T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HEMEN HEMEN ARTAN DİZİLER VE YENİ UYGULAMALARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Hazırlayan
Büşra ÖNER

Danışman
Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

Haziran 2019
KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Büşra ÖNER



"Hemen Hemen Artan Diziler ve Yeni Uygulamaları" adlı Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi' ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Hazırlayan
Büşra ÖNER

Danışman
Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

Matematik ABD Başkanı

Prof. Dr. Hüseyin ALTINDİŞ

Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN danışmanlığında **Büşra ÖNER** tarafından hazırlanan **"Hemen Hemen Artan Diziler ve Yeni Uygulamaları"** adlı bu çalışma jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

25/06/2019

JÜRİ:

Danışman : Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN .....

Üye : Doç. Dr. A. Nihal TUNCER .....

Üye :Dr. Öğr. Üyesi Funda BABAARSLAN .....

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 27/07/2019 tarih ve 2019/52-22 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

29/07/2019

Prof. Dr. Mehmet AKKURT

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Bana çalışmalarım süresince her türlü yardımı ve fedakârlığı sağlayan, çalışmalarımın her aşamasında bilgi ve tecrübesi ile bana yol gösteren, yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, kendisinden pek çok şey öğrendiğim Sayın Hocam Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini her zaman hissettiğim eşim Aykut Öner ve aileme en içten şükranlarımı sunarım.

Büşra ÖNER

Haziran 2019, KAYSERİ

HEMEN HEMEN ARTAN DİZİLER VE YENİ UYGULAMALARI

Büşra ÖNER

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2019
Danışman: Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

ÖZET

Bu çalışma beş kısımdan meydana gelmektedir.

İlk kısımda, problemin durumu, yapılan araştırmanın amacı ve önemi verilmiştir. Ayrıca tez çalışmasında kullanılan tanımlar, teoremler ve lemmalar ifade edilmiştir.

İkinci bölümde, yöntem, materyaller, verilerin toplanması ve analizi açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde, $\delta-$quasi monoton dizi ve hemen hemen artan dizi kullanılarak sonsuz serilerin $|T, p_n|_k$ toplanabilmesi üzerine iki teorem ifade edilip ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde, sonsuz serilerin $|T, p_n; \delta|_k$ toplanabilmesi üzerine iki genel teorem ifade edilip ispatlanmıştır.

Son bölümde ise, yaptığımız tez çalışmasıyla ile alakalı sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sonsuz seriler, Riesz ortalaması, Hemen hemen artan diziler, $\delta-$ quasi monoton dizi, Mutlak matris toplanabilme.

ALMOST INCREASING SEQUENCES AND THEIR NEW APPLICATIONS

Büşra ÖNER

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
Master Thesis, June 2019
Supervisor: Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

ABSTRACT

The thesis includes five chapters.

In first part, the state of the problem, the purpose and importance of the research were given. In addition, definitions, theorems and lemmas used in the thesis were expressed.

In the second part, method, materials, data collection and analysis were explained.

In the third chapter, two theorems concerned with $|T, p_n|_k$ summability of infinite series using $\delta-$quasi monotone sequence and almost increasing sequence were stated and proved.

In the fourth chapter, two general theorems on $|T, p_n; \delta|_k$ summability of infinite series were stated and proved.

In last part, the results dealing with thesis were given.

Keywords: Infinite series, Riesz mean, Almost increasing sequences, $\delta-$quasi monotone sequence, Absolute matrix summability.

İÇİNDEKİLER

HEMEN HEMEN ARTAN DİZİLER VE YENİ UYGULAMALARI

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK ii
YÖNERGEYE UYGUNLUK iii
KABUL VE ONAY iv
TEŞEKKÜR v
ÖZET vi
ABSTRACT vii
İÇİNDEKİLER viii
SEMBOLLER LİSTESİ x
GİRİŞ 1

1. BÖLÜM

GENEL BİLGİLER ve LİTERATÜR ÇALIŞMASI

1.1. Problem Durumu 4
1.2. Araştırmanın Amacı 4
1.3. Araştırmanın Önemi 4
1.4. Tanımlar ve Teoremler 4

2. BÖLÜM

YÖNTEM VE MATERYAL

2.1.Yöntem 14
2.2. Materyaller 14
2.3.Veri Toplanması ve Analizi 14

3. BÖLÜM

3.1. Sonsuz Serilerin $|T, p_n|_k$ Toplanabilmesi 15

4. BÖLÜM

4.1. Sonsuz Serilerin $|T, p_n; \delta|_k$ Toplanabilmesi.....29

5. BÖLÜM

SONUÇ ve ÖNERİLER

5.1. Sonuç ve Öneriler …….39

KAYNAKÇA 40

ÖZGEÇMİŞ.....42

SEMBOLLER LİSTESİ

$\sum a_n$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sonsuz serisi

(s_n) : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sonsuz serisinin kısmi toplamlar dizisi

$s_n = O(1)$: (s_n) dizisi sınırlı

BV : Sınırlı salınımlı dizi uzayı

Δy_n : (y_n) dizisi için $y_n - y_{n+1}$

$\overline{\Delta} T_n(s)$: $(T_n(s))$ dönüşüm dizisi için $T_n(s) - T_{n-1}(s)$

GİRİŞ

Sürekli olarak yapılan çalışmalarla gelişen toplanabilme konusu, matematiksel analizin kapsamlı bir alanıdır. Toplanabilme teorisi veya kısaca toplanabilme, en geniş anlamda Analiz de temel konu olan limitlerin bulunması teorisidir. Bir toplanabilme metodunun amacı, bazı şartlar altında ıraksak serilerin hakkında bilgiler vermektir.

Genel olarak seriler ıraksak ve yakınsak seriler olmak üzere ikiye ayrılır. Iraksak seriler de kendi aralarında belirsiz ıraksak seriler ve belirli ıraksak seriler şeklinde iki grupta incelenir. Burada belirli ıraksak seri adını verdiğimiz seriler $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$ veya $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\infty$ şeklindeki serilerdir.

