nokta Teoremi

X bir Banach uzayı, Q , X in sınırlı kapalı konveks bir alt kümesi ve A ve B her $x, y \in Q$ için $Ax + By \in Q$ olacak şekilde Q dan X içine dönüşümler olsun. Eğer A bir daralma ve B düzgün sürekli ise $Ax + Bx = x$ denkleminin Q da bir çözümü vardır.

2. BÖLÜM

İKİNCİ MERTEBEDEN NÖTRAL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

2.1. Giriş

Bu bölümde ikinci mertebeden lineer olmayan nötral diferensiyel

$$\left(r(t)\left(x(t)-p(t)x(t-\tau)\right)'\right)'+f_1(t,x(\sigma_1(t)))-f_2(t,x(\sigma_2(t)))=g(t) \tag{2.1}$$

denklemi incelenecektir. Burada $p,\sigma_i,g\in C([t_0,\infty),\mathbb{R})$, $\tau>0$, $r\in C([t_0,\infty),(0,\infty))$ ve $\lim_{t\to\infty}\sigma_i(t)=\infty$, $i=1,2$ şeklindedir.

Bölüm boyunca, $i=1,2$ için $f_i(t,x)\in C([t_0,\infty)\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ fonksiyonu x e göre azalmayan; $i=1,2$ ve $x\neq 0$ için $xf_i(t,x)>0$ ve $t\in[t_0,\infty)$ ve $x,y\in[a,b]$ için

$$|f_i(t,x)-f_i(t,y)|\leq q_i(t)|x-y| \tag{2.2}$$

olduğunu kabul edelim. Burada $q_i\in C([t_0,\infty),\mathbb{R}^+)$, $i=1,2$, ve $[a,b]$ ($0<a<b$ veya $a<b<0$) herhangi bir kapalı aralıktır.

Ayrıca kabul edelim ki

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{s}\frac{q_i(u)}{r(s)}duds<\infty,\quad i=1,2, \tag{2.3}$$

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{s}\frac{|f_i(u,d)|}{r(s)}duds<\infty,\quad d\neq 0,\ i=1,2, \tag{2.4}$$

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{s}\frac{|g(u)|}{r(s)}duds<\infty \tag{2.5}$$

sağlansın.

Yang, Zhang and Ge [29] daki çalışmalarında

$$(x(t)-p(t)x(t-\tau))''+f_1(t,x(\sigma_1(t)))-f_2(t,x(\sigma_2(t)))=0 \tag{2.6}$$

ve

$$(x(t)-p(t)x(t-\tau))''+f_1(t,x(\sigma_1(t)))-f_2(t,x(\sigma_2(t)))=g(t). \tag{2.7}$$

denklemlerinin salınım yapmayan çözümlerinin varlığını incelediler. Burada $i=1,2$ için $f_i(t,x)$ x'e göre azalmayan fonksiyondur.

Bu bölümdeki amacımız (2.1) denkleminin salınım yapmayan çözümlerinin varlığı için yeni yeterli koşullar bulmaktır.

$t_1\geq t_0$ için $T_0=\min\{t_1-\tau,\inf_{t\geq t_1}\sigma_1(t),\inf_{t\geq t_1}\sigma_2(t)\}$ olsun. (2.1) denkleminin çözümü $x\in C([T_0,\infty),\mathbb{R})$, (2.1) denklemini sağlar ayrıca $t\geq t_1$ için $x(t)-p(t)x(t-\tau)$ ve $r(t)(x(t)-p(t)x(t-\tau))'$, $[t_1,\infty]$ aralığında sürekli türevlenebilirdir.

Bilindiği üzere eğer (2.1) denkleminin bir çözümü keyfi sayıda sıfıra sahipse salınımlıdır, aksi halde salınım yapmayandır denir.

Çalışma boyunca X, $[t_0,\infty)$ aralığında sup norma sahip, sınırlı ve sürekli fonksiyonların kümesi olarak kabul edilmiştir.

2.2. Temel Sonuçlar

Teorem 2.2.1. Kabul edelim ki (2.3) - (2.5) sağlansın ve $0 \leq p(t) \leq p < 1$ olsun. Bu durumda (2.1) denklemi sınırlı salınım yapmayan bir çözüme sahiptir.

İspat: Varsayalım ki $d > 0$ için (2.4) sağlansın, $d < 0$ için durum benzerdir. $N_2 = d$ olsun.

$$A = \{x \in X : N_1 \leq x(t) \leq N_2, \quad t \geq t_0\},$$

kümesini alalım, burada N_1 ve N_2,

$$N_1 < (1-p)N_2$$

olacak şekilde pozitif sabitlerdir. A nın X in kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi olduğu açıktır.

(2.3) - (2.5) i ele alırsak, $t \geq t_1$ için $t - \tau \geq t_0$, $\sigma_1(t) \geq t_0$, $\sigma_2(t) \geq t_0$ olacak şekilde yeterince büyük bir $t_1 > t_0$ vardır ve

$$p + 2\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{q_i(u)}{r(s)}duds \leq \theta_1 < 1, \quad i = 1, 2, \tag{2.8}$$

burada θ_1 sabittir,

$$\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{1}{r(s)}[f_1(u,d) + |g(u)|]duds \leq (1-p)N_2 - \alpha \tag{2.9}$$

$$\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{1}{r(s)}[f_2(u,d) + |g(u)|]duds \leq \alpha - N_1 \tag{2.10}$$

eşitsizlikleri $\alpha \in \big(N_1, (1-p)N_2\big)$ olmak üzere sağlanır.

Şimdi aşağıdaki gibi bir $S : A \longrightarrow X$ dönüşümü tanımlayalım:

$$(Sx)(t) = \begin{cases} \alpha + p(t)x(t-\tau) + \int_t^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_{t_1}^{s}[f_1(u, x(\sigma_1(u))) \\ -f_2(u, x(\sigma_2(u))) - g(u)]duds, \quad t \geq t_1 \\ (Sx)(t_1), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Açıkça görülür ki Sx süreklidir. Her $x \in A$ ve $t \geq t_1$ için (2.9) kullanılarak,

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &= \alpha + p(t)x(t-\tau) + \int_t^\infty \int_{t_1}^s \frac{1}{r(s)}[f_1(u, x(\sigma_1(u))) - f_2(u, x(\sigma_2(u))) - g(u)]duds \\ &\leq \alpha + pN_2 + \int_{t_1}^\infty \int_{t_1}^s \frac{1}{r(s)}[f_1(u,d) + |g(u)|]duds \\ &\leq N_2,\end{aligned}$$

(2.10) kullanılarak,

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &= \alpha + p(t)x(t-\tau) + \int_t^\infty \int_{t_1}^s \frac{1}{r(s)}[f_1(u, x(\sigma_1(u))) - f_2(u, x(\sigma_2(u))) - g(u)]duds \\ &\geq \alpha - \int_{t_1}^\infty \int_{t_1}^s \frac{1}{r(s)}[f_2(u,d) + |g(u)|]duds \\ &\geq N_1\end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde $SA \subset A$ dir. Şimdi, S nin A üzerinde bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. $x, y \in A$ ve $t \geq t_1$ için (2.2) ve (2.8) göz önünde bulundurulacak olursa sup norm kullanılarak

$$\begin{aligned}|(Sx)(t) - (Sy)(t)| &\leq p|x(t-\tau) - y(t-\tau)| \\ &+ \sum_{i=1}^2 \int_t^\infty \frac{1}{r(s)} \int_{t_1}^s |f_i(u, x(\sigma_i(u))) - f_i(u, y(\sigma_i(u)))|duds \\ &\leq p|x(t-\tau) - y(t-\tau)| \\ &+ \sum_{i=1}^2 \int_{t_1}^\infty \frac{1}{r(s)} \int_{t_1}^s q_i(u)|x(\sigma_i(u)) - y(\sigma_i(u))|duds \\ &\leq \|x-y\| \left[p + \sum_{i=1}^2 \int_{t_1}^\infty \int_{t_1}^s \frac{q_i(u)}{r(s)} duds\right] \\ &\leq \theta_1 \|x-y\|\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|Sx - Sy\| \leq \theta_1 \|x-y\|$$

yazabiliriz. $\theta_1 < 1$ olduğundan S, A üzerinde bir daralma dönüşümüdür. Sonuç olarak, S, $x \in A$ için $Sx = x$ olacak şekilde bir sabit noktaya sahiptir ki bu da (2.1) denkleminin pozitif bir çözümüdür. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 2.2.2. Kabul edelim ki (2.3) - (2.5) sağlansın ve $1 < p_1 \leq p(t) \leq p_2 < \infty$ olsun. Bu durumda (2.1) denklemi sınırlı salınım yapmayan bir çözüme sahiptir.

İspat: Varsayalım ki $d > 0$ için (2.4) sağlansın, $d < 0$ için durum benzerdir. $N_4 = d$ olsun.

$$A = \{x \in X : N_3 \leq x(t) \leq N_4, \quad t \geq t_0\},$$

kümesini alalım, burada N_3 ve N_4,

$$p_2 N_3 < (p_1 - 1)N_4$$

olacak şekilde pozitif sabitlerdir. A kümesinin X in kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi olduğu açıktır.

(2.3) - (2.5) i ele alırsak, $t \geq t_1$ için $\sigma_1(t+\tau) \geq t_0$, $\sigma_2(t+\tau) \geq t_0$ olacak şekilde yeterince büyük bir $t_1 > t_0$ vardır ve

$$\frac{1}{p_1}\Big[1 + 2\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{q_i(u)}{r(s)}duds\Big] \leq \theta_2 < 1, \quad i = 1, 2, \tag{2.11}$$

burada θ_2 sabittir,

$$\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{1}{r(s)}[f_1(u,d) + |g(u)|]duds \leq \alpha - p_2 N_3 \tag{2.12}$$

$$\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{1}{r(s)}[f_2(u,d) + |g(u)|]duds \leq (p_1 - 1)N_4 - \alpha, \tag{2.13}$$

eşitsizlikleri $\alpha \in \big(p_2 N_3, (p_1 - 1)N_4\big)$ olmak üzere sağlanır.

Şimdi aşağıdaki gibi bir $S : A \longrightarrow X$ dönüşümü tanımlayalım:

$$(Sx)(t) = \begin{cases} \frac{1}{p(t+\tau)}\Big[\alpha + x(t+\tau) - \int_{t+\tau}^{\infty} \frac{1}{r(s)} \int_{t_1+\tau}^{s} [f_1(u, x(\sigma_1(u))) \\ -f_2(u, x(\sigma_2(u))) - g(u)]duds\Big], \quad t \geq t_1 \\ (Sx)(t_1), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Açıkça görülür ki Sx süreklidir. Her $x \in A$ ve $t \geq t_1$ için (2.13) kullanılarak,

$$\begin{aligned} (Sx)(t) &= \frac{1}{p(t+\tau)}\Big[\alpha + x(t+\tau) - \int_{t+\tau}^{\infty} \int_{t_1+\tau}^{s} \frac{1}{r(s)} [f_1(u, x(\sigma_1(u))) \\ &- f_2(u, x(\sigma_2(u))) - g(u)]duds\Big] \\ &\leq \frac{1}{p_1}\Big[\alpha + N_4 + \int_{t_1}^{\infty} \int_{t_1}^{s} \frac{1}{r(s)} [f_2(u, d) + |g(u)|]duds\Big] \\ &\leq N_4 \end{aligned}$$

ve (2.12) kullanılarak,

$$\begin{aligned} (Sx)(t) &= \frac{1}{p(t+\tau)}\Big[\alpha + x(t+\tau) - \int_{t+\tau}^{\infty} \int_{t_1+\tau}^{s} \frac{1}{r(s)} [f_1(u, x(\sigma_1(u))) \\ &- f_2(u, x(\sigma_2(u))) - g(u)]duds\Big] \\ &\geq \frac{1}{p(t+\tau)}\Big[\alpha - \int_{t_1+\tau}^{\infty} \int_{t_1+\tau}^{s} \frac{1}{r(s)} [f_1(u, d) + |g(u)|]duds\Big] \\ &\geq \frac{1}{p_2}\Big[\alpha - \int_{t_1}^{\infty} \int_{t_1}^{s} \frac{1}{r(s)} [f_1(u, d) + |g(u)|]duds\Big] \\ &\geq N_3 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $SA \subset A$ dir. Şimdi, S nin A üzerinde bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. $x, y \in A$ ve $t \geq t_1$ için (2.2) ve (2.11) göz önünde bulundurulacak olursa sup norm kullanılarak

$$\begin{aligned}|(Sx)(t)-(Sy)(t)| &\leq \frac{1}{p(t+\tau)}\Bigg[|x(t+\tau)-y(t+\tau)| \\ &\quad +\sum_{i=1}^{2}\int_{t+\tau}^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_{t_1+\tau}^{s}|f_i(u,x(\sigma_i(u)))-f_i(u,y(\sigma_i(u)))|duds\Bigg] \\ &\leq \frac{\|x-y\|}{p_1}\Bigg[1+\sum_{i=1}^{2}\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{q_i(u)}{r(s)}duds\Bigg] \\ &\leq \theta_2\|x-y\|\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|Sx-Sy\|\leq\theta_2\|x-y\|$$

yazabiliriz. $\theta_2<1$ olduğundan S, A üzerinde bir daralma dönüşümüdür. Sonuç olarak, S, $x\in A$ için $Sx=x$ olacak şekilde bir sabit noktaya sahiptir ki bu da (2.1) denkleminin pozitif bir çözümüdür. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 2.2.3. Kabul edelim ki (2.3) - (2.5) sağlansın ve $-1<-p\leq p(t)\leq 0$ olsun. Bu durumda (2.1) denklemi sınırlı salınım yapmayan bir çözüme sahiptir.

İspat: Varsayalım ki $d>0$ için (2.4) sağlansın, $d<0$ için durum benzerdir. $N_6=d$ olsun.

$$A=\{x\in X: N_5\leq x(t)\leq N_6,\quad t\geq t_0\},$$

kümesini alalım, burada N_5 ve N_6,

$$N_5+pN_6<N_6$$

olacak şekilde pozitif sabitlerdir. Açıktır ki A, X in kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesidir.

(2.3) - (2.5) ışığında söyleyebiliriz ki, $t\geq t_1$ için $t-\tau\geq t_0$, $\sigma_1(t)\geq t_0$, $\sigma_2(t)\geq t_0$ olacak şekilde yeterince büyük bir $t_1>t_0$ vardır ve

$$p+2\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{q_i(u)}{r(s)}duds\leq\theta_3<1,\quad i=1,2, \tag{2.14}$$

burada θ_3 sabittir,

$$\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{1}{r(s)}[f_1(u,d)+|g(u)|]duds \leq N_6-\alpha \tag{2.15}$$

$$\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{1}{r(s)}[f_2(u,d)+|g(u)|]duds \leq \alpha-N_5-pN_6 \tag{2.16}$$

eşitsizlikleri $\alpha \in \big(N_5+pN_6, N_6\big)$ olmak üzere sağlanır.

Şimdi aşağıdaki gibi bir $S : A \longrightarrow X$ dönüşümü tanımlayalım:

$$(Sx)(t)=\begin{cases}\alpha+p(t)x(t-\tau)+\int_t^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_{t_1}^{s}[f_1(u,x(\sigma_1(u)))\\ -f_2(u,x(\sigma_2(u)))-g(u)]duds, \quad t\geq t_1\\ (Sx)(t_1), \quad t_0\leq t\leq t_1.\end{cases}$$

Açıkça görülür ki Sx süreklidir. Her $x \in A$ ve $t \geq t_1$ için (2.15) kullanılarak,

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &= \alpha+p(t)x(t-\tau)+\int_t^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{1}{r(s)}[f_1(u,x(\sigma_1(u)))-f_2(u,x(\sigma_2(u)))-g(u)]duds\\ &\leq \alpha+\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{1}{r(s)}[f_1(u,d)+|g(u)|]duds\\ &\leq N_6\end{aligned}$$

ve (2.16) kullanılarak,

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &= \alpha+p(t)x(t-\tau)+\int_t^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{1}{r(s)}[f_1(u,x(\sigma_1(u)))-f_2(u,x(\sigma_2(u)))-g(u)]duds\\ &\geq \alpha-pN_6-\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{1}{r(s)}[f_2(u,d)+|g(u)|]duds\\ &\geq N_5\end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde $SA \subset A$ dir. Şimdi, S nin A üzerinde bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. $x, y \in A$ ve $t \geq t_1$ için (2.2) ve (2.14) göz önünde bulundurulacak olursa sup norm kullanılarak

$$\begin{aligned}
|(Sx)(t)-(Sy)(t)| &\leq |p(t)||x(t-\tau)-y(t-\tau)| \\
&\quad +\sum_{i=1}^{2}\int_{t}^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_{t_1}^{s}|f_i(u,x(\sigma_i(u)))-f_i(u,y(\sigma_i(u)))|duds \\
&\leq p\|x-y\|+\sum_{i=1}^{2}\int_{t_1}^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_{t_1}^{s}q_i(u)|x(\sigma_i(u))-y(\sigma_i(u)))|duds \\
&\leq \|x-y\|\Big[p+\sum_{i=1}^{2}\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{q_i(u)}{r(s)}duds\Big] \\
&\leq \theta_3\|x-y\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|Sx-Sy\|\leq\theta_3\|x-y\|$$

yazabiliriz. $\theta_3<1$ olduğundan S, A üzerinde bir daralma dönüşümüdür. Sonuç olarak, S, $x\in A$ için $Sx=x$ olacak şekilde bir sabit noktaya sahiptir ki bu da (2.1) denkleminin pozitif bir çözümüdür. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 2.2.4. Kabul edelim ki (2.3) - (2.5) sağlansın ve $-\infty<-p_1\leq p(t)\leq -p_2<-1$ olsun. Bu durumda (2.1) denklemi sınırlı salınım yapmayan bir çözüme sahiptir.