Yakınsak dizilerin yığılma noktası tektir. Fakat belirsiz ıraksak serilerin kısmi toplamlar dizisine ait en az iki yığılma noktası vardır. Bunun gibi yığılma noktası birden fazla olan dizilere salınım yapan diziler adı verilir. Bu türdeki dizilere en iyi bir değerin nasıl karşılık getirilebileceğini araştırmak amacıyla çeşitli toplanabilme metotları tanımlanmıştır.

Yakınsak seri, yakınsadığı aynı noktaya herhangi bir toplanabilme metodu ile de toplanabiliyor ise, bu metoda regüler metot denir. Yakınsak olan seri yakınsadığı değere regülerlik özelliği olan bir metot ile toplanabilir. Ancak bir metot uygulanarak bir değer karşılık getirilen serinin yakınsak olması gerekmez. Bu durumun sağlanabilmesi ancak, uygun şartlar altında mümkün olabilir. Bu türdeki ilk çalışma 1897 yılında Tauber tarafından yapılmıştır. Tauber tarafından yapılan bu çalışma, farklı araştırma alanı oluşturmuştur. Abel toplanabilme metodu uygulanarak toplanabilen bir serinin yakınsak olması için gereken koşulları ifade etmiştir. Bu anlamda bu konudaki ilk çalışmayı Tauber yaptığından toplanabilme metodu kullanılarak yakınsaklığın tekrar elde edilmesine olanak veren koşullara Tauber koşulu ve bu tür teoremlere ise Tauber tipi teorem denir.

Toplanabilmenin önemli yükselişi 19. yüzyılın sonlarında başlamıştır. Euler, Abel, Riemann, Re Loy, Hausdorff, Borel, Nörlund, Cesàro ve Riesz gibi matematikçiler özel toplanabilme metotları tanımlayarak diğer matematikçilerin bu alanda çalışabilmesi için olanak sağlamışlardır. Günümüzde toplanabilme metotları üzerinde çalışan matematikçilerin çoğu, bu özel toplanabilme metotları arasındaki ilişkileri incelemektedir.

Literatürde mevcut bazı çalışmalarda amaç, Tauber tarafından verilen şartları zayıflatmaktır. Bu konudaki bazı çalışmalar 1910 yılında Hardy, Littlewood ve Landau, 1914 de Hardy ve Littlewood, 1925 yılında Schmidt ve 1935 de Szàsz olarak sıralanabilir.

Biliyoruz ki, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ serisi ıraksak bir seri olduğundan bu seriye karşılık gelen bir değer mevcut değildir. Fakat bu serinin kısmi toplamlar dizisinin aritmetik ortalaması $1/2$ değerine yakınsaktır. Bunun anlamı ise, Cesàro ortalamasının ıraksak bir diziyi yakınsak bir diziye dönüştürmüş olmasıdır. Cesàro ortalaması, Riesz toplanabilme metodunun $\forall n \in N$ için $p_n = 1$ alınması halinde elde edilen ve sembolik olarak (C,1) ile gösterilen özel bir Riesz toplanabilme metodudur. O halde Riesz toplanabilme metodu yardımıyla ıraksak bir seriye karşılık gelen bir değer bulunur. Bu nedenle Riesz toplanabilme metodunun Analiz deki uygulaması oldukça geniştir.

1969 yılında Das [1] mutlak toplanabilme tanımı verilmiştir. Daha sonrasında ise 1970 yılında Kishore ve Hotta ise [2] toplanabilme çarpanını literatüre kazandırmışlardır. 1979 yılında alt üçgensel matrisler sayesinde $|T|_k$ toplanabilirlik tanımı Tanović-Miller [3] tarafından yapılmış, 1985 yılında da Bor [4] tarafından $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilme kavramı tanımlanmıştır. Çalışmalarımıza temel oluşturan $|T, p_n|_k$ toplanabilirlik tanımı, 2003 yılında Sulaiman [5] ve $|T, p_n; \delta|_k$ toplanabilirlik tanımı da 2004 yılında Özarslan ve Öğdük tarafından verilmiştir [6].

Bu çalışmada ise ilk olarak sonsuz serilerin $|T, p_n|_k$ toplanabilirliği ile ilgili iki teorem daha sonrasında ise sonsuz serilerin $|T, p_n; \delta|_k$ toplanabilirliği üzerine iki teorem ifade ve ispat edilip bazı sonuçlar verilecektir.

1. BÖLÜM

GENEL BİLGİLER ve LİTERATÜR ÇALIŞMASI

1.1. Problem Durumu

Sonsuz serilerin, genel mutlak matris toplanabilme metotları ile toplanabilmesi temel problem şeklinde düşünülmüştür.

1.2. Araştırmanın Amacı

Yaptığımız bu araştırmada amaç, genel mutlak toplanabilme metotları uygulanarak hemen hemen artan ve δ-quasi-monoton diziler aracılığı ile bilinen teoremleri genelleştirmektir.

1.3. Araştırmanın Önemi

Mutlak matris toplanabilme metotları kullanılarak elde edilen teoremler toplanabilme teorisinin gelişimi için önemli bir paya sahiptir.

1.4. Tanımlar ve Teoremler

Bu bölümde, ilk olarak konumuzla ilgili olan bazı tanım ve teoremleri vererek işe başlayacağız.

Tanım 1.4.1. F kompleks ya da reel sayıların bir cismi olmak üzere (s_n) kısmi toplamlar dizisine sahip bir $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun. $n,k=0,1,2,...$ olmak üzere $t_{nk} \in F$ için bir $T=(t_{nk})$ sonsuz matrisi verilsin. O halde diziden diziye dönüşüm

$$h_n = \sum_{k=0}^{\infty} t_{nk} s_k \qquad (1.1)$$

olarak tanımlansın. Bu dizi (s_n) dizisinin T-dönüşüm dizisi ve T matrisi de diziden-diziye bir dönüşüm şeklinde tanımlanır. Verilen dönüşümün anlamlı olabilmesi için (1.1) in $\forall n$ sayısı için yakınsak olması gerekmektedir [7].