İspat: Varsayalım ki $d>0$ için (2.4) sağlansın, $d<0$ için durum benzerdir. $N_8=d$ olsun.

$$A=\{x\in X: N_7\leq x(t)\leq N_8,\quad t\geq t_0\},$$

kümesini alalım, burada N_7 ve N_8,

$$p_1N_7+N_8<p_2N_8$$

olacak şekilde pozitif sabitlerdir. A nın X in kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi olduğu açıktır.

(2.3) - (2.5) i ele alırsak, $t\geq t_1$ için $\sigma_1(t+\tau)\geq t_0$, $\sigma_2(t+\tau)\geq t_0$ olacak şekilde yeterince büyük bir $t_1>t_0$ vardır ve

$$\frac{1}{p_2}\Big[1+2\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{q_i(u)}{r(s)}duds\Big]\leq\theta_4<1,\quad i=1,2, \tag{2.17}$$

burada θ_4 sabittir,

$$\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{1}{r(s)}[f_1(u,d)+|g(u)|]duds \leq p_2N_8-\alpha \tag{2.18}$$

$$\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{1}{r(s)}[f_2(u,d)+|g(u)|]duds \leq \alpha-p_1N_7-N_8, \tag{2.19}$$

eşitsizlikleri $\alpha \in \big(p_1N_7+N_8, p_2N_8\big)$ olmak üzere sağlanır.

Şimdi aşağıdaki gibi bir $S : A \longrightarrow X$ dönüşümü tanımlayalım:

$$(Sx)(t)=\begin{cases} -\frac{1}{p(t+\tau)}\Big[\alpha-x(t+\tau)+\int_{t+\tau}^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_{t_1+\tau}^{s}[f_1(u,x(\sigma_1(u)))\\ -f_2(u,x(\sigma_2(u)))-g(u)]duds\Big], \quad t\geq t_1\\ (Sx)(t_1), \quad t_0\leq t\leq t_1. \end{cases}$$

Açıkça görülür ki Sx süreklidir. Her $x \in A$ ve $t \geq t_1$ için (2.18) kullanılarak,

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &= -\frac{1}{p(t+\tau)}\Big[\alpha-x(t+\tau)+\int_{t+\tau}^{\infty}\int_{t_1+\tau}^{s}\frac{1}{r(s)}[f_1(u,x(\sigma_1(u)))\\ &- f_2(u,x(\sigma_2(u)))-g(u)]duds\Big]\\ &\leq \frac{1}{p_2}\Big[\alpha+\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{1}{r(s)}[f_1(u,d)+|g(u)|]duds\Big]\\ &\leq N_8\end{aligned}$$

ve (2.19) kullanılarak,

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &= -\frac{1}{p(t+\tau)}\Big[\alpha-x(t+\tau)+\int_{t+\tau}^{\infty}\int_{t_1+\tau}^{s}\frac{1}{r(s)}[f_1(u,x(\sigma_1(u)))\\ &- f_2(u,x(\sigma_2(u)))-g(u)]duds\Big]\\ &\geq -\frac{1}{p(t+\tau)}\Big[\alpha-N_8-\int_{t_1+\tau}^{\infty}\int_{t_1+\tau}^{s}\frac{1}{r(s)}[f_2(u,d)+|g(u)|]duds\Big]\\ &\geq \frac{1}{p_1}\Big[\alpha-N_8-\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{1}{r(s)}[f_2(u,d)+|g(u)|]duds\Big]\\ &\geq N_7\end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde $SA \subset A$ dir. Şimdi, S nin A üzerinde bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. $x, y \in A$ ve $t \geq t_1$ için (2.2) ve (2.17) göz önünde bulundurulacak olursa sup norm kullanılarak

$$\begin{aligned} |(Sx)(t) - (Sy)(t)| &\leq \frac{1}{|p(t+\tau)|}\Bigg[|x(t+\tau) - y(t+\tau)| \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2} \int_{t+\tau}^{\infty} \frac{1}{r(s)} \int_{t_1+\tau}^{s} |f_i(u, x(\sigma_i(u))) - f_i(u, y(\sigma_i(u)))| du ds\Bigg] \\ &\leq \frac{\|x-y\|}{p_2}\left[1 + \sum_{i=1}^{2} \int_{t_1}^{\infty} \int_{t_1}^{s} \frac{q_i(u)}{r(s)} du ds\right] \\ &\leq \theta_4 \|x-y\| \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|Sx - Sy\| \leq \theta_4 \|x-y\|$$

yazabiliriz. $\theta_4 < 1$ olduğundan S, A üzerinde bir daralma dönüşümüdür. Sonuç olarak, $S, x \in A$ için $Sx = x$ olacak şekilde bir sabit noktaya sahiptir ki bu da (2.1) denkleminin pozitif bir çözümüdür. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Örnek 2.2.1. $t_0 > 4$ olmak üzere

$$(t^2(x(t) - \frac{1}{t}x(t-1))')' + \frac{t-3}{(t-4)^2}x(t-3) - \frac{2t}{(t-2)^3}x^3(t-1) = \frac{1}{(t-4)} \quad (2.20)$$

denklemini ele alalım. Burada açıkça görülür ki $r(t) = t^2, p(t) = \frac{1}{t}, \tau = 1, \sigma_1(t) = t-3$, $\sigma_2(t) = t-1, f_1(t,u) = \frac{t-3}{(t-4)^2}u$, $f_2(t,u) = \frac{2t}{(t-2)^3}u^3$ ve $g(t) = \frac{1}{(t-4)}$ şeklindedir. Teorem 2.2.1.' in tüm koşulları sağlamaktadır ve $x(t) = 1 - \frac{1}{t}$, (2.20) denkleminin salınım yapmayan bir çözümüdür.

Örnek 2.2.2.

$$\begin{aligned} &(\exp(t)(x(t) - (\exp(-t)+2)x(t-1))')' + \exp(-t-2)x(t-2) \\ &- \exp(-t-3)x(t-3) = -\exp(-t-3)(2\exp(4) - \exp(1) + 1) \end{aligned} \quad (2.21)$$

denklemini ele alalım. Burada, $r(t) = \exp(t)$, $p(t) = \exp(-t) + 2$, $\tau = 1$, $\sigma_1(t) = t-2$, $\sigma_2(t) = t-3$, $f_1(t,u) = \exp(-t-2)u$, $f_2(t,u) = \exp(-t-3)u$ ve $g(t) =$

$-\exp(-t-3)(2\exp(4)-\exp(1)+1)$ dir. Teorem 2.2.2.' nin tüm koşulları sağlamaktadır ve $x(t) = \exp(-t) + 1$, (2.21) denkleminin salınım yapmayan bir çözümüdür.

3. BÖLÜM

İKİNCİ MERTEBEDEN GECİKME ARGÜMENTLİ NÖTRAL DİFERENŞİYEL DENKLEMLERİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

3.1. Giriş

Bu bölümde gecikme argümentli ikinci mertebeden nötral diferensiyel

$$[x(t)-p(t)x(t-\tau)]''+\int_{a_1}^{b_1} f_1(t,x(\sigma_1(t,\xi)))d\xi-\int_{a_2}^{b_2} f_2(t,x(\sigma_2(t,\xi)))d\xi=g(t) \quad (3.1)$$

denklemi incelenecektir. Burada $p,g\in C([t_0,\infty),\mathbb{R})$, $\tau>0$, $\sigma_i(t,\xi)\in C([t_0,\infty)\times[a_i,b_i],(0,\infty))$ ve $0\leq a_i<b_i$, $i=1,2$ şeklindedir.

Bölüm boyunca, $\xi\in[a_i,b_i]$, $i=1,2$ için $t\to\infty$ iken $\sigma_i(t,\xi)\to\infty$; $f_i(t,x)\in C([t_0,\infty)\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ fonksiyonu $i=1,2$ için x e göre azalmayan; $i=1,2$ ve $x\neq 0$ için $xf_i(t,x)>0$ ve $t\in[t_0,\infty)$ ve $x,y\in[a,b]$ için,

$$|f_i(t,x)-f_i(t,y)|\leq q_i(t)|x-y| \quad (3.2)$$

olduğunu kabül edelim. Burada $q_i\in C([t_0,\infty),\mathbb{R}^+)$ ve $[a,b]$ ($0<a<b$ veya $a<b<0$) herhangi bir kapalı aralıktır.

Ayrıca kabul edelim ki

$$\int_{t_0}^{\infty} sq_i(s)ds<\infty,\ i=1,2, \quad (3.3)$$

$$\int_{t_0}^{\infty} s|f_i(s,d)|ds < \infty, \quad d \neq 0,\ i = 1,2, \tag{3.4}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} s|g(s)|ds < \infty \tag{3.5}$$

koşulları sağlansın.

$T_0 = \min\{t_1 - \tau, \inf_{t \geq t_1} \min_{\xi \in [a_1,b_1]} \sigma_1(t,\xi), \inf_{t \geq t_1} \min_{\xi \in [a_2,b_2]} \sigma_2(t,\xi)\}$ olsun. (3.1) denkleminin çözümü $x \in C([T_0,\infty),\mathbb{R})$, (3.1) denklemini sağlar ayrıca $t \geq t_1$ için $x(t) - p(t)x(t-\tau)$, $[t_1,\infty]$ aralığında ikinci mertebeden sürekli türevlenebilirdir.

Bu bölümdeki amacımız $p(t)$ nin bulunduğu farklı aralıklara göre (3.1) denkleminin salınım yapmayan çözümleri için yeterli koşullar vermektir.

3.2. Temel Sonuçlar

Teorem 3.2.1. Kabul edelim ki (3.3) - (3.5) sağlansın ve $0 \leq p(t) \leq p < 1$ olsun. Bu durumda (3.1) denklemi sınırlı salınım yapmayan bir çözüme sahiptir.

İspat: Varsayalım ki $d > 0$ için (3.4) sağlansın, $d < 0$ için durum benzerdir. $N_2 = d$ olsun. Kabul edelim ki X, $[t_0,\infty)$ aralığında sup norma sahip, sınırlı ve sürekli fonksiyonların kümesidir.

$$A = \{x \in X : N_1 \leq x(t) \leq N_2, \quad t \geq t_0\},$$

kümesini alalım, burada N_1 ve N_2,

$$N_1 < (1-p)N_2$$

olacak şekilde pozitif sabitlerdir. A nın X in kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi olduğu açıktır.

(3.3) - (3.5) i ele alırsak, $t \geq t_1$ için $t-\tau \geq t_0$, $\sigma_i(t,\xi) \geq t_0$, $\xi \in [a_i, b_i]$, $i = 1, 2$ olacak şekilde yeterince büyük bir $t_1 > t_0$ vardır ve

$$p + \int_{t_1}^{\infty} s\Big[(b_1 - a_1)q_1(s) + (b_2 - a_2)q_2(s)\Big]ds \leq \theta_1 < 1, \tag{3.6}$$

burada θ_1 sabittir,

$$\int_{t_1}^{\infty} s[(b_1 - a_1)f_1(s,d) + |g(s)|]ds \leq \alpha - N_1, \tag{3.7}$$

$$\int_{t_1}^{\infty} s[(b_2 - a_2)f_2(s,d) + |g(s)|]ds \leq (1-p)N_2 - \alpha \tag{3.8}$$

eşitsizlikleri $\alpha \in \big(N_1, (1-p)N_2\big)$ olmak üzere sağlanır.

Şimdi aşağıdaki gibi bir $S : A \longrightarrow X$ dönüşümü tanımlayalım:

$$(Sx)(t) = \begin{cases} \alpha + p(t)x(t-\tau) - \int_t^{\infty}(s-t)\Big[\int_{a_1}^{b_1} f_1(s, x(\sigma_1(s,\xi)))d\xi \\ -\int_{a_2}^{b_2} f_2(s, x(\sigma_2(s,\xi)))d\xi - g(s)\Big]ds, \quad t \geq t_1 \\ (Sx)(t_1), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Açıkça görülür ki Sx süreklidir. Her $x \in A$ ve $t \geq t_1$ için (3.8) kullanılarak,

$$\begin{aligned} (Sx)(t) &= \alpha + p(t)x(t-\tau) - \int_t^{\infty}(s-t)\Big[\int_{a_1}^{b_1} f_1(s, x(\sigma_1(t,\xi)))d\xi \\ &- \int_{a_2}^{b_2} f_2(s, x(\sigma_2(s,\xi)))d\xi - g(s)\Big]ds \\ &\leq \alpha + pN_2 + \int_{t_1}^{\infty} s[(b_2 - a_2)f_2(s,d) + |g(s)|]ds \\ &\leq N_2 \end{aligned}$$

ve (3.7) kullanılarak,

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &= \alpha + p(t)x(t-\tau) - \int_t^\infty (s-t)\Big[\int_{a_1}^{b_1} f_1(s, x(\sigma_1(s,\xi)))d\xi \\ &- \int_{a_2}^{b_2} f_2(s, x(\sigma_2(s,\xi)))d\xi - g(s)\Big]ds \\ &\geq \alpha - \int_{t_1}^\infty s[(b_1-a_1)f_1(s,d) + |g(s)|]ds \\ &\geq N_1\end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde $SA \subset A$ dir. Şimdi, S nin A üzerinde bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. $x, y \in A$ ve $t \geq t_1$ için (3.2) ve (3.6) göz önünde bulundurulacak olursa sup norm kullanılarak,

$$\begin{aligned}|(Sx)(t) - (Sy)(t)| &\leq p|x(t-\tau) - y(t-\tau)| \\ &+ \int_t^\infty (s-t)\int_{a_1}^{b_1} |f_1(s, x(\sigma_1(s,\xi))) - f_1(s, y(\sigma_1(s,\xi)))|d\xi ds \\ &+ \int_t^\infty (s-t)\int_{a_2}^{b_2} |f_2(s, x(\sigma_2(s,\xi))) - f_2(s, y(\sigma_2(s,\xi)))|d\xi ds \\ &\leq p|x(t-\tau) - y(t-\tau)| \\ &+ \int_{t_1}^\infty s\int_{a_1}^{b_1} q_1(s)|x(\sigma_1(s,\xi)) - y(\sigma_1(s,\xi))|d\xi ds \\ &+ \int_{t_1}^\infty s\int_{a_2}^{b_2} q_2(s)|x(\sigma_2(s,\xi)) - y(\sigma_2(s,\xi))|d\xi ds \\ &\leq \|x-y\|\Big[p + \int_{t_1}^\infty s\Big[(b_1-a_1)q_1(s) + (b_2-a_2)q_2(s)\Big]ds\Big] \\ &\leq \theta_1\|x-y\|,\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|Sx - Sy\| \leq \theta_1\|x-y\|$$

yazabiliriz. $\theta_1 < 1$ olduğundan S, A üzerinde bir daralma dönüşümüdür. Banach daralma dönüşümü prensibinden yararlanırsak, S, $x \in A$ için $Sx = x$ olacak şekilde bir sabit noktaya sahiptir ki bu da (3.1) denkleminin pozitif bir çözümüdür. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 3.2.2. Kabul edelim ki (3.3) - (3.5) sağlansın ve $1 < p_1 \leq p(t) \leq p_2 < \infty$ olsun. Bu durumda (3.1) denklemi sınırlı salınım yapmayan bir çözüme sahiptir.

İspat: Varsayalım ki $d > 0$ için (3.4) sağlansın, $d < 0$ için durum benzerdir. $N_4 = d$ olsun. Kabul edelim ki X, $[t_0, \infty)$ aralığında sup norma sahip, sınırlı ve sürekli fonksiyonların kümesidir.

$$A = \{x \in X : N_3 \leq x(t) \leq N_4, \quad t \geq t_0\},$$

kümesini alalım, burada N_3 ve N_4,

$$p_2 N_3 < (p_1 - 1)N_4$$

olacak şekilde pozitif sabitlerdir. A nın X in kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi olduğu açıktır.

(3.3) - (3.5) i ele alırsak, $t \geq t_1$ için $\sigma_i(t + \tau, \xi) \geq t_0$, $\xi \in [a_i, b_i]$, $i = 1, 2$ olacak şekilde yeterince büyük bir $t_1 > t_0$ vardır ve

$$\frac{1}{p_1}\Big[1 + \int_{t_1}^{\infty} s\Big[(b_1 - a_1)q_1(s) + (b_2 - a_2)q_2(s)\Big]ds \leq \theta_2 < 1, \tag{3.9}$$

burada θ_2 sabittir,

$$\int_{t_1}^{\infty} s[(b_1 - a_1)f_1(s, d) + |g(s)|]ds \leq (p_1 - 1)N_4 - \alpha, \tag{3.10}$$

$$\int_{t_1}^{\infty} s[(b_2 - a_2)f_2(s, d) + |g(s)|]ds \leq \alpha - p_2 N_3 \tag{3.11}$$

eşitsizlikleri $\alpha \in (p_2 N_3, (p_1 - 1)N_4)$ olmak üzere sağlanır.
Şimdi aşağıdaki gibi bir $S : A \longrightarrow X$ dönüşümü tanımlayalım:

$$(Sx)(t) = \begin{cases} \frac{1}{p(t+\tau)}\Big[\alpha + x(t + \tau) + \int_{t+\tau}^{\infty}(s - (t + \tau))\Big[\int_{a_1}^{b_1} f_1(s, x(\sigma_1(s, \xi)))d\xi \\ - \int_{a_2}^{b_2} f_2(s, x(\sigma_2(s, \xi)))d\xi - g(s)\Big]ds\Big], \quad t \geq t_1 \\ (Sx)(t_1), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Açıkça görülür ki Sx süreklidir. Her $x \in A$ ve $t \geq t_1$ için (3.10) kullanılarak,

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &= \frac{1}{p(t+\tau)}\Big[\alpha + x(t+\tau) + \int_{t+\tau}^{\infty}(s-(t+\tau))\Big[\int_{a_1}^{b_1} f_1(s,x(\sigma_1(s,\xi)))d\xi \\ &- \int_{a_2}^{b_2} f_2(s,x(\sigma_2(s,\xi)))d\xi - g(s)\Big]ds\Big] \\ &\leq \frac{1}{p_1}\Big[\alpha + N_4 + \int_{t_1}^{\infty} s[(b_1-a_1)f_1(s,d) + |g(s)|]ds\Big] \\ &\leq N_4\end{aligned}$$

ve (3.11) kullanılarak,

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &= \frac{1}{p(t+\tau)}\Big[\alpha + x(t+\tau) + \int_{t+\tau}^{\infty}(s-(t+\tau))\Big[\int_{a_1}^{b_1} f_1(s,x(\sigma_1(s,\xi)))d\xi \\ &- \int_{a_2}^{b_2} f_2(s,x(\sigma_2(s,\xi)))d\xi - g(s)\Big]ds\Big] \\ &\geq \frac{1}{p_2}\Big[\alpha - \int_{t_1}^{\infty} s[(b_2-a_2)f_2(s,d) + |g(s)|]ds\Big] \\ &\geq N_3\end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde $SA \subset A$ dir. Şimdi, S nin A üzerinde bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. $x, y \in A$ ve $t \geq t_1$ için (3.2) ve (3.9) göz önünde bulundurulacak olursa sup norm kullanılarak

$$\begin{aligned}|(Sx)(t) - (Sy)(t)| &\leq \frac{1}{p(t+\tau)}\Big[|x(t+\tau) - y(t+\tau)| \\ &+ \int_{t+\tau}^{\infty}(s-(t+\tau))\int_{a_1}^{b_1}|f_1(s,x(\sigma_1(s,\xi))) - f_1(s,y(\sigma_1(s,\xi)))|d\xi ds \\ &+ \int_{t+\tau}^{\infty}(s-(t+\tau))\int_{a_2}^{b_2}|f_2(s,x(\sigma_2(s,\xi))) - f_2(s,y(\sigma_2(s,\xi)))|d\xi ds\Big] \\ &\leq \frac{1}{p_1}\Big[|x(t+\tau) - y(t+\tau)| \\ &+ \int_{t_1}^{\infty} s\int_{a_1}^{b_1} q_1(s)|x(\sigma_1(s,\xi)) - y(\sigma_1(s,\xi))|d\xi ds \\ &+ \int_{t_1}^{\infty} s\int_{a_2}^{b_2} q_2(s)|x(\sigma_2(s,\xi)) - y(\sigma_2(s,\xi))|d\xi ds\Big] \\ &\leq \frac{\|x-y\|}{p_1}\Big[1 + \int_{t_1}^{\infty} s\Big[(b_1-a_1)q_1(s) + (b_2-a_2)q_2(s)\Big]ds\Big] \\ &\leq \theta_2\|x-y\|\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|Sx - Sy\| \leq \theta_2 \|x - y\|$$

yazabiliriz. $\theta_2 < 1$ olduğundan S, A üzerinde bir daralma dönüşümüdür. Banach daralma dönüşümü prensininden yararlanırsak, S, $x \in A$ için $Sx = x$ olacak şekilde bir sabit noktaya sahiptir ki bu da (3.1) denkleminin pozitif bir çözümüdür. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 3.2.3. Kabul edelim ki (3.3) - (3.5) sağlansın ve $-1 < -p \leq p(t) \leq 0$ olsun. Bu durumda (3.1) denklemi sınırlı salınım yapmayan bir çözüme sahiptir.

İspat: Varsayalım ki $d > 0$ için (3.4) sağlansın, $d < 0$ için durum benzerdir. $N_6 = d$ olsun. Kabul edelim ki X, $[t_0, \infty)$ aralığında sup norma sahip, sınırlı ve sürekli fonksiyonların kümesidir.

$$A = \{x \in X : N_5 \leq x(t) \leq N_6, \quad t \geq t_0\},$$

kümesini alalım, burada N_5 ve N_6,

$$N_5 + pN_6 < N_6$$

olacak şekilde pozitif sabitlerdir. A nın X in kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi olduğu açıktır.

(3.3) - (3.5) i ele alırsak, $t \geq t_1$ için $t - \tau \geq t_0$, $\sigma_i(t, \xi) \geq t_0$, $\xi \in [a_i, b_i]$, $i = 1, 2$ olacak şekilde yeterince büyük bir $t_1 > t_0$ vardır ve

$$p + \int_{t_1}^{\infty} s\Big[(b_1 - a_1)q_1(s) + (b_2 - a_2)q_2(s)\Big]ds \leq \theta_3 < 1, \tag{3.12}$$

burada θ_3 sabittir,

$$\int_{t_1}^{\infty} s[(b_1 - a_1)f_1(s, d) + |g(s)|]ds \leq \alpha - N_5 - pN_6, \tag{3.13}$$

$$\int_{t_1}^{\infty} s[(b_2 - a_2)f_2(s, d) + |g(s)|]ds \leq N_6 - \alpha \tag{3.14}$$

eşitsizlikleri $\alpha \in (N_5 + pN_6, N_6)$ olmak üzere sağlanır.

Şimdi aşağıdaki gibi bir $S : A \longrightarrow X$ dönüşümü tanımlayalım:

$$(Sx)(t) = \begin{cases} \alpha + p(t)x(t-\tau) - \int_t^\infty (s-t)\Big[\int_{a_1}^{b_1} f_1(s, x(\sigma_1(s,\xi)))d\xi \\ -\int_{a_2}^{b_2} f_2(s, x(\sigma_2(s,\xi)))d\xi - g(s)\Big]ds, \quad t \geq t_1 \\ (Sx)(t_1), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Açıkça görülür ki Sx süreklidir. Her $x \in A$ ve $t \geq t_1$ için (3.14) kullanılarak,

$$\begin{aligned} (Sx)(t) &= \alpha + p(t)x(t-\tau) - \int_t^\infty (s-t)\Big[\int_{a_1}^{b_1} f_1(s, x(\sigma_1(t,\xi)))d\xi \\ &- \int_{a_2}^{b_2} f_2(s, x(\sigma_2(s,\xi)))d\xi - g(s)\Big]ds \\ &\leq \alpha + \int_{t_1}^\infty s[(b_2 - a_2)f_2(s,d) + |g(s)|]ds \\ &\leq N_6 \end{aligned}$$

ve (3.13) kullanılarak,

$$\begin{aligned} (Sx)(t) &= \alpha + p(t)x(t-\tau) - \int_t^\infty (s-t)\Big[\int_{a_1}^{b_1} f_1(s, x(\sigma_1(t,\xi)))d\xi \\ &- \int_{a_2}^{b_2} f_2(s, x(\sigma_2(s,\xi)))d\xi - g(s)\Big]ds \\ &\geq \alpha - pN_6 - \int_{t_1}^\infty s[(b_1 - a_1)f_1(s,d) + |g(s)|]ds \\ &\geq N_5 \end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde $SA \subset A$ dir. Şimdi, S nin A üzerinde bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. $x, y \in A$ ve $t \geq t_1$ için (3.2) ve (3.12) göz önünde bulundurulacak olursa sup norm kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
|(Sx)(t)-(Sy)(t)| &\leq p|x(t-\tau)-y(t-\tau)| \\
&+ \int_t^\infty (s-t)\int_{a_1}^{b_1} |f_1(s,x(\sigma_1(s,\xi)))-f_1(s,y(\sigma_1(s,\xi)))|d\xi ds \\
&+ \int_t^\infty (s-t)\int_{a_2}^{b_2} |f_2(s,x(\sigma_2(s,\xi)))-f_2(s,y(\sigma_2(s,\xi)))|d\xi ds \\
&\leq p|x(t-\tau)-y(t-\tau)| \\
&+ \int_{t_1}^\infty s\int_{a_1}^{b_1} q_1(s)|x(\sigma_1(s,\xi))-y(\sigma_1(s,\xi))|d\xi ds \\
&+ \int_{t_1}^\infty s\int_{a_2}^{b_2} q_2(s)|x(\sigma_2(s,\xi))-y(\sigma_2(s,\xi))|d\xi ds \\
&\leq \|x-y\|\Big[p+\int_{t_1}^\infty s\Big[(b_1-a_1)q_1(s)+(b_2-a_2)q_2(s)\Big]ds\Big] \\
&\leq \theta_3\|x-y\|
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan

$$\|Sx-Sy\| \leq \theta_3\|x-y\|$$

yazabiliriz. $\theta_3 < 1$ olduğundan S, A üzerinde bir daralma dönüşümüdür. Banach daralma dönüşümü prensibinden yararlanırsak, S, $x \in A$ için $Sx = x$ olacak şekilde bir sabit noktaya sahiptir ki bu da (3.1) denkleminin pozitif bir çözümüdür. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 3.2.4. Kabul edelim ki (3.3) - (3.5) sağlansın ve $-\infty < -p_1 \leq p(t) \leq -p_2 < -1$ olsun. Bu durumda (3.1) denklemi sınırlı salınım yapmayan bir çözüme sahiptir.

İspat: Varsayalım ki $d > 0$ için (3.4) sağlansın, $d < 0$ için durum benzerdir. $N_8 = d$ olsun. Kabul edelim ki X, $[t_0,\infty)$ aralığında sup normla sahip, sınırlı ve sürekli fonksiyonların kümesidir.

$$A = \{x \in X : N_7 \leq x(t) \leq N_8, \quad t \geq t_0\},$$

kümesini alalım, burada N_7 ve N_8,

$$p_1N_7 + N_8 < p_2N_8$$

olacak şekilde pozitif sabitlerdir. A nın X in kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi olduğu açıktır.

(3.3) - (3.5) i ele alırsak, $t \geq t_1$ için $\sigma_i(t+\tau,\xi) \geq t_0$, $\xi \in [a_i,b_i]$, $i = 1,2$ olacak şekilde yeterince büyük bir $t_1 > t_0$ vardır ve

$$\frac{1}{p_2}\Big[1 + \int_{t_1}^{\infty} s\Big[(b_1-a_1)q_1(s) + (b_2-a_2)q_2(s)\Big]ds \leq \theta_4 < 1, \tag{3.15}$$

burada θ_4 sabittir,

$$\int_{t_1}^{\infty} s[(b_1-a_1)f_1(s,d) + |g(s)|]ds \leq \alpha - p_1N_7 - N_8 \tag{3.16}$$

$$\int_{t_1}^{\infty} s[(b_2-a_2)f_2(s,d) + |g(s)|]ds \leq p_2N_8 - \alpha, \tag{3.17}$$

eşitsizlikleri $\alpha \in (p_1N_7 + N_8, p_2N_8)$ olmak üzere sağlanır.

Şimdi aşağıdaki gibi bir $S : A \longrightarrow X$ dönüşümü tanımlayalım:

$$(Sx)(t) = \begin{cases} -\frac{1}{p(t+\tau)}\Big[\alpha - x(t+\tau) - \int_{t+\tau}^{\infty}(s-(t+\tau))\Big[\int_{a_1}^{b_1} f_1(s,x(\sigma_1(s,\xi)))d\xi \\ -\int_{a_2}^{b_2} f_2(s,x(\sigma_2(s,\xi)))d\xi - g(s)\Big]ds, \quad t \geq t_1\Big] \\ (Sx)(t_1), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Açıkça görülür ki Sx süreklidir. Her $x \in A$ ve $t \geq t_1$ için (3.17) kullanılarak,

$$\begin{aligned} (Sx)(t) &= -\frac{1}{p(t+\tau)}\Big[\alpha - x(t+\tau) - \int_{t+\tau}^{\infty}(s-(t+\tau))\Big[\int_{a_1}^{b_1} f_1(s,x(\sigma_1(s,\xi)))d\xi \\ &- \int_{a_2}^{b_2} f_2(s,x(\sigma_2(s,\xi)))d\xi - g(s)\Big]ds\Big] \\ &\leq \frac{1}{p_2}\Big[\alpha + \int_{t_1}^{\infty} s[(b_2-a_2)f_2(s,d) + |g(s)|]ds\Big] \\ &\leq N_8 \end{aligned}$$

ve (3.16) kullanılarak,

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &= -\frac{1}{p(t+\tau)}\Big[\alpha - x(t+\tau) - \int_{t+\tau}^{\infty}(s-(t+\tau))\Big[\int_{a_1}^{b_1} f_1(s,x(\sigma_1(s,\xi)))d\xi \\ &- \int_{a_2}^{b_2} f_2(s,x(\sigma_2(s,\xi)))d\xi - g(s)\Big]ds\Big] \\ &\geq -\frac{1}{p(t_1+\tau)}\Big[\alpha - N_8 - \int_{t_1+\tau}^{\infty} s[(b_1-a_1)f_1(s,d)+|g(s)|]ds\Big] \\ &\geq \frac{1}{p_1}\Big[\alpha - N_8 - \int_{t_1}^{\infty} s[(b_1-a_1)f_1(s,d)+|g(s)|]ds\Big] \\ &\geq N_7\end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde $SA \subset A$ dir. Şimdi, S nin A üzerinde bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. $x, y \in A$ ve $t \geq t_1$ için (3.2) ve (3.15) göz önünde bulundurulacak olursa sup norm kullanılarak,

$$\begin{aligned}|(Sx)(t)-(Sy)(t)| &\leq \frac{1}{|p(t+\tau)|}\Big[|x(t+\tau)-y(t+\tau)| \\ &+ \int_{t+\tau}^{\infty}(s-(t+\tau))\int_{a_1}^{b_1}|f_1(s,x(\sigma_1(s,\xi)))-f_1(s,y(\sigma_1(s,\xi)))|d\xi ds \\ &+ \int_{t+\tau}^{\infty}(s-(t+\tau))\int_{a_2}^{b_2}|f_2(s,x(\sigma_2(s,\xi)))-f_2(s,y(\sigma_2(s,\xi)))|d\xi ds\Big] \\ &\leq \frac{1}{p_2}\Big[|x(t+\tau)-y(t+\tau)| \\ &+ \int_{t_1}^{\infty} s\int_{a_1}^{b_1} q_1(s)|x(\sigma_1(s,\xi))-y(\sigma_1(s,\xi))|d\xi ds \\ &+ \int_{t_1}^{\infty} s\int_{a_2}^{b_2} q_2(s)|x(\sigma_2(s,\xi))-y(\sigma_2(s,\xi))|d\xi ds\Big] \\ &\leq \frac{\|x-y\|}{p_2}\Big[1+\int_{t_1}^{\infty} s\Big[(b_1-a_1)q_1(s)+(b_2-a_2)q_2(s)\Big]ds \\ &\leq \theta_4\|x-y\|\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|Sx-Sy\| \leq \theta_4\|x-y\|$$

yazabiliriz. $\theta_4 < 1$ olduğundan S, A üzerinde bir daralma dönüşümüdür. Banach daralma dönüşümü prensibinden yararlanırsak, S, $x \in A$ için $Sx = x$ olacak şekilde bir sabit noktaya sahiptir ki bu da (3.1) denkleminin pozitif bir çözümüdür. Bu ise ispatı tamamlar.