Tanım 1.4.2. $n,k=0,1,2,...$ için T=(t_{nk}) matrisi verilsin. Eğer T matrisi vasıtasıyla meydana gelen dönüşüm yakınsak olan bir diziyi tekrar yakınsak bir diziye dönüştürüp limit değerini de koruyorsa, T matrisi regüler matristir denir [8].

Aşağıda verilen teorem, bir T matrisinin regülerliği için gerek yeter şartları vermektedir.

Teorem 1.4.3. Bir T=(t_{nk}), $n,k=0,1,2,...$ matrisi regülerdir $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} t_{nk} = 0 \quad (\forall k) \\ &\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} t_{nk} = 1 \\ &\sum_{k=0}^{\infty} |t_{nk}| \le M \quad (\forall n) \end{aligned} \tag{1.2}$$

şeklinde bir $M>0$ vardır [9].

Yukarıda verilen teorem toplanabilme teorisinde çok önemli bir yer teşkil eder ve Silverman-Toeplitz teoremi olarak bilinir.

Tanım 1.4.4. Kompleks veya reel terimli $B=(b_{nk})$ sonsuz matrisi verilmiş olsun.

$$g_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} a_k \tag{1.3}$$

olacak şekilde tanımlanan (g_n) dizisi, $\sum a_n$ serisinin B-dönüşüm dizisidir. B matrisi de seriden-diziye bir dönüşümdür. Verilen dönüşümün anlamlı olabilmesi için (1.3) deki toplamın $\forall n$ için yakınsak olması gerekmektedir [7].

Tanım 1.4.5. Kompleks veya reel terimli C=(c_{nk}) sonsuz matrisi verilsin.

$$g_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} a_k \tag{1.4}$$

mevcut ve $\sum_{n=1}^{\infty} g_n = s$ şeklinde ise C matrisine seriden-seriye dönüşüm, s ye ise $\sum a_n$ serisinin C dönüşümü ile genelleştirilmiş toplamı adı verilir [7].

Tanım 1.4.6. Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun. Ayrıca (s_n) dizisinin $T=(t_{nk})$ matrisi vasıtasıyla meydana getirilen (h_n) dizisi (1.1) de olduğu gibi tanımlı olsun. $\lim_{n\to\infty} h_n = s$ oluyorsa $\sum a_n$ serisi veya (s_n) dizisi s ye T toplanabilirdir [9].

Tanım 1.4.7. (s_n) in $T=(t_{nk})$ matrisi vasıtasıyla verilen (h_n) dizisi (1.1) de olduğu gibi tanımlansın. Şayet $(h_n) \in BV$ durumu varsa, $\sum a_n$ serisine ya da (s_n) dizisine $|T|$ toplanabilir denir. O halde $\sum a_n$ serisinin $|T|$ toplanabilirliği $\sum a_n \in |T|$ veya $(s_n) \in |T|$ sembollerinden biri ile gösterilir [1].

Tanım 1.4.8. Bir $T=(t_{nk})$ matrisi

$$\mathrm{T}=(t_{nk})=\begin{cases}\exists t_{nk}\neq 0, & n\geq k \ \ ise\\ \forall t_{nk}=0, & n<k \ \ ise\end{cases}$$

bu şekilde tanımlanan matrise alt üçgensel matris adı verilir [10].

Tanım 1.4.9. Alt üçgensel matrisin köşegen üzerindeki terimleri sıfırdan farklı ise bu matris normal matris olarak adlandırılır [11].

Tanım 1.4.10. Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun. (s_n) dizisinin $T=(t_{nk})$ normal matrisi yardımıyla oluşturulan $(T_n(s))$ dönüşüm dizisi

$$T_n(s)=\sum_{k=0}^{n} t_{nk}s_{k,} \quad \mathrm{n}=0,1,2,\ldots$$

şeklinde olsun. $k\geq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}\left|T_n(s)-T_{n-1}(s)\right|^k<\infty \tag{1.5}$$

olması halinde $\sum a_n$ serisi $|T|_k$ toplanabilirdir [3].

Tanım 1.4.11. $\sum a_n$ serisinin, matris elemanları

$$t_{nm} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}, & m \le n \ \ için \\ 0\ , & m > n \ \ için \end{cases} \tag{1.6}$$

ile verilen $T=\left(t_{nm}\right)$ matrisi yardımıyla elde edilen $\left(l_n\right)$ dönüşüm dizisi

$$l_n = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} s_m \tag{1.7}$$

şeklinde verilen dönüşüme Cesàro ortalaması ya da $(C,1)$ ortalaması denir [9]. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} l_n = s$$

olması halinde $\sum a_n$ serisine s ye $(C,1)$ toplanabilirdir [9].

Tanım 1.4.12. $\left(l_n\right)$**,** (1.7) de olduğu gibi tanımlansın.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|l_n - l_{n-1}\right| < \infty \tag{1.8}$$

olması halinde, $\sum a_n$ serisi $\left|C,1\right|$ toplanabilirdir denir [12].

Tanım 1.4.13. $k \ge 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \left|l_n - l_{n-1}\right|^k < \infty \tag{1.9}$$

olması halinde, $\sum a_n$ serisi $\left|C,1\right|_k$ toplanabilirdir denir [13].

Bu çalışmamızda $\left(p_n\right)$ pozitif sayıların bir dizisi olmak üzere

$$P_n = \sum_{m=0}^{n} p_m \to \infty, \ (n \to \infty \text{ iken}) \quad \left(P_{-i} = p_{-i} = 0,\ i \ge 1\right) \tag{1.10}$$

şeklindedir.

Tanım 1.4.14. (p_n), (1.10) daki gibi olmak üzere

$$u_n = \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_m s_m \tag{1.11}$$

ile verilen dönüşüme Riesz ortalaması (Riesz dönüşümü) adı verilir. Kısaca $(\bar{N}, p_n)$ ortalaması veya $(\bar{N}, p_n)$ dönüşümü de denebilir [14].

Bu dönüşümün matris elemanları

$$t_{nm} = \begin{cases} \dfrac{p_m}{P_n}, & m \le n \ \ için \\ 0\ , & m > n \ \ için \end{cases} \tag{1.12}$$

dır [9].