■

Örnek 3.2.1. $t > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}(x(t) - \exp(-t)x(t-1))'' + \int_0^1 \exp(-t-1)x(t-2\xi)d\xi \\ -\frac{1}{2}\int_1^3 \exp(-t-2)x(t-\xi)d\xi \\ = -4\exp(1-2t) + \exp(-t-1) - \exp(-t-2)\end{aligned} \tag{3.18}$$

denklemini ele alalım. Burada, $p(t) = \exp(-t)$, $\tau = 1$, $\sigma_1(t,\xi) = t - 2\xi$, $\sigma_2(t,\xi) = t - \xi$, $f_1(t,u) = \exp(-t-1)u$, $f_2(t,u) = \frac{\exp(-t-2)u}{2}$ ve $g(t) = -4\exp(1-2t) + \exp(-t-1) - \exp(-t-2)$ dir. Teorem 3.2.1.' in tüm koşulları sağlanmaktadır ve $x(t) = \exp(-t) + 1$ (3.18) denkleminin salınım yapmayan bir çözümüdür.

4. BÖLÜM

İKİNCİ MERTEBEDEN SÜREKLİ DAĞITILMIŞ ARGÜMENTLİ NÖTRAL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

4.1. Giriş

Bu bölümde

$$\begin{aligned}\left(r(t)\left(x(t)-p(t)x(t-\tau)\right)'\right)' &+ \int_{a_1}^{b_1} f_1(t,x(\sigma_1(t,\xi)))d\xi \\ &- \int_{a_2}^{b_2} f_2(t,x(\sigma_2(t,\xi)))d\xi = g(t)\end{aligned} \tag{4.1}$$

ve

$$\begin{aligned}\left(r(t)\Big(x(t)-\int_a^b P(t,\xi)x(t-\xi)d\xi\Big)'\right)' &+ \int_{a_1}^{b_1} f_1(t,x(\sigma_1(t,\xi)))d\xi \\ &- \int_{a_2}^{b_2} f_2(t,x(\sigma_2(t,\xi)))d\xi = g(t)\end{aligned} \tag{4.2}$$

lineer olmayan nötral diferensiyel denklemleri incelenecektir. Burada $g \in C([t_0,\infty),\ \mathbb{R})$, $\tau > 0$, $r \in C([t_0,\infty),\ (0,\infty))$, $0 < a < b$, için $P(t,\xi) \in C([t_0,\infty)\times[a,b],\mathbb{R})$ ve $0 \le a_i < b_i$, $i = 1,2$ için $\lim_{t\to\infty}\sigma_i(t,\xi) = \infty$ olmak üzere $\sigma_i(t,\xi) \in C([t_0,\infty)\times[a_i,b_i],\mathbb{R})$ şeklindedir.

Bölüm boyunca, $i = 1,2$ için $f_i(t,x) \in C([t_0,\infty)\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ fonksiyonu x e göre azalmayan; $i = 1,2$ ve $x \neq 0$ için $xf_i(t,x) > 0$ ve $t \in [t_0,\infty)$ ve $x,y \in [e,f]$ için,

$$|f_i(t,x) - f_i(t,y)| \le q_i(t)|x-y| \tag{4.3}$$

olduğunu kabul edelim. Burada $q_i \in C([t_0,\infty),\mathbb{R}^+)$ ve $[e,f]$ $(0<e<f$ veya $e<f<0)$ herhangi bir kapalı aralıktır.

Ayrıca kabul edelim ki

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{s}^{\infty}\frac{q_i(u)}{r(s)}duds<\infty,\quad i=1,2, \tag{4.4}$$

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{s}^{\infty}\frac{|f_i(u,d)|}{r(s)}duds<\infty,\quad d\neq 0,\ i=1,2, \tag{4.5}$$

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{s}^{\infty}\frac{|g(u)|}{r(s)}duds<\infty \tag{4.6}$$

sağlansın.

Son yıllarda nötral diferansiyel denklemlerin salınımlı ve salınımsız davranışlarını inceleyen birçok çalışma olmuştur. Örneğin 2010 yılında Candan ve Dahiya [30]' teki çalşmalarında $k=1,2$ için

$$\frac{d^k}{dt^k}\left[x(t)+P(t)x(t-\tau)\right]+\int_a^b q_1(t,\xi)x(t-\xi)d\xi-\int_c^d q_2(t,\mu)x(t-\mu)d\mu=0,$$

formundaki nötral diferansiyel denkleminin salınımsız çözümlerini incelediler.

Yukarıda belirtilen çalışma ışığında bu çalışmadaki amacımız, Banach daralma prensibini kullanarak (4.1) ve (4.2) denklemlerinin salınımsız çözümlerinin varlığı için yeterli bazı koşullar vermektir.

$t_1\geq t_0$ için $T_0=\min\{t_1-\tau,\inf_{t\geq t_1}\min_{\xi\in[a_1,b_1]}\sigma_1(t,\xi),\inf_{t\geq t_1}\min_{\xi\in[a_2,b_2]}\sigma_2(t,\xi)\}$ olsun. (4.1) denkleminin çözümü $x\in C([T_0,\infty),\mathbb{R})$, (4.1) denklemini sağlar ayrıca $t\geq t_1$ için $x(t)-p(t)x(t-\tau)$ ve $r(t)(x(t)-p(t)x(t-\tau))'$, $[t_1,\infty]$ aralığında sürekli türevlenebilirdir.

$t_1\geq t_0$ için $T_1=\min\{t_1-b,\ \inf_{t\geq t_1}\min_{\xi\in[a_1,b_1]}\sigma_1(t,\xi),\inf_{t\geq t_1}\min_{\xi\in[a_2,b_2]}\sigma_2(t,\xi)\}$

olsun. (4.2) denkleminin çözümü $x \in C([T_1,\infty),\mathbb{R})$, (4.2) denklemini sağlar ayrıca $t \geq t_1$ için $x(t) - \int_{a_3}^{b_3} p(t,\xi)x(t-\xi)d\xi$ ve $r(t)(x(t) - \int_{a_3}^{b_3} p(t,\xi)x(t-\xi)d\xi)'$, $[t_1,\infty]$ aralığında sürekli türevlenebilirdir.

Bilindiği gibi (4.1) ve (4.2) nin bir çözümü keyfi sayıda sıfıra sahipse salınımlıdır, aksi halde salınım yapmayandır denir.

Bu bölümde X, $[t_0,\infty)$ aralığında sup norma sahip, sürekli ve sınırlı tüm fonksiyonların kümesi olarak kabul edilmiştir.

4.2. Temel Sonuçlar

Teorem 4.2.1. Kabul edelim ki (4.4) - (4.6) sağlansın ve $0 \leq p(t) \leq p < 1$ olsun. Bu durumda (4.1) denklemi sınırlı salınım yapmayan bir çözüme sahiptir.

İspat: Varsayalım ki $d > 0$ için (4.5) sağlansın, $d < 0$ için durum benzerdir. $N_2 = d$ olsun.

$$A = \{x \in X : N_1 \leq x(t) \leq N_2, \quad t \geq t_0\},$$

kümesini alalım, burada N_1 ve N_2,

$$N_1 < (1-p)N_2$$

olacak şekilde pozitif sabitlerdir. A nın X in kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi olduğu açıktır.

(4.4) - (4.6) i ele alırsak, $t \geq t_1$ için $t - \tau \geq t_0$, $\sigma_i(t,\xi) \geq t_0$, $\xi \in [a_i,b_i]$, $i = 1,2$ olacak şekilde yeterince büyük bir $t_1 > t_0$ vardır ve

$$p + \int_{t_1}^{\infty}\int_{s}^{\infty} \frac{1}{r(s)}[(b_1-a_1)q_1(u) + (b_2-a_2)q_2(u)]duds \leq \theta_1 < 1, \tag{4.7}$$

burada θ_1 sabittir,

$$\int_{t_1}^{\infty}\int_{s}^{\infty} \frac{1}{r(s)}[(b_1-a_1)f_1(u,d) + |g(u)|]duds \leq \alpha - N_1, \tag{4.8}$$

$$\int_{t_1}^{\infty}\int_{s}^{\infty}\frac{1}{r(s)}[(b_2-a_2)f_2(u,d)+|g(u)|]duds\leq(1-p)N_2-\alpha, \tag{4.9}$$

eşitsizlikleri $\alpha\in\big(N_1,(1-p)N_2\big)$ olmak üzere sağlanır.

Şimdi aşağıdaki gibi bir $S:A\longrightarrow X$ dönüşümü tanımlayalım:

$$(Sx)(t)=\begin{cases}\alpha+p(t)x(t-\tau)-\int_t^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_s^{\infty}[\int_{a_1}^{b_1}f_1(u,x(\sigma_1(u,\xi)))d\xi\\ -\int_{a_2}^{b_2}f_2(u,x(\sigma_2(u,\xi)))d\xi-g(u)]duds,\ \ t\geq t_1\\ (Sx)(t_1),\ \ t_0\leq t\leq t_1.\end{cases}$$

Açıkça görülür ki Sx süreklidir. Her $x\in A$ ve $t\geq t_1$ için (4.9) kullanılarak,

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &= \alpha+p(t)x(t-\tau)-\int_t^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_s^{\infty}\Big[\int_{a_1}^{b_1}f_1(u,x(\sigma_1(u,\xi)))d\xi\\ &- \int_{a_2}^{b_2}f_2(u,x(\sigma_2(u,\xi)))d\xi-g(u)\Big]duds\\ &\leq \alpha+pN_2+\int_{t_1}^{\infty}\int_s^{\infty}\frac{1}{r(s)}[(b_2-a_2)f_2(u,d)+|g(u)|]duds\\ &\leq N_2\end{aligned}$$

ve (4.8) kullanılarak,

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &= \alpha+p(t)x(t-\tau)-\int_t^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_s^{\infty}\Big[\int_{a_1}^{b_1}f_1(u,x(\sigma_1(u,\xi)))d\xi\\ &- \int_{a_2}^{b_2}f_2(u,x(\sigma_2(u,\xi)))d\xi-g(u)\Big]duds\\ &\geq \alpha-\int_{t_1}^{\infty}\int_s^{\infty}\frac{1}{r(s)}[(b_1-a_1)f_1(u,d)+|g(u)|]duds\\ &\geq N_1\end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde $SA\subset A$ dir. Şimdi, S nin A üzerinde bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. $x,y\in A$ ve $t\geq t_1$ için (4.3) ve (4.7) göz önünde bulundurulacak olursa sup norm kullanılarak

$$
\begin{aligned}
|(Sx)(t)-(Sy)(t)| &\leq p|x(t-\tau)-y(t-\tau)| \\
&+ \int_t^\infty \frac{1}{r(s)} \int_s^\infty \int_{a_1}^{b_1} |f_1(u,x(\sigma_1(u,\xi)))-f_1(u,y(\sigma_1(u,\xi)))|d\xi duds \\
&+ \int_t^\infty \frac{1}{r(s)} \int_s^\infty \int_{a_2}^{b_2} |f_2(u,x(\sigma_2(u,\xi)))-f_2(u,y(\sigma_2(u,\xi)))|d\xi duds \\
&\leq p|x(t-\tau)-y(t-\tau)| \\
&+ \int_{t_1}^\infty \frac{1}{r(s)} \int_s^\infty \int_{a_1}^{b_1} q_1(u)|x(\sigma_1(u,\xi))-y(\sigma_1(u,\xi))|d\xi duds \\
&+ \int_{t_1}^\infty \frac{1}{r(s)} \int_s^\infty \int_{a_2}^{b_2} q_2(u)|x(\sigma_2(u,\xi))-y(\sigma_2(u,\xi))|d\xi duds \\
&\leq \|x-y\|\Big[p+\int_{t_1}^\infty \int_s^\infty \frac{1}{r(s)}[(b_1-a_1)q_1(u)+(b_2-a_2)q_2(u)]duds\Big] \\
&\leq \theta_1\|x-y\|,
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan

$$\|Sx-Sy\| \leq \theta_1\|x-y\|$$

yazabiliriz. $\theta_1 < 1$ olduğundan S, A üzerinde bir daralma dönüşümüdür. Banach daralma dönüşümü prensibinden yararlanırsak, S, $x \in A$ için $Sx = x$ olacak şekilde bir sabit noktaya sahiptir ki bu da (4.1) denkleminin pozitif bir çözümüdür. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.2.2. Kabul edelim ki (4.4) - (4.6) sağlansın ve $1 < p_1 \leq p(t) \leq p_2 < \infty$ olsun. Bu durumda (4.1) denklemi sınırlı salınım yapmayan bir çözüme sahiptir.

İspat: Varsayalım ki $d > 0$ için (4.5) sağlansın, $d < 0$ için durum benzerdir. $N_4 = d$ olsun.

$$A = \{x \in X : N_3 \leq x(t) \leq N_4, \quad t \geq t_0\},$$

kümesini alalım, burada N_3 ve N_4,

$$p_2 N_3 < (p_1 - 1)N_4$$

olacak şekilde pozitif sabitlerdir. Açıktır ki A, X in kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesidir.

(4.4) - (4.6) i ele alırsak, $t \geq t_1$ için $\sigma_i(t+\tau,\xi) \geq t_0$, $\xi \in [a_i,b_i]$, $i = 1,2$ olacak şekilde yeterince büyük bir $t_1 > t_0$ vardır ve

$$\frac{1}{p_1}\left[1+\int_{t_1}^{\infty}\int_{s}^{\infty}\frac{1}{r(s)}[(b_1-a_1)q_1(u)+(b_2-a_2)q_2(u)]duds\right] \leq \theta_2 < 1, \tag{4.10}$$

burada θ_2 sabittir,

$$\int_{t_1}^{\infty}\int_{s}^{\infty}\frac{1}{r(s)}[(b_1-a_1)f_1(u,d)+|g(u)|]duds \leq (p_1-1)N_4-\alpha \tag{4.11}$$

$$\int_{t_1}^{\infty}\int_{s}^{\infty}\frac{1}{r(s)}[(b_2-a_2)f_2(u,d)+|g(u)|]duds \leq \alpha-p_2N_3, \tag{4.12}$$

eşitsizlikleri $\alpha \in (p_2N_3,(p_1-1)N_4)$ olmak üzere sağlanır.

Şimdi aşağıdaki gibi bir $S : A \longrightarrow X$ dönüşümü tanımlayalım:

$$(Sx)(t) = \begin{cases} \frac{1}{p(t+\tau)}\Big[\alpha + x(t+\tau) + \int_{t+\tau}^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_{s}^{\infty}[\int_{a_1}^{b_1} f_1(u,x(\sigma_1(u,\xi)))d\xi \\ -\int_{a_2}^{b_2} f_2(u,x(\sigma_2(u,\xi)))d\xi - g(u)]duds\Big], \quad t \geq t_1 \\ (Sx)(t_1), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Açıkça görülür ki Sx süreklidir. Her $x \in A$ ve $t \geq t_1$ için (4.11) kullanılarak,

$$\begin{aligned} (Sx)(t) &= \frac{1}{p(t+\tau)}\left[\alpha + x(t+\tau) + \int_{t+\tau}^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_{s}^{\infty}\Big[\int_{a_1}^{b_1} f_1(u,x(\sigma_1(u,\xi)))d\xi\right. \\ &- \left.\int_{a_2}^{b_2} f_2(u,x(\sigma_2(u,\xi)))d\xi - g(u)\Big]duds\right] \\ &\leq \frac{1}{p_1}\left[\alpha + N_4 + \int_{t_1}^{\infty}\int_{s}^{\infty}\frac{1}{r(s)}[(b_1-a_1)f_1(u,d)+|g(u)|]duds\right] \\ &\leq N_4 \end{aligned}$$

ve (4.12) kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
(Sx)(t) &= \frac{1}{p(t+\tau)}\Bigg[\alpha + x(t+\tau) + \int_{t+\tau}^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_{s}^{\infty}\Big[\int_{a_1}^{b_1} f_1(u,x(\sigma_1(u,\xi)))d\xi \\
&- \int_{a_2}^{b_2} f_2(u,x(\sigma_2(u,\xi)))d\xi - g(u)\Big]duds\Bigg] \\
&\geq \frac{1}{p_2}\Bigg[\alpha - \int_{t_1}^{\infty}\int_{s}^{\infty}\frac{1}{r(s)}[(b_2-a_2)f_2(u,d) + |g(u)|]duds\Bigg] \\
&\geq N_3
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. O halde $SA \subset A$ dir. Şimdi, S nin A üzerinde bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. $x, y \in A$ ve $t \geq t_1$ için (4.3) ve (4.10) göz önünde bulundurulacak olursa sup norm kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
|(Sx)(t) - (Sy)(t)| &\leq \frac{1}{p(t+\tau)}\Bigg[|x(t+\tau) - y(t+\tau)| \\
&+ \int_{t+\tau}^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_{s}^{\infty}\int_{a_1}^{b_1}|f_1(u,x(\sigma_1(u,\xi))) - f_1(u,y(\sigma_1(u,\xi)))|d\xi duds \\
&+ \int_{t+\tau}^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_{s}^{\infty}\int_{a_2}^{b_2}|f_2(u,x(\sigma_2(u,\xi))) - f_2(u,y(\sigma_2(u,\xi)))|d\xi duds\Bigg] \\
&\leq \frac{1}{p_1}\Bigg[|x(t+\tau) - y(t+\tau)| \\
&+ \int_{t_1}^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_{s}^{\infty}\int_{a_1}^{b_1} q_1(u)|x(\sigma_1(u,\xi)) - y(\sigma_1(u,\xi))|d\xi duds \\
&+ \int_{t_1}^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_{s}^{\infty}\int_{a_2}^{b_2} q_2(u)|x(\sigma_2(u,\xi)) - y(\sigma_2(u,\xi))|d\xi duds\Bigg] \\
&\leq \frac{\|x-y\|}{p_1}\Bigg[1 + \int_{t_1}^{\infty}\int_{s}^{\infty}\frac{1}{r(s)}[(b_1-a_1)q_1(u) + (b_2-a_2)q_2(u)]duds\Bigg] \\
&\leq \theta_2\|x-y\|
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan

$$\|Sx - Sy\| \leq \theta_2\|x-y\|$$

yazabiliriz. $\theta_2 < 1$ olduğundan S, A üzerinde bir daralma dönüşümüdür. Banach daralma dönüşümü prensibinden yararlanırsak, S, $x \in A$ için $Sx = x$ olacak şekilde bir sabit noktaya sahiptir ki bu da (4.1) denkleminin pozitif bir çözümüdür. Bu ise ispatı tamamlar.

■

Teorem 4.2.3. Kabul edelim ki (4.4) - (4.6) sağlansın ve $-1 < -p \leq p(t) \leq 0$ olsun. Bu durumda (4.1) denklemi sınırlı salınım yapmayan bir çözüme sahiptir.

İspat: Varsayalım ki $d > 0$ için (4.5) sağlansın, $d < 0$ için durum benzerdir. $N_6 = d$ olsun.

$$A = \{x \in X : N_5 \leq x(t) \leq N_6, \quad t \geq t_0\},$$

kümesini alalım, burada N_5 ve N_6,

$$N_5 + pN_6 < N_6$$

olacak şekilde pozitif sabitlerdir. Açıktır ki A, X in kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesidir.

(4.4) - (4.6) i ele alırsak, $t \geq t_1$ için $t - \tau \geq t_0$, $\sigma_i(t, \xi) \geq t_0$, $\xi \in [a_i, b_i]$, $i = 1, 2$ olacak şekilde yeterince büyük bir $t_1 > t_0$ vardır ve

$$p + \int_{t_1}^{\infty} \int_{s}^{\infty} \frac{1}{r(s)}[(b_1 - a_1)q_1(u) + (b_2 - a_2)q_2(u)]duds \leq \theta_3 < 1, \tag{4.13}$$

burada θ_3 sabittir,

$$\int_{t_1}^{\infty} \int_{s}^{\infty} \frac{1}{r(s)}[(b_1 - a_1)f_1(u, d) + |g(u)|]duds \leq \alpha - N_5 - pN_6, \tag{4.14}$$

$$\int_{t_1}^{\infty} \int_{s}^{\infty} \frac{1}{r(s)}[(b_2 - a_2)f_2(u, d) + |g(u)|]duds \leq N_6 - \alpha \tag{4.15}$$

eşitsizlikleri $\alpha \in (N_5 + pN_6, N_6)$ olmak üzere sağlanır.

Şimdi aşağıdaki gibi bir $S : A \longrightarrow X$ dönüşümü tanımlayalım:

$$(Sx)(t) = \begin{cases} \alpha + p(t)x(t - \tau) - \int_t^{\infty} \frac{1}{r(s)} \int_s^{\infty} [\int_{a_1}^{b_1} f_1(u, x(\sigma_1(u, \xi)))d\xi \\ - \int_{a_2}^{b_2} f_2(u, x(\sigma_2(u, \xi)))d\xi - g(u)]duds, \quad t \geq t_1 \\ (Sx)(t_1), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Açıkça görülür ki Sx süreklidir. Her $x \in A$ ve $t \geq t_1$ için (4.15) kullanılarak,

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &= \alpha + p(t)x(t-\tau) - \int_t^\infty \frac{1}{r(s)} \int_s^\infty \Big[\int_{a_1}^{b_1} f_1(u, x(\sigma_1(u,\xi)))d\xi \\ &- \int_{a_2}^{b_2} f_2(u, x(\sigma_2(u,\xi)))d\xi - g(u)\Big] duds \\ &\leq \alpha + \int_{t_1}^\infty \int_s^\infty \frac{1}{r(s)}[(b_2-a_2)f_2(u,d) + |g(u)|]duds \\ &\leq N_6\end{aligned}$$

ve (4.14) kullanılarak,

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &= \alpha + p(t)x(t-\tau) - \int_t^\infty \frac{1}{r(s)} \int_s^\infty \Big[\int_{a_1}^{b_1} f_1(u, x(\sigma_1(u,\xi)))d\xi \\ &- \int_{a_2}^{b_2} f_2(u, x(\sigma_2(u,\xi)))d\xi - g(u)\Big] duds \\ &\geq \alpha - pN_6 - \int_{t_1}^\infty \int_s^\infty \frac{1}{r(s)}[(b_1-a_1)f_1(u,d) + |g(u)|]duds \\ &\geq N_5\end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde $SA \subset A$ dir. Şimdi, S nin A üzerinde bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. $x, y \in A$ ve $t \geq t_1$ için (4.3) ve (4.13) göz önünde bulundurulacak olursa sup norm kullanılarak,

$$\begin{aligned}|(Sx)(t) - (Sy)(t)| &\leq p|x(t-\tau) - y(t-\tau)| \\ &+ \int_t^\infty \frac{1}{r(s)} \int_s^\infty \int_{a_1}^{b_1} |f_1(u, x(\sigma_1(u,\xi))) - f_1(u, y(\sigma_1(u,\xi)))|d\xi duds \\ &+ \int_t^\infty \frac{1}{r(s)} \int_s^\infty \int_{a_2}^{b_2} |f_2(u, x(\sigma_2(u,\xi))) - f_2(u, y(\sigma_2(u,\xi)))|d\xi duds \\ &\leq p|x(t-\tau) - y(t-\tau)| \\ &+ \int_{t_1}^\infty \frac{1}{r(s)} \int_s^\infty \int_{a_1}^{b_1} q_1(u)|x(\sigma_1(u,\xi)) - y(\sigma_1(u,\xi))|d\xi duds \\ &+ \int_{t_1}^\infty \frac{1}{r(s)} \int_s^\infty \int_{a_2}^{b_2} q_2(u)|x(\sigma_2(u,\xi)) - y(\sigma_2(u,\xi))|d\xi duds \\ &\leq \|x-y\| \left[p + \int_{t_1}^\infty \int_s^\infty \frac{1}{r(s)}[(b_1-a_1)q_1(u) + (b_2-a_2)q_2(u)]duds \right] \\ &\leq \theta_3 \|x-y\|,\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|Sx - Sy\| \leq \theta_3 \|x - y\|$$

yazabiliriz. $\theta_3 < 1$ olduğundan S, A üzerinde bir daralma dönüşümüdür. Banach daralma dönüşümü prensibinden yararlanırsak, S, $x \in A$ için $Sx = x$ olacak şekilde bir sabit noktaya sahiptir ki bu da (4.1) denkleminin pozitif bir çözümüdür. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.2.4. Kabul edelim ki (4.4) - (4.6) sağlansın ve $-\infty < -p_1 \leq p(t) \leq -p_2 < -1$ olsun. Bu durumda (4.1) denklemi sınırlı salınım yapmayan bir çözüme sahiptir.

İspat: Varsayalım ki $d > 0$ için (4.5) sağlansın, $d < 0$ için durum benzerdir. $N_8 = d$ olsun.

$$A = \{x \in X : N_7 \leq x(t) \leq N_8, \quad t \geq t_0\},$$

kümesini alalım, burada N_7 ve N_8,

$$p_1 N_7 + N_8 < p_2 N_8$$

olacak şekilde pozitif sabitlerdir. A nın X in kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi olduğu açıktır.

(4.4) - (4.6) i ele alırsak, $t \geq t_1$ için $\sigma_i(t + \tau, \xi) \geq t_0$, $\xi \in [a_i, b_i]$, $i = 1, 2$ olacak şekilde yeterince büyük bir $t_1 > t_0$ vardır ve

$$\frac{1}{p_2}\left[1 + \int_{t_1}^{\infty}\int_{s}^{\infty} \frac{1}{r(s)}\big[(b_1 - a_1)q_1(u) + (b_2 - a_2)q_2(u)\big]duds\right] \leq \theta_4 < 1, \quad (4.16)$$

burada θ_4 sabittir,

$$\int_{t_1}^{\infty}\int_{s}^{\infty} \frac{1}{r(s)}\big[(b_1 - a_1)f_1(u, d) + |g(u)|\big]duds \leq \alpha - p_1 N_7 - N_8 \quad (4.17)$$

$$\int_{t_1}^{\infty}\int_{s}^{\infty} \frac{1}{r(s)}\big[(b_2 - a_2)f_2(u, d) + |g(u)|\big]duds \leq p_2 N_8 - \alpha \quad (4.18)$$

eşitsizlikleri $\alpha \in (p_1N_7 + N_8, p_2N_8)$ olmak üzere sağlanır.

Şimdi aşağıdaki gibi bir $S : A \longrightarrow X$ dönüşümü tanımlayalım:

$$(Sx)(t) = \begin{cases} -\frac{1}{p(t+\tau)}\Big[\alpha - x(t+\tau) - \int_{t+\tau}^{\infty} \frac{1}{r(s)} \int_s^{\infty} [\int_{a_1}^{b_1} f_1(u, x(\sigma_1(u,\xi)))d\xi \\ - \int_{a_2}^{b_2} f_2(u, x(\sigma_2(u,\xi)))d\xi - g(u)]duds\Big], \quad t \geq t_1 \\ (Sx)(t_1), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Açıkça görülür ki Sx süreklidir. Her $x \in A$ ve $t \geq t_1$ için (4.18) kullanılarak,

$$\begin{aligned} (Sx)(t) &= -\frac{1}{p(t+\tau)}\Bigg[\alpha - x(t+\tau) - \int_{t+\tau}^{\infty} \frac{1}{r(s)} \int_s^{\infty} \Big[\int_{a_1}^{b_1} f_1(u, x(\sigma_1(u,\xi)))d\xi \\ &- \int_{a_2}^{b_2} f_2(u, x(\sigma_2(u,\xi)))d\xi - g(u)\Big]duds\Bigg] \\ &\leq \frac{1}{p_2}\Bigg[\alpha + \int_{t_1}^{\infty} \int_s^{\infty} \frac{1}{r(s)}\big[(b_2 - a_2)f_2(u,d) + |g(u)|\big]duds\Bigg] \\ &\leq N_8 \end{aligned}$$

ve (4.17) kullanılarak,

$$\begin{aligned} (Sx)(t) &= -\frac{1}{p(t+\tau)}\Bigg[\alpha - x(t+\tau) - \int_{t+\tau}^{\infty} \frac{1}{r(s)} \int_s^{\infty} \Big[\int_{a_1}^{b_1} f_1(u, x(\sigma_1(u,\xi)))d\xi \\ &- \int_{a_2}^{b_2} f_2(u, x(\sigma_2(u,\xi)))d\xi - g(u)\Big]duds\Bigg] \\ &\geq \frac{1}{p_1}\Bigg[\alpha - N_8 - \int_{t_1}^{\infty} \int_s^{\infty} \frac{1}{r(s)}\big[(b_1 - a_1)f_1(u,d) + |g(u)|\big]duds\Bigg] \\ &\geq N_7 \end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde $SA \subset A$ dir. Şimdi, S nin A üzerinde bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. $x, y \in A$ ve $t \geq t_1$ için (4.3) ve (4.16) göz önünde bulundurulacak olursa sup norm kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
|(Sx)(t)-(Sy)(t)| &\leq \frac{1}{|p(t+\tau)|}\Bigg[|x(t+\tau)-y(t+\tau)| \\
&+ \int_{t+\tau}^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_{s}^{\infty}\int_{a_1}^{b_1}|f_1(u,x(\sigma_1(u,\xi)))-f_1(u,y(\sigma_1(u,\xi)))|d\xi duds \\
&+ \int_{t+\tau}^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_{s}^{\infty}\int_{a_2}^{b_2}|f_2(u,x(\sigma_2(u,\xi)))-f_2(u,y(\sigma_2(u,\xi)))|d\xi duds\Bigg] \\
&\leq \frac{1}{p_2}\Bigg[|x(t+\tau)-y(t+\tau)| \\
&+ \int_{t_1}^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_{s}^{\infty}\int_{a_1}^{b_1}q_1(u)|x(\sigma_1(u,\xi))-y(\sigma_1(u,\xi))|d\xi duds \\
&+ \int_{t_1}^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_{s}^{\infty}\int_{a_2}^{b_2}q_2(u)|x(\sigma_2(u,\xi))-y(\sigma_2(u,\xi))|d\xi duds\Bigg] \\
&\leq \frac{\|x-y\|}{p_2}\Bigg[1+\int_{t_1}^{\infty}\int_{s}^{\infty}\frac{1}{r(s)}[(b_1-a_1)q_1(u)+(b_2-a_2)q_2(u)]duds\Bigg] \\
&\leq \theta_4\|x-y\|
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan

$$\|Sx-Sy\|\leq\theta_4\|x-y\|$$

yazabiliriz. $\theta_4<1$ olduğundan S, A üzerinde bir daralma dönüşümüdür. Banach daralma dönüşümü prensibinden yararlanırsak, S, $x\in A$ için $Sx=x$ olacak şekilde bir sabit noktaya sahiptir ki bu da (4.1) denkleminin pozitif bir çözümüdür. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.2.5. Kabul edelim ki (4.4) - (4.6) sağlansın, $P(t,\xi)\geq 0$ ve $\int_a^b P(t,\xi)d\xi\leq p<1$ olsun. Bu durumda (4.2) denklemi sınırlı salınım yapmayan bir çözüme sahiptir.

İspat: Varsayalım ki $d>0$ için (4.5) sağlansın, $d<0$ için durum benzerdir. $N_{10}=d$ olsun.

$$A=\{x\in X: N_9\leq x(t)\leq N_{10},\quad t\geq t_0\},$$

kümesini alalım, burada N_9 ve N_{10},

$$N_9<(1-p)N_{10}$$

olacak şekilde pozitif sabitlerdir. A nın X in kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi olduğu açıktır.