Teorem 1.4.15. $(\bar{N}, p_n)$ metodunun regülerliği sağlaması için gerek ve yeterli şart $P_n \to \infty\ (n \to \infty)$ olmasıdır [9].

Tanım 1.4.16. (u_n)**,** (1.11) de olduğu gibi tanımlansın. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \text{s}$$

olması halinde, $\sum a_n$ serisi s sayısına $(\bar{N}, p_n)$ toplanabilirdir [14].

Tanım 1.4.17. Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ serisinin (u_n) Riesz dönüşümü verilmiş olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n - u_{n-1}| < \infty \tag{1.13}$$

ise $\sum a_n$ serisi $|\bar{N}, p_n|$ toplanabilirdir [15].

Tanım 1.4.18. $\text{k} \ge 1$ olsun. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} |u_n - u_{n-1}|^k < \infty \tag{1.14}$$

ise $\sum a_n$ serisi $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilirdir$[4]$.

(1.14) de $\forall n$ için $p_n = 1$ alınırsa, $|C,1|_k$ toplanabilme bulunur.

Tanım 1.4.19. $\delta \geq 0$ ve $k \geq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\delta k+k-1} |u_n - u_{n-1}|^k < \infty \tag{1.15}$$

olması halinde $\sum a_n$ serisi $|\bar{N}, p_n; \delta|_k$ toplanabilirdir [16].

Eğer (1.15) de $\delta = 0$ alınırsa, $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilme bulunur.

Tanım 1.4.20. (p_n), (1.10) daki gibi bir dizi, $T = (t_{nk})$ da normal matris olsun. $k \geq 1$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |T_n(s) - T_{n-1}(s)|^k < \infty \tag{1.16}$$

ise $\sum a_n$ serisi $|T, p_n|_k$ toplanabilirdir denir [5].

Eğer $t_{nm} = \frac{p_m}{P_n}$ alınırsa, $|T, p_n|_k$ toplanabilirliği $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilirliğine denktir.

Tanım 1.4.21. $\delta \geq 0$ ve $k \geq 1$ olsun.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\delta k+k-1} |T_n(s) - T_{n-1}(s)|^k < \infty \tag{1.17}$$

olması halinde $\sum a_n$ serisi $|T, p_n; \delta|_k$ toplanabilirdir [6].

$\delta = 0$ ve $\forall n$ için $p_n = 1$ alınırsa $|T, p_n; \delta|_k$ toplanabilme $|T|_k$ toplanabilme metoduna dönüşür. Ek olarak $t_{nm} = \frac{p_m}{P_n}$ için, $|T, p_n; \delta|_k$ toplanabilme metodu $|\bar{N}, p_n; \delta|_k$ toplanabilme metoduna denk olur.

Tanım 1.4.22. *T* ve *K* iki farklı toplanabilme metodu için *T* toplanabilen her dizi, aynı zamanda aynı değere *K* toplanabiliyor ise, *T* ye *K* yi gerektiriyor denir. Bu durum $T \subseteq K$ şeklinde gösterilir. Hem $T \subseteq K$ hem de $K \subseteq T$ oluyor ise, *T* metodu ile *K* metodu denk olur [9].

Tanım 1.4.23. Bir $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun. $\sum a_n\lambda_n$ serisi bir *K* toplanabilme metodu vasıtasıyla toplanabiliyorsa, (λ_n) e $\sum a_n$ serisinin *K* toplanabilme metodu için toplanabilme çarpanı denir [2].

Tanım 1.4.24. $(q_n), (\delta_n)$ pozitif sayıların dizisi olsunlar. Eğer $q_n \to 0$ ve $\Delta q_n \geq -\delta_n$ ise (q_n) dizisine $\delta-$quasi-monoton dizi adı verilir [17].

Tanım 1.4.25. G ve H pozitif sabitler olsun. (c_n) pozitif artan dizi olmak üzere, eğer

$$Gc_n \leq b_n \leq Hc_n$$

olacak şekilde pozitif (b_n) dizisi var ise bu diziye hemen hemen artan bir dizi adı verilir [18].

Tanım 1.4.26.

$p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $i_1, i_2, ..., i_n \geq 0,\ j_1, j_2, ..., j_n \geq 0$ için

$$\sum_{k=1}^{n} i_k j_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} i_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} j_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.18}$$

dur [7].

Tanım 1.4.27.

$p \geq 1,\ i_1, i_2, ..., i_n \geq 0,\ j_1, j_2, ..., j_n \geq 0$ olsun. O halde

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (i_k + j_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} {i_k}^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} {j_k}^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.19}$$

dir [7].

Bir $T=(t_{nk})$ normal matrisi verilsin. Bu durumda $\overline{T}=(\overline{t}_{nk})$ *ve* $\hat{T}=(\hat{t}_{nk})$ alt yarı matrislerini

$$\overline{t}_{nk} = \sum_{i=k}^{n} t_{ni},\ n,k = 0,1,... \tag{1.20}$$

ve

$$\hat{t}_{00}=\bar{t}_{00}=t_{00},\ \hat{t}_{nk}=\bar{t}_{nk}-\bar{t}_{n-1,k},\ n=1,2,... \tag{1.21}$$

şeklinde oluşturabiliriz. T bir normal matris ise $\hat{T}=\left(\hat{t}_{nk}\right)$ matrisi de normaldir.

T matrisi normal ise,

$$T_n(s)=\sum_{k=0}^{n}t_{nk}s_k=\sum_{k=0}^{n}t_{nk}\sum_{i=0}^{k}a_i$$

$$=\sum_{i=0}^{n}a_i\sum_{k=i}^{n}t_{nk}=\sum_{i=0}^{n}a_i\bar{t}_{ni}=\sum_{k=0}^{n}\bar{t}_{nk}a_k \tag{1.22}$$

ve $\bar{t}_{n-1,n}=\sum_{i=n}^{n-1}t_{n-1,i}=0$ olduğundan

$$\bar{\Delta}T_n(s)=T_n(s)-T_{n-1}(s)=\sum_{k=0}^{n}\bar{t}_{n\nu}a_k-\sum_{k=0}^{n-1}\bar{t}_{n-1,k}a_k$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\bar{t}_{nk}-\bar{t}_{n-1,k}\right)a_k+\bar{t}_{n-1,n}a_n=\sum_{k=0}^{n}\hat{t}_{nk}a_k \tag{1.23}$$

elde edilir. Sırasıyla, $\bar{T}$ ve $\hat{T}$ seriden diziye ve seriden seriye dönüşüm matrisleridir.

Teorem 1.4.28. (L_n) dizisi $|\Delta L_n|=O(L_n/n)$ olacak şekilde hemen hemen artan olsun ve $n\to\infty$ iken $\lambda_n\to 0$ sağlansın. (A_n) dizisi $\sum nL_n\delta_n<\infty,\sum A_nL_n$ serisi yakınsak ve $\forall n$ için $|\Delta\lambda_n|\le|A_n|$ özelliğinde δ - quasi-monoton dizi olsun. (t_n) dizisi (na_n) in n. $(C,1)$ ortalaması yani $t_n=\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\nu a_\nu$ olmak üzere eğer,

$$\sum_{n=1}^{u}\frac{1}{n}|\lambda_n|=O(1),\ u\to\infty \tag{1.24}$$

$$\sum_{n=1}^{u}\frac{1}{n}|t_n|^k=O(L_u),\ u\to\infty \tag{1.25}$$

$$\sum_{n=1}^{u}\frac{p_n}{P_n}|t_n|^k=O(L_u),\ u\to\infty \tag{1.26}$$

şartları sağlanıyor ise, $k\ge 1$ için, $\sum a_n\lambda_n$ serisi $|\bar{N},p_n|_k$ toplanabilirdir [19, 20].

Teorem 1.4.29. (L_n) dizisi hemen hemen artan olsun. (η_n) ile (λ_n) dizileri ise

$$|\Delta\lambda_n| \le \eta_n, \tag{1.27}$$

$$\eta_n \to 0,\ n \to \infty \tag{1.28}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|\Delta\eta_n|L_n < \infty, \tag{1.29}$$

$$|\lambda_n| L_n = O(1) \tag{1.30}$$

ve (1.25) şartını sağlasın. (p_n) pozitif sayıların bir dizisi olup,

$$P_n = O(np_n) \tag{1.31}$$

$$P_n \Delta p_n = O(p_n p_{n+1}) \tag{1.32}$$

şartlarını sağlıyor ise, $k \ge 1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{P_n \lambda_n}{np_n}$ serisi $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilirdir [21].

Teorem 1.4.30. (L_n) dizisi hemen hemen artan bir dizi ve (η_n) ile (λ_n) dizileri de (1.27)-(1.30), (1.24), (1.25) şartlarını sağlasın. (p_n) pozitif sayıların bir dizisi olup (1.26) şartını sağlıyor ise, $k \ge 1$ için $\sum a_n \lambda_n$ serisi $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilirdir [22].

Lemma 1.4.31. Teorem 1.4.28 in şartları sağlanıyorsa

$$|\lambda_n| L_n = O(1) \tag{1.33}$$

dir [19].

Lemma 1.4.32. (L_n) dizisi, $n|\Delta L_n| = O(L_n)$ şartını sağlayan hemen hemen artan dizi ve (A_n) de $\sum nL_n\delta_n < \infty$ ve $\sum A_n L_n$ yakınsak olacak şekilde δ-quasi-monoton dizi olsun. O halde

$$nA_n L_n = O(1), n \to \infty \tag{1.34}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nL_n |\Delta A_n| < \infty \tag{1.35}$$

dur [20].

Lemma 1.4.33. (L_n) dizisi hemen hemen artan olsun. (1.28)-(1.29) şartları sağlandığında

$$n\eta_n L_n = O(1),\ n \to \infty \tag{1.36}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n L_n < \infty \tag{1.37}$$

dur [23].

Lemma 1.4.34. (1.31) ve (1.32) şartları sağlanıyorsa,

$$\Delta\left(\frac{P_n}{p_n n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{1.38}$$

dir [24].

Lemma 1.4.35. (1.27)-(1.30) şartlarını sağlıyor ise

$$\lambda_n = O(1) \tag{1.39}$$
$$\Delta\lambda_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

dir $[24]$.

2. BÖLÜM

YÖNTEM VE MATERYAL

2.1. Yöntem

Tez çalışmasında öncelikle toplanabilme üzerine mevcut çalışmaları kapsayan internet ve kütüphanelerden araştırmalar yapılmış ve çalışmalarımıza kaynak oluşturmuştur.

2.2. Materyaller

Çalışmamıza yön veren materyaller; toplanabilme teorisi üzerine yazılmış olan kitaplar ve yazılı kaynaklardan oluşmaktadır.

2.3. Veri Toplanması ve Analizi

Yapılan literatür taraması sonucunda elde edilen sonsuz serilerin $|T, p_n|_k$ ve $|T, p_n; \delta|_k$ gibi mutlak matris toplanabilmesi üzerine yazılı bazı makaleler belirlenerek irdelenmiştir.

3. BÖLÜM

3.1. Sonsuz Serilerin $|T, p_n|_k$ Toplanabilmesi

Burada ilk olarak Teorem 1.4.28 ve Teorem 1.4.29 u mutlak matris toplanabilirliğe genelleştiren iki teoremi ifade ve ispat edeceğiz.

Teorem 3.1.1. $T=(t_{nm})$ pozitif normal matris olmak üzere

$$\bar{t}_{n0}=1,\ n=0,1,... \tag{3.1}$$

$$t_{n-1,m}\geq t_{nm},\ \ n\geq m+1, \tag{3.2}$$

$$t_{nn}=O\left(\frac{p_n}{P_n}\right), \tag{3.3}$$

şartlarını sağlasın. Teorem 1.4.28 in şartları sağlanıyorsa, $k\geq 1$ için, $\sum a_n\lambda_n$ serisi $|T, p_n|_k$ toplanabilirdir [25].