(4.4) - (4.6) i ele alırsak, $t \geq t_1$ için $t - b \geq t_0$, $\sigma_i(t,\xi) \geq t_0$, $\xi \in [a_i, b_i]$, $i = 1, 2$ olacak şekilde yeterince büyük bir $t_1 > t_0$ vardır ve

$$p + \int_{t_1}^{\infty} \int_{s}^{\infty} \frac{1}{r(s)} \big[(b_1 - a_1)q_1(u) + (b_2 - a_2)q_2(u)\big] du ds \leq \theta_5 < 1, \tag{4.19}$$

burada θ_5 sabittir,

$$\int_{t_1}^{\infty} \int_{s}^{\infty} \frac{1}{r(s)} \big[(b_1 - a_1)f_1(u,d) + |g(u)|\big] du ds \leq \alpha - N_9, \tag{4.20}$$

$$\int_{t_1}^{\infty} \int_{s}^{\infty} \frac{1}{r(s)} \big[(b_2 - a_2)f_2(u,d) + |g(u)|\big] du ds \leq (1-p)N_{10} - \alpha \tag{4.21}$$

eşitsizlikleri $\alpha \in \big(N_9, (1-p)N_{10}\big)$ olmak üzere sağlanır.

Şimdi aşağıdaki gibi bir $S : A \longrightarrow X$ dönüşümü tanımlayalım:

$$(Sx)(t) = \begin{cases} \alpha + \int_a^b P(t,\xi)x(t-\xi)d\xi - \int_t^{\infty} \frac{1}{r(s)} \int_s^{\infty} [\int_{a_1}^{b_1} f_1(u, x(\sigma_1(u,\xi)))d\xi \\ - \int_{a_2}^{b_2} f_2(u, x(\sigma_2(u,\xi)))d\xi - g(u)]du ds, \quad t \geq t_1 \\ (Sx)(t_1), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Açıkça görülür ki Sx süreklidir. Her $x \in A$ ve $t \geq t_1$ için (4.21) kullanılarak,

$$\begin{aligned} (Sx)(t) &= \alpha + \int_a^b P(t,\xi)x(t-\xi)d\xi - \int_t^{\infty} \frac{1}{r(s)} \int_s^{\infty} \Big[\int_{a_1}^{b_1} f_1(u, x(\sigma_1(u,\xi)))d\xi \\ &- \int_{a_2}^{b_2} f_2(u, x(\sigma_2(u,\xi)))d\xi - g(u)\Big] du ds \\ &\leq \alpha + pN_{10} + \int_{t_1}^{\infty} \int_{s}^{\infty} \frac{1}{r(s)} \big[(b_2 - a_2)f_2(u,d) + |g(u)|\big] du ds \\ &\leq N_{10} \end{aligned}$$

ve (4.20) kullanılarak,

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &= \alpha + \int_a^b P(t,\xi)x(t-\xi)d\xi - \int_t^\infty \frac{1}{r(s)}\int_s^\infty \Big[\int_{a_1}^{b_1} f_1(u,x(\sigma_1(u,\xi)))d\xi \\ &- \int_{a_2}^{b_2} f_2(u,x(\sigma_2(u,\xi)))d\xi - g(u)\Big]duds \\ &\geq \alpha - \int_{t_1}^\infty \int_s^\infty \frac{1}{r(s)}\big[(b_1-a_1)f_1(u,d) + |g(u)|\big]duds \\ &\geq N_9\end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde $SA \subset A$ dir. Şimdi, S nin A üzerinde bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. $x, y \in A$ ve $t \geq t_1$ için (4.3) ve (4.19) göz önünde bulundurulacak olursa sup norm kullanılarak,

$$\begin{aligned}|(Sx)(t) - (Sy)(t)| &\leq \int_a^b P(t,\xi)|x(t-\xi) - y(t-\xi)|d\xi \\ &+ \int_t^\infty \frac{1}{r(s)}\int_s^\infty \int_{a_1}^{b_1} |f_1(u,x(\sigma_1(u,\xi))) - f_1(u,y(\sigma_1(u,\xi)))|d\xi duds \\ &+ \int_t^\infty \frac{1}{r(s)}\int_s^\infty \int_{a_2}^{b_2} |f_2(u,x(\sigma_2(u,\xi))) - f_2(u,y(\sigma_2(u,\xi)))|d\xi duds \\ &\leq \int_a^b P(t,\xi)|x(t-\xi) - y(t-\xi)|d\xi \\ &+ \int_{t_1}^\infty \frac{1}{r(s)}\int_s^\infty \int_{a_1}^{b_1} q_1(u)|x(\sigma_1(u,\xi)) - y(\sigma_1(u,\xi))|d\xi duds \\ &+ \int_{t_1}^\infty \frac{1}{r(s)}\int_s^\infty \int_{a_2}^{b_2} q_2(u)|x(\sigma_2(u,\xi)) - y(\sigma_2(u,\xi))|d\xi duds \\ &\leq \|x-y\|\left[p + \int_{t_1}^\infty \int_s^\infty \frac{1}{r(s)}\big[(b_1-a_1)q_1(u) + (b_2-a_2)q_2(u)\big]duds\right] \\ &\leq \theta_5\|x-y\|\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|Sx - Sy\| \leq \theta_5\|x-y\|$$

yazabiliriz. $\theta_5 < 1$ olduğundan S, A üzerinde bir daralma dönüşümüdür. Banach daralma dönüşümü prensibinden yararlanırsak, S, $x \in A$ için $Sx = x$ olacak şekilde bir sabit noktaya sahiptir ki bu da (4.2) denkleminin pozitif bir çözümüdür. Bu ise ispatı tamamlar.

■

Teorem 4.2.6. Kabul edelim ki (4.4) - (4.6) sağlansın, $P(t,\xi) \leq 0$ ve $-1 < -p \leq \int_a^b P(t,\xi)d\xi$ olsun. Bu durumda (4.2) denklemi sınırlı ve salınım yapmayan bir çözüme sahiptir.

İspat: Varsayalım ki $d > 0$ için (4.5) sağlansın, $d < 0$ için durum benzerdir. $N_{12} = d$ olsun.

$$A = \{x \in X : N_{11} \leq x(t) \leq N_{12}, \quad t \geq t_0\},$$

kümesini alalım, burada N_{11} ve N_{12},

$$pN_{12} + N_{11} < N_{12}$$

olacak şekilde pozitif sabitlerdir. A nın X in kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi olduğu açıktır.

(4.4) - (4.6) i ele alırsak, $t \geq t_1$ için $t - b \geq t_0$, $\sigma_i(t,\xi) \geq t_0$, $\xi \in [a_i, b_i]$, $i = 1, 2$ olacak şekilde yeterince büyük bir $t_1 > t_0$ vardır ve

$$p + \int_{t_1}^{\infty}\int_{s}^{\infty} \frac{1}{r(s)}\big[(b_1 - a_1)q_1(u) + (b_2 - a_2)q_2(u)\big]duds \leq \theta_6 < 1, \tag{4.22}$$

burada θ_6 sabittir,

$$\int_{t_1}^{\infty}\int_{s}^{\infty} \frac{1}{r(s)}\big[(b_1 - a_1)f_1(u,d) + |g(u)|\big]duds \leq \alpha - pN_{12} - N_{11}, \tag{4.23}$$

$$\int_{t_1}^{\infty}\int_{s}^{\infty} \frac{1}{r(s)}\big[(b_2 - a_2)f_2(u,d) + |g(u)|\big]duds \leq N_{12} - \alpha \tag{4.24}$$

eşitsizlikleri $\alpha \in (pN_{12} + N_{11}, N_{12})$ olmak üzere sağlanır.

Şimdi aşağıdaki gibi bir $S : A \longrightarrow X$ dönüşümü tanımlayalım:

$$(Sx)(t) = \begin{cases} \alpha + \int_a^b P(t,\xi)x(t-\xi)d\xi - \int_t^{\infty} \frac{1}{r(s)} \int_s^{\infty} \big[\int_{a_1}^{b_1} f_1(u, x(\sigma_1(u,\xi)))d\xi \\ - \int_{a_2}^{b_2} f_2(u, x(\sigma_2(u,\xi)))d\xi - g(u)\big]duds, \quad t \geq t_1 \\ (Sx)(t_1), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Açıkça görülür ki Sx süreklidir. Her $x \in A$ ve $t \geq t_1$ için (4.24) kullanılarak,

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &= \alpha + \int_a^b P(t,\xi)x(t-\xi)d\xi - \int_t^\infty \frac{1}{r(s)} \int_s^\infty \Big[\int_{a_1}^{b_1} f_1(u, x(\sigma_1(u,\xi)))d\xi \\ &- \int_{a_2}^{b_2} f_2(u, x(\sigma_2(u,\xi)))d\xi - g(u)\Big] duds \\ &\leq \alpha + \int_{t_1}^\infty \int_s^\infty \frac{1}{r(s)} \big[(b_2 - a_2)f_2(u,d) + |g(u)|\big] duds \\ &\leq N_{12}\end{aligned}$$

ve (4.23) kullanılarak,

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &= \alpha + \int_a^b P(t,\xi)x(t-\xi)d\xi - \int_t^\infty \frac{1}{r(s)} \int_s^\infty \Big[\int_{a_1}^{b_1} f_1(u, x(\sigma_1(u,\xi)))d\xi \\ &- \int_{a_2}^{b_2} f_2(u, x(\sigma_2(u,\xi)))d\xi - g(u)\Big] duds \\ &\geq \alpha - pN_{12} - \int_{t_1}^\infty \int_s^\infty \frac{1}{r(s)} \big[(b_1 - a_1)f_1(u,d) + |g(u)|\big] duds \\ &\geq N_{11}\end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde $SA \subset A$ dir. Şimdi, S nin A üzerinde bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. $x, y \in A$ ve $t \geq t_1$ için (4.3) ve (4.22) göz önünde bulundurulacak olursa sup norm kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
|(Sx)(t)-(Sy)(t)| &\leq \int_a^b (-P(t,\xi))|x(t-\xi)-y(t-\xi)|d\xi \\
&+ \int_t^\infty \frac{1}{r(s)}\int_s^\infty \int_{a_1}^{b_1} |f_1(u,x(\sigma_1(u,\xi)))-f_1(u,y(\sigma_1(u,\xi)))|d\xi duds \\
&+ \int_t^\infty \frac{1}{r(s)}\int_s^\infty \int_{a_2}^{b_2} |f_2(u,x(\sigma_2(u,\xi)))-f_2(u,y(\sigma_2(u,\xi)))|d\xi duds \\
&\leq \int_a^b (-P(t,\xi))|x(t-\xi)-y(t-\xi)|d\xi \\
&+ \int_{t_1}^\infty \frac{1}{r(s)}\int_s^\infty \int_{a_1}^{b_1} q_1(u)|x(\sigma_1(u,\xi))-y(\sigma_1(u,\xi))|d\xi duds \\
&+ \int_{t_1}^\infty \frac{1}{r(s)}\int_s^\infty \int_{a_2}^{b_2} q_2(u)|x(\sigma_2(u,\xi))-y(\sigma_2(u,\xi))|d\xi duds \\
&\leq \|x-y\|\Big[p+\int_{t_1}^\infty \int_s^\infty \frac{1}{r(s)}[(b_1-a_1)q_1(u)+(b_2-a_2)q_2(u)]duds\Big] \\
&\leq \theta_6\|x-y\|
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan

$$\|Sx-Sy\| \leq \theta_6\|x-y\|$$

yazabiliriz. $\theta_6 < 1$ olduğundan S, A üzerinde bir daralma dönüşümüdür. Banach daralma dönüşümü prensibinden yararlanırsak, S, $x \in A$ için $Sx = x$ olacak şekilde bir sabit noktaya sahiptir ki bu da (4.2) denkleminin pozitif bir çözümüdür. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Örnek 4.2.1. $t > 4$ için,

$$
\begin{aligned}
(\exp(t)(x(t)-\exp(-t)x(t-2))')' + \int_0^2 2\exp(-t+2)x(t-2\xi)d\xi \\
- \int_2^4 \exp(-t+2)x(t-\xi)d\xi \\
= 2\exp(2-t)-\exp(2-2t)+\exp(4-2t) \qquad (4.25)
\end{aligned}
$$

denklemini ele alalım. Burada, $r(t) = \exp(t)$, $p(t) = \exp(-t)$, $\tau = 2$, $\sigma_1(t,\xi) = t-2\xi$, $\sigma_2(t,\xi) = t-\xi$, $f_1(t,u) = 2\exp(-t+2)u$, $f_2(t,u) = \exp(-t+2)u$ ve $g(t) = 2\exp(2-t)-\exp(2-2t)+\exp(4-2t)$ dir. Açıkça görülür ki Teorem 4.2.1.' in tüm koşulları sağlanmaktadır ve $x(t) = \exp(-t)+2$, (4.25) denkleminin salınım yapmayan bir çözümüdür.

Örnek 4.2.2. $t > 4$ için,

$$(\exp(t/2)(x(t) - \int_3^4 \exp(-t-2\xi)x(t-\xi)d\xi)')' + \int_1^2 3\exp(-t)x(t-2\xi)d\xi$$
$$-\int_2^4 2\exp(-t)x(t-\xi)d\xi = \frac{1}{4}\exp(-t/2-8) - \frac{1}{4}\exp(-t/2-6) + 3\exp(-3t/2)$$
$$-\frac{15}{2}\exp(-5t/2) - \exp(-t) + \frac{1}{4}\exp(4-3t) - \frac{1}{4}\exp(8-3t). \quad (4.26)$$

denklemini ele alalım. Burada, yazabiliriz ki $r(t) = \exp(t/2)$, $p(t,\xi) = \exp(-t-2\xi)$, $\sigma_1(t,\xi) = t-2\xi$, $\sigma_2(t,\xi) = t-\xi$, $f_1(t,u) = 3\exp(-t)u$, $f_2(t,u) = 2\exp(-t)u$ ve $g(t) = \frac{1}{4}\exp(-t/2-8) - \frac{1}{4}\exp(-t/2-6) + 3\exp(-3t/2) - \frac{15}{2}\exp(-5t/2) - \exp(-t) + \frac{1}{4}\exp(4-3t) - \frac{1}{4}\exp(8-3t)$ dir. Teorem 4.2.5.' in tüm koşulları sağlanmaktadır ve $x(t) = \exp(-2t) + 1$, (4.26) denkleminin salınım yapmayan bir çözümüdür.

5. BÖLÜM

YÜKSEK MERTEBEDEN NÖTRAL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

5.1. Giriş

Bu bölümde yüksek mertebeden lineer olmayan nötral diferensiyel

$$[r(t)[x(t)-p(t)x(t-\tau)]^{(n-1)}]'+(-1)^n[f_1(t,x(\sigma_1(t)))-f_2(t,x(\sigma_2(t)))-g(t)]=0 \quad (5.1)$$

denklemini incelenecektir. Burada $n \geq 2$ bir tamsayı, $p, \sigma_i, g \in C([t_0,\infty),\mathbb{R})$, $\tau > 0$, $r \in C([t_0,\infty),(0,\infty))$ ve $\lim_{t\to\infty} \sigma_i(t) = \infty$, $i = 1,2$ şeklindedir.

Bölüm boyunca, $i = 1,2$ için $f_i(t,x) \in C([t_0,\infty)\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ fonksiyonu x e göre azalmayan; $i = 1,2$ ve $x \neq 0$ için $xf_i(t,x) > 0$ ve $t \in [t_0,\infty)$ ve $x, y \in [a,b]$ için

$$|f_i(t,x) - f_i(t,y)| \leq q_i(t)|x-y| \quad (5.2)$$

olduğunu kabul edelim. Burada $q_i \in C([t_0,\infty),\mathbb{R}^+)$, $i = 1,2$, ve $[a,b]$ ($0 < a < b$ veya $a < b < 0$) herhangi bir kapalı aralıktır.

Ayrıca kabul edelim ki

$$\frac{1}{(n-2)!}\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{s}\frac{s^{n-2}}{r(s)}q_i(u)duds < \infty, \quad i = 1,2, \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{(n-2)!}\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{s}\frac{s^{n-2}}{r(s)}|f_i(u,d)|duds<\infty,\quad d\neq 0,\ i=1,2, \tag{5.4}$$

$$\frac{1}{(n-2)!}\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{s}\frac{s^{n-2}}{r(s)}|g(u)|duds<\infty \tag{5.5}$$

sağlansın.

Bu bölümdeki amacımız (5.1) denkleminin salınım yapmayan çözümlerinin varlığı için yeni yeterli koşullar bulmaktır.