İspat: $\sum a_n\lambda_n$ serisinin T-dönüşüm dizisi (U_n) olmak üzere (1.22) den

$$U_n=\sum_{m=0}^{n}\bar{t}_{nm}a_m\lambda_m$$

dir. Buna göre (1.23) şartında olduğu gibi U_n-U_{n-1} farkını oluşturursak,

$$\bar{\Delta}U_n=U_n-U_{n-1}=\sum_{m=0}^{n}\hat{t}_{nm}a_m\lambda_m$$

buluruz. (1.21) den $\hat{t}_{n0}=\bar{t}_{n0}-\bar{t}_{n-1,0}=0$ olduğundan

$$\bar{\Delta}U_n = \sum_{m=1}^{n} \hat{t}_{nm} a_m \lambda_m = \sum_{m=1}^{n} \frac{\hat{t}_{nm}\lambda_m}{m} m a_m$$

elde ederiz. Yukarıda verilen seriye Abel kısmi toplama formülünü uygularsak (t_n) eşitliğinden

$$\bar{\Delta}U_n = \sum_{m=1}^{n-1} \Delta_m \left(\frac{\hat{t}_{nm}\lambda_m}{m} \right) \sum_{r=1}^{m} r a_r + \frac{\hat{t}_{nn}\lambda_n}{n} \sum_{r=1}^{n} r a_r$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1} \Delta_m \left(\frac{\hat{t}_{nm}\lambda_m}{m} \right) (m+1) t_m + \frac{t_{nn}\lambda_n}{n} (n+1) t_n$$

buluruz. Diğer taraftan

$$\Delta_m \left(\frac{\hat{t}_{nm}\lambda_m}{m} \right) = \frac{\hat{t}_{nm}\lambda_m}{m} - \frac{\hat{t}_{n,m+1}\lambda_{m+1}}{m+1} = \frac{(m+1)\hat{t}_{nm}\lambda_m - m\hat{t}_{n,m+1}\lambda_{m+1}}{m(m+1)}$$

$$= \frac{(m+1)\hat{t}_{nm}\lambda_m - (m+1)\hat{t}_{n,m+1}\lambda_m + (m+1)\hat{t}_{n,m+1}\lambda_m - m\hat{t}_{n,m+1}\lambda_{m+1}}{m(m+1)}$$

$$= \frac{(m+1)\Delta_m(\hat{t}_{nm})\lambda_m + (m+1)\hat{t}_{n,m+1}\Delta\lambda_m + \hat{t}_{n,m+1}\lambda_{m+1}}{m(m+1)}$$

elde ederiz. Ayrıca $\bar{t}_{n-1,n} = \sum_{i=n}^{n-1} t_{n-1,i} = 0$ ve $\hat{t}_{nn} = \bar{t}_{nn} - \bar{t}_{n-1,n} = \bar{t}_{nn} = t_{nn}$ olduğundan

$$\bar{\Delta}U_n = \frac{n+1}{n} t_{nn}\lambda_n t_n + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{m+1}{m} \Delta_m(\hat{t}_{nm})\lambda_m t_m + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{m+1}{m} \hat{t}_{n,m+1}\Delta\lambda_m t_m + \sum_{m=1}^{n-1} \hat{t}_{n,m+1}\lambda_{m+1} \frac{t_m}{m}$$

$$= U_{n,1} + U_{n,2} + U_{n,3} + U_{n,4}$$

elde ederiz.

$$\left| U_{n,1} + U_{n,2} + U_{n,3} + U_{n,4} \right|^k \le 4^k \left(\left| U_{n,1} \right|^k + \left| U_{n,2} \right|^k + \left| U_{n,3} \right|^k + \left| U_{n,4} \right|^k \right)$$

olduğundan, teoremi ispatlamak üzere r=1,2,3,4 için

$$\sum_{n=1}^{u}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|U_{n,r}\right|^k = O(1),\ u\to\infty$$

olduğunu göstereceğiz.

Şimdi $\frac{n+1}{n}=O(1)$, (1.33) den $|\lambda_n|=O\left(\frac{1}{L_n}\right)=O(1)$ ve (3.3) den dolayı $t_{nn}=O\left(\frac{p_n}{P_n}\right)$ ifadesi kullanılırsa,

$$\sum_{n=1}^{u}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|U_{n,1}\right|^k = \sum_{n=1}^{u}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|\frac{n+1}{n}t_{nn}\lambda_n t_n\right|^k$$

$$=O(1)\sum_{n=1}^{u}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}t_{nn}^k\left|\lambda_n\right|^k\left|t_n\right|^k$$

$$=O(1)\sum_{n=1}^{u}\frac{p_n}{P_n}\left|\lambda_n\right|^{k-1}\left|\lambda_n\right|\left|t_n\right|^k$$

$$=O(1)\sum_{n=1}^{u}\frac{p_n}{P_n}\left|\lambda_n\right|\left|t_n\right|^k$$

bulunur.

Abel kısmi toplama formülü ile,

$$\sum_{n=1}^{u}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|U_{n,1}\right|^k = O(1)\sum_{n=1}^{u-1}\Delta\left|\lambda_n\right|\sum_{r=1}^{n}\frac{p_r}{P_r}\left|t_r\right|^k + O(1)\left|\lambda_u\right|\sum_{n=1}^{u}\frac{p_n}{P_n}\left|t_n\right|^k$$

buluruz. Burada $\Delta|\lambda_n|\le|\Delta\lambda_n|$ olduğu, ayrıca (1.26) ve (1.33) şartları uygulanırsa

$$\sum_{n=1}^{u}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|U_{n,1}\right|^k = O(1)\sum_{n=1}^{u-1}\left|\Delta\lambda_n\right|L_n + O(1)\left|\lambda_u\right|L_u$$

$$=O(1)\sum_{n=1}^{u-1}A_n L_n + O(1)\left|\lambda_u\right|L_u$$

$$=O(1),u\to\infty$$

elde ederiz. Diğer taraftan r=2 için, $k>1$ ve $\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1$ için Hölder eşitsizliği uygularsak

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|U_{n,2}\right|^k=\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|\sum_{m=1}^{n-1}\frac{m+1}{m}\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\lambda_m t_m\right|^k$$

$$=O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left\{\sum_{m=1}^{n-1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\left|\lambda_m\right|\left|t_m\right|\right\}^k$$

$$=O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\left|\lambda_m\right|^k\left|t_m\right|^k\right)\times\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\right)^{k-1}$$

elde ederiz. Şimdi

$$\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)=\hat{t}_{nm}-\hat{t}_{n,m+1}=\bar{t}_{nm}-\bar{t}_{n-1,m}-\bar{t}_{n,m+1}+\bar{t}_{n-1,m+1}$$

$$=\sum_{i=m}^{n}t_{ni}-\sum_{i=m}^{n-1}t_{n-1,i}-\sum_{i=m+1}^{n}t_{ni}+\sum_{i=m+1}^{n-1}t_{n-1,i}=t_{nm}-t_{n-1,m} \qquad (3.4)$$

dir. (3.2) den dolayı $t_{n-1,m}\geq t_{nm}$ ve (3.1) den dolayı $\bar{t}_{n0}=1$ olduğundan

$$\sum_{m=1}^{n-1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|=\sum_{m=1}^{n-1}\left(t_{n-1,m}-t_{nm}\right)=1-t_{n-1,0}-1+t_{n0}+t_{nn}\leq t_{nn} \qquad (3.5)$$

bulunur. (1.33), (3.3) ve (3.5) şartlarını kullanırsak,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|U_{n,2}\right|^k=O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(t_{nn}\right)^{k-1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\sum_{m=1}^{n-1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\left|\lambda_m\right|^k\left|t_m\right|^k$$

$$=O(1)\sum_{m=1}^{u}\left|\lambda_m\right|^{k-1}\left|\lambda_m\right|\left|t_m\right|^k\sum_{n=m+1}^{u+1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|$$

$$=O(1)\sum_{m=1}^{u}\left|\lambda_m\right|\left|t_m\right|^k\sum_{n=m+1}^{u+1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|$$

elde ederiz. (3.4) deki

$$\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)=t_{nm}-t_{n-1,m}$$

eşitliğini ve (3.2) şartını kullanarak

$$\sum_{n=m+1}^{u+1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|=\sum_{n=m+1}^{u+1}\left(t_{n-1,m}-t_{nm}\right)=t_{mm}-t_{u+1,m}\le t_{mm}$$

bulunur. Böylece $U_{n,1}$ deki gibi

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|U_{n,2}\right|^k=O(1)\sum_{m=1}^{u}\left|\lambda_m\right|\left|t_m\right|^k t_{mm}=O(1)\sum_{m=1}^{u}\frac{p_m}{P_m}\left|\lambda_m\right|\left|t_m\right|^k=O(1),\ u\to\infty$$

elde ederiz. Yine $\bar{T}$, $\hat{T}$ matrislerinin tanımı ve (3.1), (3.2) şartlarından

$$\hat{t}_{n,m+1}=\bar{t}_{n,m+1}-\bar{t}_{n-1,m+1}=\sum_{i=m+1}^{n}t_{ni}-\sum_{i=m+1}^{n-1}t_{n-1,i}$$

$$=1-\sum_{i=0}^{m}t_{ni}-1+\sum_{i=0}^{m}t_{n-1,i}=\sum_{i=0}^{m}\left(t_{n-1,i}-t_{ni}\right)\ge 0 \qquad (3.6)$$

olup

$$\sum_{n=m+1}^{u+1}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|=\sum_{n=m+1}^{u+1}\sum_{i=0}^{m}\left(t_{n-1,i}-t_{ni}\right)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{n=m+1}^{u+1}\left(t_{n-1,i}-t_{ni}\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{m}\left(t_{mi}-t_{u+1,i}\right)\le\sum_{i=0}^{m}t_{mi}=\bar{t}_{mo}=1$$

(3.7)

$$\hat{t}_{n,m+1}=\bar{t}_{n,m+1}-\bar{t}_{n-1,m+1}=\sum_{i=m+1}^{n}t_{ni}-\sum_{i=m+1}^{n-1}t_{n-1,i}$$

$$=t_{nn}+\sum_{i=m+1}^{n-1}\left(t_{ni}-t_{n-1,i}\right)\le t_{nn} \qquad (3.8)$$

yazılabilir.

Şimdi de $\left|\Delta\lambda_n\right|\le\left|A_n\right|$ şartını kullanıp Hölder eşitsizliği uygularsak,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|U_{n,3}\right|^k=\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|\sum_{m=1}^{n-1}\frac{m+1}{m}\hat{t}_{n,m+1}\Delta\lambda_m t_m\right|^k$$

$$=O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|\left|\Delta\lambda_m\right|\left|t_m\right|\right)^k$$

$$=O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|\left|A_m\right|\left|t_m\right|\right)^k$$

$$=O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|\left|A_m\right|\left|t_m\right|^k\right)\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|\left|A_m\right|\right)^{k-1}$$

buluruz. (3.3) den dolayı $t_{nn}=O\left(\frac{p_n}{P_n}\right)$ olduğundan,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|U_{n,3}\right|^k=O(1)\sum_{n=2}^{u+1}(t_{nn})^{k-1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|\left|A_m\right|\left|t_m\right|^k\right)$$

$$=O(1)\sum_{m=1}^{u}\left|A_m\right|\left|t_m\right|^k\sum_{n=m+1}^{u+1}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|$$

elde ederiz. Burada (3.7) şartından

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|U_{n,3}\right|^k=O(1)\sum_{m=1}^{u}m\left|A_m\right|\frac{1}{m}\left|t_m\right|^k$$

yazılabilir. Şimdi de Abel kısmi toplama formülünü uygularsak,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|U_{n,3}\right|^k=O(1)\sum_{m=1}^{u-1}\Delta\left(m\left|A_m\right|\right)\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{r}\left|t_r\right|^k+O(1)u\left|A_u\right|\sum_{m=1}^{u}\frac{1}{m}\left|t_m\right|^k$$

elde ederiz. Burada

$$\Delta\left(m\left|A_m\right|\right)=m\left|A_m\right|-(m+1)\left|A_{m+1}\right|=m\left|A_m\right|-m\left|A_{m+1}\right|-\left|A_{m+1}\right|$$