$t_1 \geq t_0$ için $T_0 = \min\{t_1-\tau, \inf_{t\geq t_1}\sigma_1(t), \inf_{t\geq t_1}\sigma_2(t)\}$ olsun. (5.1) denkleminin çözümü $x\in C([T_0,\infty),\mathbb{R})$, (5.1) denklemini sağlar ayrıca $t\geq t_1$ için $[t_1,\infty]$ aralığında, $x(t)-p(t)x(t-\tau)$ n-1 kez sürekli türevlenebilirdir ve $r(t)(x(t)-p(t)x(t-\tau))^{(n-1)}$ sürekli türevlenebilirdir.

Bilindiği üzere eğer (5.1) denkleminin bir çözümü keyfi sayıda sıfıra sahipse salınımlıdır, aksi halde salınım yapmayandır denir.

Çalışma boyunca X, $[t_0,\infty)$ aralığında sup norma sahip, sınırlı ve sürekli fonksiyonların kümesi olarak kabul edilmiştir.

5.2. Temel Sonuçlar

Teorem 5.2.1. Kabul edelim ki (5.3) - (5.5) sağlansın ve $0\leq p(t)\leq p<1$ olsun. Bu durumda (5.1) denklemi sınırlı salınım yapmayan bir çözüme sahiptir.

İspat: Varsayalım ki $d>0$ için (5.4) sağlansın, $d<0$ için durum benzerdir.

$$A=\{x\in X : N_1\leq x(t)\leq d,\quad t\geq t_0\},$$

kümesini alalım, burada N_1

$$N_1<(1-p)d$$

olacak şekilde pozitif bir sabittir. A nın X in kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi olduğu açıktır.

(5.3) - (5.4) i ele alırsak, $t \geq t_1$ için $t - \tau \geq t_0$, $\sigma_1(t) \geq t_0$, $\sigma_2(t) \geq t_0$ olacak şekilde yeterince büyük bir $t_1 > t_0$ vardır ve

$$p + \frac{2}{(n-2)!} \int_{t_1}^{\infty} \int_{t_1}^{s} \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} q_i(u) du ds \leq \theta_1 < 1, \quad i = 1, 2, \tag{5.6}$$

burada θ_1 sabittir,

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_{t_1}^{\infty} \int_{t_1}^{s} \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} [f_1(u, d) + |g(u)|] du ds \leq (1-p)d - \alpha, \tag{5.7}$$

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_{t_1}^{\infty} \int_{t_1}^{s} \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} [f_2(u, d) + |g(u)|] du ds \leq \alpha - N_1 \tag{5.8}$$

eşitsizlikleri $N_1 < \alpha < (1-p)d$ olmak üzere sağlanır.

Şimdi aşağıdaki gibi bir $S : A \longrightarrow X$ dönüşümü tanımlayalım:

$$(Sx)(t) = \begin{cases} \alpha + p(t)x(t-\tau) + \frac{1}{(n-2)!} \int_t^{\infty} \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^{s} [f_1(u, x(\sigma_1(u))) \\ -f_2(u, x(\sigma_2(u))) - g(u)] du ds, \quad t \geq t_1 \\ (Sx)(t_1), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Açıkça görülür ki Sx süreklidir. Her $x \in A$ ve $t \geq t_1$ için (5.7) kullanılarak,

$$\begin{aligned} (Sx)(t) &= \alpha + p(t)x(t-\tau) + \frac{1}{(n-2)!} \int_t^{\infty} \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} \int_{t_1}^{s} [f_1(u, x(\sigma_1(u))) \\ &- f_2(u, x(\sigma_2(u))) - g(u)] du ds \\ &\leq \alpha + pd + \frac{1}{(n-2)!} \int_{t_1}^{\infty} \int_{t_1}^{s} \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)} [f_1(u, d) + |g(u)|] du ds \\ &\leq d, \end{aligned}$$

ve (5.8) kullanılarak,

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &= \alpha + p(t)x(t-\tau) + \frac{1}{(n-2)!}\int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}\int_{t_1}^s [f_1(u,x(\sigma_1(u))) \\ &- f_2(u,x(\sigma_2(u))) - g(u)]duds \\ &\geq \alpha - \frac{1}{(n-2)!}\int_{t_1}^\infty \int_{t_1}^s \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}[f_2(u,d) + |g(u)|]duds \\ &\geq N_1\end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde $SA \subset A$ dir. Şimdi, S nin A üzerinde bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. $x, y \in A$ ve $t \geq t_1$ için (5.2) ve (5.6) göz önünde bulundurulacak olursa sup norm kullanılarak

$$\begin{aligned}|(Sx)(t) - (Sy)(t)| &\leq p|x(t-\tau) - y(t-\tau)| \\ &+ \frac{1}{(n-2)!}\sum_{i=1}^2 \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}\int_{t_1}^s |f_i(u,x(\sigma_i(u))) - f_i(u,y(\sigma_i(u)))|duds \\ &\leq p|x(t-\tau) - y(t-\tau)| \\ &+ \frac{1}{(n-2)!}\sum_{i=1}^2 \int_{t_1}^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}\int_{t_1}^s q_i(u)|x(\sigma_i(u)) - y(\sigma_i(u)))|duds \\ &\leq \|x-y\|\Big[p + \frac{1}{(n-2)!}\sum_{i=1}^2 \int_{t_1}^\infty \int_{t_1}^s \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}q_i(u)duds\Big] \\ &\leq \theta_1\|x-y\|\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|Sx - Sy\| \leq \theta_1\|x-y\|$$

yazabiliriz. $\theta_1 < 1$ olduğundan S, A üzerinde bir daralma dönüşümüdür. Sonuç olarak, $S, x \in A$ için $Sx = x$ olacak şekilde bir sabit noktaya sahiptir ki bu da (5.1) denkleminin pozitif bir çözümüdür. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 5.2.2. Kabul edelim ki (5.3) - (5.5) sağlansın ve $1 < p_1 \leq p(t) \leq p_2 < \infty$ olsun. Bu durumda (5.1) denklemi sınırlı salınım yapmayan bir çözüme sahiptir.

İspat: Varsayalım ki $d > 0$ için (2.4) sağlansın, $d < 0$ için durum benzerdir.

$$A = \{x \in X : N_2 \leq x(t) \leq d, \quad t \geq t_0\},$$

kümesini alalım, burada N_2

$$p_2 N_2 < (p_1 - 1)d$$

olacak şekilde pozitif bir sabittir. A kümesinin X in kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi olduğu açıktır.

(5.3) - (5.5) i ele alırsak, $t \geq t_1$ için $\sigma_1(t+\tau) \geq t_0$, $\sigma_2(t+\tau) \geq t_0$ olacak şekilde yeterince büyük bir $t_1 > t_0$ vardır ve

$$\frac{1}{p_1}\Big[1 + \frac{2}{(n-2)!}\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}q_i(u)duds\Big] \leq \theta_2 < 1, \quad i = 1,2, \tag{5.9}$$

burada θ_2 sabittir,

$$\frac{1}{(n-2)!}\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}[f_1(u,d) + |g(u)|]duds \leq \alpha - p_2 N_2, \tag{5.10}$$

$$\frac{1}{(n-2)!}\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}[f_2(u,d) + |g(u)|]duds \leq (p_1-1)d - \alpha \tag{5.11}$$

eşitsizlikleri $p_2 N_2 < \alpha < (p_1 - 1)d$ olmak üzere sağlanır.

Şimdi aşağıdaki gibi bir $S : A \longrightarrow X$ dönüşümü tanımlayalım:

$$(Sx)(t) = \begin{cases} \frac{1}{p(t+\tau)}\Big[\alpha + x(t+\tau) - \frac{1}{(n-2)!}\int_{t+\tau}^{\infty}\frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)}\int_{t_1+\tau}^{s}[f_1(u,x(\sigma_1(u))) \\ -f_2(u,x(\sigma_2(u))) - g(u)]duds\Big], \quad t \geq t_1 \\ (Sx)(t_1), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Açıkça görülür ki Sx süreklidir. Her $x \in A$ ve $t \geq t_1$ için (5.11) kullanılarak,

$$\begin{aligned} (Sx)(t) &= \frac{1}{p(t+\tau)}\Big[\alpha + x(t+\tau) - \frac{1}{(n-2)!}\int_{t+\tau}^{\infty}\frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)}\int_{t_1+\tau}^{s}[f_1(u,x(\sigma_1(u))) \\ &- f_2(u,x(\sigma_2(u))) - g(u)]duds\Big] \\ &\leq \frac{1}{p_1}\Big[\alpha + d + \frac{1}{(n-2)!}\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}[f_2(u,d) + |g(u)|]duds\Big] \\ &\leq d \end{aligned}$$

ve (5.10) kullanılarak,

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &= \frac{1}{p(t+\tau)}\Bigg[\alpha + x(t+\tau) - \frac{1}{(n-2)!}\int_{t+\tau}^{\infty}\frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)}\int_{t_1+\tau}^{s}[f_1(u,x(\sigma_1(u)))\\ &- f_2(u,x(\sigma_2(u))) - g(u)]duds\Bigg]\\ &\geq \frac{1}{p(t+\tau)}\Bigg[\alpha - \frac{1}{(n-2)!}\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}[f_1(u,d) + |g(u)|]duds\Bigg]\\ &\geq \frac{1}{p_2}\Bigg[\alpha - \frac{1}{(n-2)!}\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}[f_1(u,d) + |g(u)|]duds\Bigg]\\ &\geq N_2.\end{aligned}$$

bulunur. O halde $SA \subset A$ dir. Şimdi, S nin A üzerinde bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. $x, y \in A$ ve $t \geq t_1$ için (5.2) ve (5.9) göz önünde bulundurulacak olursa sup norm kullanılarak

$$\begin{aligned}|(Sx)(t) - (Sy)(t)| &\leq \frac{1}{p(t+\tau)}\Bigg[|x(t+\tau) - y(t+\tau)|\\ &\quad + \frac{1}{(n-2)!}\sum_{i=1}^{2}\int_{t}^{\infty}\frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)}\int_{t_1}^{s}|f_i(u,x(\sigma_i(u))) - f_i(u,y(\sigma_i(u)))|d\\ &\leq \frac{\|x-y\|}{p_1}\Bigg[1 + \frac{1}{(n-2)!}\sum_{i=1}^{2}\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}q_i(u)duds\Bigg]\\ &\leq \theta_2\|x-y\|\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|Sx - Sy\| \leq \theta_2\|x-y\|$$

yazabiliriz. $\theta_2 < 1$ olduğundan S, A üzerinde bir daralma dönüşümüdür. Sonuç olarak, $S, x \in A$ için $Sx = x$ olacak şekilde bir sabit noktaya sahiptir ki bu da (5.1) denkleminin pozitif bir çözümüdür. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 5.2.3. Kabul edelim ki (5.3) - (5.5) sağlansın ve $-1 < -p \leq p(t) \leq 0$ olsun. Bu durumda (5.1) denklemi sınırlı salınım yapmayan bir çözüme sahiptir.

İspat: Varsayalım ki $d > 0$ için (5.4) sağlansın, $d < 0$ için durum benzerdir.

$$A = \{x \in X : N_3 \leq x(t) \leq d, \quad t \geq t_0\},$$

kümesini alalım, burada N_3

$$N_3 + pd < d$$

olacak şekilde pozitif bir sabittir. Açıktır ki A, X in kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesidir.

(5.3) - (5.5) i ele alırsak, $t \geq t_1$ için $t - \tau \geq t_0$, $\sigma_1(t) \geq t_0$, $\sigma_2(t) \geq t_0$ olacak şekilde yeterince büyük bir $t_1 > t_0$ vardır ve

$$p + \frac{2}{(n-2)!}\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}q_i(u)duds \leq \theta_3 < 1, \quad i = 1, 2, \tag{5.12}$$

burada θ_3 sabittir,

$$\frac{1}{(n-2)!}\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}[f_1(u,d) + |g(u)|]duds \leq d - \alpha, \tag{5.13}$$

$$\frac{1}{(n-2)!}\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}[f_2(u,d) + |g(u)|]duds \leq \alpha - N_3 - pd \tag{5.14}$$

eşitsizlikleri $N_3 + pd < \alpha < d$ olmak üzere sağlanır.

Şimdi aşağıdaki gibi bir $S : A \longrightarrow X$ dönüşümü tanımlayalım:

$$(Sx)(t) = \begin{cases} \alpha + p(t)x(t-\tau) + \frac{1}{(n-2)!}\int_t^{\infty}\frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}\int_{t_1}^{s}[f_1(u, x(\sigma_1(u))) \\ -f_2(u, x(\sigma_2(u))) - g(u)]duds, \quad t \geq t_1 \\ (Sx)(t_1), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Açıkça görülür ki Sx süreklidir. Her $x \in A$ ve $t \geq t_1$ için (5.13) kullanılarak,

$$\begin{aligned} (Sx)(t) &= \alpha + p(t)x(t-\tau) \\ &+ \frac{1}{(n-2)!}\int_t^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}[f_1(u, x(\sigma_1(u))) - f_2(u, x(\sigma_2(u))) - g(u)]duds \\ &\leq \alpha + \frac{1}{(n-2)!}\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}[f_1(u,d) + |g(u)|]duds \\ &\leq d \end{aligned}$$

ve (5.14) kullanılarak,

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &= \alpha + p(t)x(t-\tau) \\ &+ \frac{1}{(n-2)!}\int_t^\infty \int_{t_1}^s \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}[f_1(u,x(\sigma_1(u))) - f_2(u,x(\sigma_2(u))) - g(u)]duds \\ &\geq \alpha - pd - \frac{1}{(n-2)!}\int_{t_1}^\infty \int_{t_1}^s \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}[f_2(u,d) + |g(u)|]duds \\ &\geq N_3\end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde $SA \subset A$ dir. Şimdi, S nin A üzerinde bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. $x, y \in A$ ve $t \geq t_1$ için (5.2) ve (5.12) göz önünde bulundurulacak olursa sup norm kullanılarak

$$\begin{aligned}|(Sx)(t) - (Sy)(t)| &\leq p|x(t-\tau) - y(t-\tau)| \\ &+ \frac{1}{(n-2)!}\sum_{i=1}^{2}\int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}\int_{t_1}^s |f_i(u,x(\sigma_i(u))) - f_i(u,y(\sigma_i(u)))|duds \\ &\leq p|x(t-\tau) - y(t-\tau)| \\ &+ \frac{1}{(n-2)!}\sum_{i=1}^{2}\int_{t_1}^\infty \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}\int_{t_1}^s q_i(u)|x(\sigma_i(u)) - y(\sigma_i(u)))|duds \\ &\leq \|x-y\|\Big[p + \frac{1}{(n-2)!}\sum_{i=1}^{2}\int_{t_1}^\infty \int_{t_1}^s \frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}q_i(u)duds\Big] \\ &\leq \theta_3\|x-y\|\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|Sx - Sy\| \leq \theta_3\|x-y\|$$

yazabiliriz. $\theta_3 < 1$ olduğundan S, A üzerinde bir daralma dönüşümüdür. Sonuç olarak, $S, x \in A$ için $Sx = x$ olacak şekilde bir sabit noktaya sahiptir ki bu da (5.1) denkleminin pozitif bir çözümüdür. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 5.2.4. Kabul edelim ki (5.3) - (5.5) sağlansın ve $-\infty < -p_1 \leq p(t) \leq -p_2 < -1$ olsun. Bu durumda (5.1) denklemi sınırlı salınım yapmayan bir çözüme sahiptir.

İspat: Varsayalım ki $d > 0$ için (5.4) sağlansın, $d < 0$ için durum benzerdir.

$$A = \{x \in X : N_4 \leq x(t) \leq d, \quad t \geq t_0\},$$

kümesini alalım, burada N_4

$$p_1N_4 + d < p_2d$$

olacak şekilde pozitif bir sabittir. A nın X in kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi olduğu açıktır.

(5.3) - (5.5) i ele alırsak, $t \geq t_1$ için $\sigma_1(t+\tau) \geq t_0$, $\sigma_2(t+\tau) \geq t_0$ olacak şekilde yeterince büyük bir $t_1 > t_0$ vardır ve

$$\frac{1}{p_2}\Big[1 + \frac{2}{(n-2)!}\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}q_i(u)duds\Big] \leq \theta_4 < 1, \quad i = 1,2, \tag{5.15}$$

burada θ_4 sabittir,

$$\frac{1}{(n-2)!}\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}[f_1(u,d) + |g(u)|]duds \leq p_2d - \alpha, \tag{5.16}$$

$$\frac{1}{(n-2)!}\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}[f_2(u,d) + |g(u)|]duds \leq \alpha - p_1N_4 - d \tag{5.17}$$

eşitsizlikleri $p_1N_4 + d < \alpha < p_2d$ olmak üzere sağlanır.

Şimdi aşağıdaki gibi bir $S : A \longrightarrow X$ dönüşümü tanımlayalım:

$$(Sx)(t) = \begin{cases} -\frac{1}{p(t+\tau)}\Big[\alpha - x(t+\tau) + \frac{1}{(n-2)!}\int_{t+\tau}^{\infty}\frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)}\int_{t_1+\tau}^{s}[f_1(u,x(\sigma_1(u))) \\ -f_2(u,x(\sigma_2(u))) - g(u)]duds\Big], \quad t \geq t_1 \\ (Sx)(t_1), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Açıkça görülür ki Sx süreklidir. Her $x \in A$ ve $t \geq t_1$ için (5.16) kullanılarak,

$$\begin{aligned} (Sx)(t) &= -\frac{1}{p(t+\tau)}\Big[\alpha - x(t+\tau) + \frac{1}{(n-2)!}\int_{t+\tau}^{\infty}\int_{t_1+\tau}^{s}\frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)}[f_1(u,x(\sigma_1(u))) \\ &- f_2(u,x(\sigma_2(u))) - g(u)]duds\Big] \\ &\leq \frac{1}{p_2}\Big[\alpha + \frac{1}{(n-2)!}\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}[f_1(u,d) + |g(u)|]duds\Big] \\ &\leq d \end{aligned}$$

ve (5.17) kullanılarak,

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &= -\frac{1}{p(t+\tau)}\Bigg[\alpha - x(t+\tau) + \frac{1}{(n-2)!}\int_{t+\tau}^{\infty}\int_{t_1+\tau}^{s}\frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)}[f_1(u,x(\sigma_1(u)))\\ &- f_2(u,x(\sigma_2(u))) - g(u)]duds\Bigg]\\ &\geq -\frac{1}{p(t+\tau)}\Bigg[\alpha - d - \frac{1}{(n-2)!}\int_{t_1+\tau}^{\infty}\int_{t_1+\tau}^{s}\frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)}[f_2(u,d)+|g(u)|]duds\Bigg]\\ &\geq \frac{1}{p_1}\Bigg[\alpha - d - \frac{1}{(n-2)!}\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}[f_2(u,d)+|g(u)|]duds\Bigg]\\ &\geq N_4\end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde $SA \subset A$ dir. Şimdi, S nin A üzerinde bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. $x, y \in A$ ve $t \geq t_1$ için (5.2) ve (5.15) göz önünde bulundurulacak olursa sup norm kullanılarak

$$\begin{aligned}|(Sx)(t) - (Sy)(t)| &\leq \frac{1}{|p(t+\tau)|}\Bigg[|x(t+\tau) - y(t+\tau)|\\ &\quad + \frac{1}{(n-2)!}\sum_{i=1}^{2}\int_{t+\tau}^{\infty}\frac{(s-t-\tau)^{n-2}}{r(s)}\int_{t_1+\tau}^{s}|f_i(u,x(\sigma_i(u))) - f_i(u,y(\sigma_i(u)))\\ &\leq \frac{\|x-y\|}{p_2}\Bigg[1 + \frac{1}{(n-2)!}\sum_{i=1}^{2}\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_1}^{s}\frac{(s-t)^{n-2}}{r(s)}q_i(u)duds\Bigg]\\ &\leq \theta_4\|x-y\|\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|Sx - Sy\| \leq \theta_4\|x-y\|$$

yazabiliriz. $\theta_4 < 1$ olduğundan S, A üzerinde bir daralma dönüşümüdür. Sonuç olarak, $S, x \in A$ için $Sx = x$ olacak şekilde bir sabit noktaya sahiptir ki bu da (5.1) denkleminin pozitif bir çözümüdür. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Örnek 5.2.1. $t_0 > 5$ olmak üzere

$$\begin{aligned}&(\exp(t)(x(t) - \exp(-t-4)x(t-4))''')' + \exp(-t-5)x(t-5)\\ &-\exp(-t-6)x^3(t-2) - \exp(-2t) + \exp(-4t) + 8\exp(-t) = 0 \quad (5.18)\end{aligned}$$

denklemini ele alalım. Burada, $r(t) = \exp(t)$, $p(t) = \exp(-t-4)$, $\tau = 4$, $\sigma_1(t) = t-5$, $\sigma_2(t) = t-2$, $f_1(t,u) = \exp(-t-5)u$, $f_2(t,u) = \exp(-t-6)u^3$ ve $g(t) = \exp(-2t) - \exp(-4t) - 8\exp(-t)$ şeklindedir. Teorem 5.5.1.' in tüm koşullarının sağlanmaktadır ve $x(t) = 1 - \frac{1}{t}$, (5.18) denkleminin salınım yapmayan bir çözümüdür.

6. BÖLÜM

SONUÇLAR

6.1. Sonuçlar

Yang, Zhang and Ge [29] daki çalışmalarında

$$(x(t) - p(t)x(t-\tau))'' + f_1(t, x(\sigma_1(t))) - f_2(t, x(\sigma_2(t))) = 0 \tag{6.1}$$

ve

$$(x(t) - p(t)x(t-\tau))'' + f_1(t, x(\sigma_1(t))) - f_2(t, x(\sigma_2(t))) = g(t) \tag{6.2}$$

denklemlerinin salınım yapmayan çözümlerinin varlığını incelediler. İkinci bölümde ele aldığımız

$$\left(r(t)\left(x(t) - p(t)x(t-\tau)\right)'\right)' + f_1(t, x(\sigma_1(t))) - f_2(t, x(\sigma_2(t))) = g(t) \tag{6.3}$$

denkleminde $r(t) = 1$ ve $g(t) = 0$ aldığımızda (6.1) denklemini, $r(t) = 1$ aldığımızda (6.2) denklemini elde ederiz. Dolayısıyla elde ettiğimiz sonuçlar [29] dakinden daha geneldir.

T. Candan and R.S. Dahiya [30] da $k = 1, 2$ için

$$\frac{d^k}{dt^k}\left[x(t) + P(t)x(t-\tau)\right] + \int_a^b q_1(t,\xi)x(t-\xi)d\xi - \int_c^d q_2(t,\mu)x(t-\mu)d\mu = 0. \tag{6.4}$$

denklemini ele aldılar. Biz ise üçüncü bölümde (2.8) denkleminden daha genel olan

$$[x(t) - p(t)x(t-\tau)]'' + \int_{a_1}^{b_1} f_1(t, x(\sigma_1(t,\xi)))d\xi - \int_{a_2}^{b_2} f_2(t, x(\sigma_2(t,\xi)))d\xi = g(t) \tag{6.5}$$

denkleminin salınım yapmayan çözümlerini inceledik. Ayrıca dördüncü bölümde incelediğimiz

$$\begin{aligned}\left(r(t)\left(x(t)-p(t)x(t-\tau)\right)'\right)' &+ \int_{a_1}^{b_1} f_1(t,x(\sigma_1(t,\xi)))d\xi \\ &- \int_{a_2}^{b_2} f_2(t,x(\sigma_2(t,\xi)))d\xi = g(t)\end{aligned} \tag{6.6}$$

ve

$$\begin{aligned}\left(r(t)\left(x(t)-\int_a^b P(t,\xi)x(t-\xi)d\xi\right)'\right)' &+ \int_{a_1}^{b_1} f_1(t,x(\sigma_1(t,\xi)))d\xi \\ &- \int_{a_2}^{b_2} f_2(t,x(\sigma_2(t,\xi)))d\xi = g(t)\end{aligned} \tag{6.7}$$

denklemleri (6.5) denkleminin farklı formları olup yine bu denklemlerin salınım yapmayan çözümlerinin varlığını araştırdık.
Candan [31] deki çalışmasında,

$$\begin{aligned}[r(t)[x(t) &+ P(t)x(t-\tau)]^{(n-1)}]' \\ &+ (-1)^n[Q_1(t)g_1(x(t-\sigma_1)) - Q_2(t)g_2(x(t-\sigma_2)) - f(t)] = 0\end{aligned} \tag{6.8}$$

denklemini incelerken; Zhou ve Zhang [32] deki çalışmalarında

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[x(t)+cx(t-\tau)\right] + (-1)^{n+1}\left[P(t)x(t-\sigma) - Q(t)x(t-\delta)\right] = 0 \tag{6.9}$$

denkleminin salınım yapmayan çözümlerinin varlığını incelediler.

2016 yılında ise Candan [33] deki çalışmasında

$$\left[r(t)\left[\left[x(t)-\int_a^b p_2(t,\xi)x(t-\xi)d\xi\right]^{(n-1)}\right]^{\gamma}\right]' + (-1)^n\int_c^d Q_2(x,\xi)G(x(t-\xi))d\xi = 0$$

formundaki yüksek mertebeden nötral diferansiyel denkleminin salınımsız çözümlerini inceledi. Biz beşinci bölümde (6.3) denklemini n. mertebeye genişleterek,

$$[r(t)[x(t)-p(t)x(t-\tau)]^{(n-1)}]'+(-1)^n[f_1(t,x(\sigma_1(t)))-f_2(t,x(\sigma_2(t)))-g(t)]=0$$

denklemini ele aldık ve salınım yapmayan çözümlerinin varlığı için yeterli şartlar elde ettik.

KAYNAKLAR

1. Sturm, C., 2009. Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre, Collected Works of Charles François Sturm, 392–472, Springer.

2. Agarwal, R.P., Grace, S.R., and O'Regan, D., 2013. Oscillation theory for difference and functional differential equations, Springer Science & Business Media.

3. Agarwal, R.P., Bohner, M., and Li, W.T., 2004. Nonoscillation and oscillation theory for functional differential equations, volume 267, CRC Press.

4. Erbe, L., Kong, Q., and Zhang, B.G., 1994. Oscillation theory for functional differential equations, volume 190, CRC Press.

5. Györi, I. and Ladas, G., Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications. 1991.

6. Agarwal, R.P., Berezansky, L., Braverman, E., and Domoshnitsky, A., 2012. Nonoscillation theory of functional differential equations with applications, Springer Science & Business Media.

7. Bainov, D.D. and Mishev, D.P., 1991. Oscillation theory for neutral differential equations with delay, CRC Press.

8. Candan, T. and Dahiya, R., 2013. Existence of nonoscillatory solutions of higher order neutral differential equations with distributed deviating arguments, **Mathematica Slovaca, 63**(1):183–190.

9. Candan, T., 2015. Nonoscillatory solutions of higher order differential and delay differential equations with forcing term, **Applied Mathematics Letters, 39**:67–72.

10. Tian, Y., Cai, Y., and Li, T., 2015. Existence of nonoscillatory solutions to second-order nonlinear neutral difference equations, **J. Nonlinear Sci. Appl, 8**:884–892.

11. Parhi, N. and Rath, R., 2001. Oscillation criteria for forced first order neutral differential equations with variable coefficients, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, **256**(2):525–541.

12. Yu, Y. and Wang, H., 2005. RETRACTED: Nonoscillatory solutions of second-order nonlinear neutral delay equations, **Journal of mathematical analysis and applications**, **311**(2):445–456.

13. Liu, Z., Jia, M., Ume, J.S., and Kang, S.M., 2014. Nonoscillatory solutions for higher-order nonlinear neutral delay differential equations, **Journal of Inequalities and Applications**, **2014**(1):302.

14. Grove, E.A., Kulenović, M., and Ladas, G., 1987. Sufficient conditions for oscillation and nonoscillation of neutral equations, **Journal of Differential Equations**, **68**(3):373–382.

15. Zhang, W., Feng, W., Yan, J., and Song, J., 2005. Existence of nonoscillatory solutions of first-order linear neutral delay differential equations, **Computers & Mathematics with Applications**, **49**(7):1021–1027.

16. Agarwal, R.P., Grace, S.R., and O'Regan, D., 2001. Oscillation criteria for certain nth order differential equations with deviating arguments, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, **262**(2):601–622.

17. Şahiner, Y., 2004. On oscillation of second order neutral type delay differential equations, **Applied Mathematics and Computation**, **150**(3):697–706.

18. Agarwal, R.P., O'Regan, D., and Saker, S.H., 2004. Oscillation criteria for second-order nonlinear neutral delay dynamic equations, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, **300**(1):203–217.

19. Grammatikopoulos, M., Ladas, G., and Meimaridou, A., 1987. Oscillation and asymptotic behavior of second order neutral differential equations, **Annali di Matematica Pura ed Applicata**, **148**(1):29–40.

20. Wong, J.S., 2000. Necessary and sufficient conditions for oscillation of second order neutral differential equations, **Journal of mathematical Analysis and Applications**, **252**(1):342–352.

21. Baculíková, B. and Džurina, J., 2011. Oscillation theorems for second order neutral differential equations, **Computers & Mathematics with Applications**, **61**(1):94–99.

22. Bolat, Y. and Akin, O., 2004. Oscillatory behaviour of higher order neutral type nonlinear forced differential equation with oscillating coefficients, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, **290**(1):302–309.

23. Ladas, G. and Sficas, Y.G., 1986. Oscilations of higher-order neutral equations, **The ANZIAM Journal**, **27**(4):502–511.

24. Sficas, Y. and Stavroulakis, I., 1987. Necessary and sufficient conditions for oscillations of neutral differential equations, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, **123**(2):494–507.

25. Kulenović, M. and Hadžiomerspahić, S., 1998. Existence of nonoscillatory solution of second order linear neutral delay equation, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, **228**(2):436–448.

26. Tang, X. and Shen, J., 1997. Oscillation and existence of positive solutions in a class of higher order neutral equations, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, **213**(2):662–680.

27. Myskis, A.D., 1975. Advanced mathematics for engineers: special courses.

28. Ladde, G.S., Lakshmikantham, V., and Zhang, B.G., 1987. Oscillation theory of differential equations with deviating arguments, volume 110, Marcel Dekker Inc.

29. Yang, A., Zhang, Z., and Ge, W., 2008. Existence of nonoscillatory solutions of secondorder nonlinear neutral differential equations, **Indian J. pure appl. Math**, **39**:227–235.

30. Candan, T. and Dahiya, R., 2010. Existence of nonoscillatory solutions of first and second order neutral differential equations with distributed deviating arguments, **Journal of the Franklin Institute**, **347**(7):1309–1316.

31. Candan, T., 2012. The existence of nonoscillatory solutions of higher order nonlinear neutral equations, **Applied Mathematics Letters**, **25**(3):412–416.

32. Zhou, Y. and Zhang, B., 2002. Existence of nonoscillatory solutions of higher-order neutral differential equations with positive and negative coefficients, **Applied Mathematics Letters**, **15**(7):867–874.

33. Candan, T., 2016. Existence of nonoscillatory solutions of Higher order neutral differential equations, **Filomat**, **30**(8):2147–2153.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı	:	Bengü ÇINA
Uyruğu	:	Türkiye (T.C.)
Doğum Tarihi ve Yeri	:	29 Mayıs 1979, Sivas
Telefon	:	0 505 290 23 78
Medeni Durumu	:	Evli
E-posta	:	bengu58cina@gmail.com

EĞİTİM

Derece	**Kurum**	**Mez.Yılı**
Yüksek Lisans	ERÜ Fen Bil. Ens. Matematik A.B.D., KAYSERİ	2013
Lisans	CÜ Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, SİVAS	2003

İŞ DENEYİMİ

Yıl	**Kurum**	**Görev**
2009–Halen	CÜ Gemerek MYO	Öğretim Görevlisi
2008–2009	CÜ Zara Ahmet Çuhadaroğlu MYO	Öğretim Görevlisi
2005–2008	Sivas Sınav Dergileri Dersanesi	Matematik Öğretmeni
2003–2005	Sivas Koleji	Matematik Öğretmeni

YAYIN

B. Çına, T. Candan and M. Tamer Şenel, Existence of nonoscillatory solutions of second-order neutral differential equations, *T*WMS J. Appl. Eng. Math. (Accepted).

BİLDİRİLER

1. M. Tamer Şenel,T. Candan and B. Çına, Existence of nonoscillatory solutions of second-order neutral differential equations with distributed deviating arguments, **ICOME 2017**, 2017 Mayıs.

2. T. Candan, M. Tamer Şenel and B. Çına, Positive solutions of second-order neutral differential equations with distributed deviating arguments, **OMTSA 2017**, 2017 Temmuz.

3. B. Çına, T. Candan and M. Tamer Şenel, Positive solutions of second-order neutral differential equations with forcing term, **OMTSA 2017**, 2017 Temmuz.