$$=m\left(\left|A_m\right|-\left|A_{m+1}\right|\right)-\left|A_{m+1}\right|$$

$$= m\Delta|A_m| - |A_{m+1}|$$

olduğundan

$$\left|\Delta\left(m|A_m|\right)\right| = \left|m\Delta|A_m| - |A_{m+1}|\right| \le m|\Delta A_m| + |A_{m+1}| \tag{3.9}$$

dir. Ayrıca (1.25) den $\sum_{n=1}^{u}\frac{1}{n}|t_n|^k = O(L_u),\ u\to\infty$, (1.34) den $nA_nL_n = O(1), n\to\infty$, (1.35) den $\sum_{n=1}^{\infty} nL_n|\Delta A_n| < \infty$ ve $\sum A_nL_n$ serisi yakınsak olduğu kullanılırsa,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}|U_{n,3}|^k = O(1)\sum_{m=1}^{u-1} m|\Delta A_m|L_m + O(1)\sum_{m=1}^{u-1}|A_{m+1}|L_{m+1} + O(1)u|A_u|L_u$$

$$= O(1),\ u\to\infty$$

bulunur.

Son olarak (3.3), (3.8) şartlarını kullanıp ve Hölder eşitsizliği uygularsak,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}|U_{n,4}|^k \le \sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}|\hat{t}_{n,m+1}||\lambda_{m+1}|\frac{|t_m|}{m}\right)^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}|\hat{t}_{n,m+1}||\lambda_{m+1}|\frac{|t_m|^k}{m}\right)\left(\sum_{m=1}^{n-1}|\hat{t}_{n,m+1}|\frac{|\lambda_{m+1}|}{m}\right)^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}(t_{nn})^{k-1}\sum_{m=1}^{n-1}|\hat{t}_{n,m+1}||\lambda_{m+1}|\frac{|t_m|^k}{m}$$

$$= O(1)\sum_{m=1}^{u}\frac{|\lambda_{m+1}|}{m}|t_m|^k\sum_{n=m+1}^{u+1}|\hat{t}_{n,m+1}|$$

elde ederiz.

(3.7) ve Abel kısmi toplama formülü uygularsak,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|U_{n,4}\right|^k = O(1)\sum_{m=1}^{u}\frac{\left|\lambda_{m+1}\right|}{m}\left|t_m\right|^k$$

$$= O(1)\sum_{m=1}^{u-1}\Delta\left|\lambda_{m+1}\right|\sum_{r=1}^{m}\frac{\left|t_r\right|^k}{r} + O(1)\left|\lambda_{u+1}\right|\sum_{r=1}^{u}\frac{\left|t_r\right|^k}{r}$$

buluruz. $\sum A_n L_n$ serisi yakınsak olduğundan ve (1.25), (1.33) şartları gereğince,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|U_{n,4}\right|^k = O(1)\sum_{m=1}^{u-1}\left|A_{m+1}\right|L_{m+1} + O(1)\left|\lambda_{u+1}\right|L_{u+1} = O(1),\ u\to\infty$$

elde edilir ve bu şekilde teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.1.2. (L_n) dizisini hemen hemen artan bir dizi kabul edelim. Teorem 1.4.29 un bütün şartları kabul edilsin ve (1.26) sağlansın. $T=(t_{nm})$ pozitif normal matrisi için (3.1)- (3.3) ve

$$\left|\hat{t}_{n,m+1}\right| = O\left(m\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\right) \tag{3.10}$$

şartları sağlanıyorsa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{P_n\lambda_n}{np_n}$ serisi $k\geq 1$ için $\left|T, p_n\right|_k$ toplanabilirdir [26].

İspat: (T_n), $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n P_n\lambda_n}{np_n}$ serisinin T -dönüşümü olsun. (1.22) den

$$T_n = \sum_{m=1}^{n}\bar{t}_{nm}\frac{a_m P_m\lambda_m}{mp_m}$$

olur. Buna göre (1.23) ifadesinde belirtildiği şekilde $\bar{\Delta}T_n$ farkı için,

$$\bar{\Delta}T_n = \sum_{m=1}^{n}\bar{t}_{nm}\frac{a_m P_m\lambda_m}{mp_m} - \sum_{m=1}^{n-1}\bar{t}_{n-1,m}\frac{a_m P_m\lambda_m}{mp_m}$$

$$= \sum_{m=1}^{n}\hat{t}_{nm}\frac{a_m P_m\lambda_m}{mp_m}$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \hat{t}_{nm} \frac{m a_m P_m \lambda_m}{m^2 p_m}$$

elde ederiz. Yukarıda verilen seriye Abel kısmi toplama formülünü uygularsak (t_n) dizisi ve $\hat{T}$ matrisinin tanımından,

$$\bar{\Delta} T_n = \sum_{m=1}^{n-1} \Delta_m \left(\frac{\hat{t}_{nm} P_m \lambda_m}{m^2 p_m} \right) \sum_{r=1}^{m} r a_r + \frac{\hat{t}_{nn} P_n \lambda_n}{n^2 p_n} \sum_{r=1}^{n} r a_r$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1} \Delta_m \left(\frac{\hat{t}_{nm} P_m \lambda_m}{m^2 p_m} \right) (m+1) t_m + \frac{t_{nn} P_n \lambda_n}{n^2 p_n} (n+1) t_n$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\Delta_m \left(\frac{\hat{t}_{nm} P_m \lambda_m}{m^2 p_m} \right) = \frac{\hat{t}_{nm} P_m \lambda_m}{m^2 p_m} - \frac{\hat{t}_{n,m+1} P_{m+1} \lambda_{m+1}}{(m+1)^2 p_{m+1}}$$

$$= \frac{(m+1)^2 p_{m+1} \hat{t}_{nm} P_m \lambda_m - m^2 p_m \hat{t}_{n,m+1} P_{m+1} \lambda_{m+1}}{(m+1)^2 m^2 p_m P_{m+1}}$$

$$+ \frac{(m+1)^2 p_{m+1} \hat{t}_{n,m+1} P_m \lambda_m - (m+1)^2 p_{m+1} \hat{t}_{n,m+1} P_m \lambda_m}{(m+1)^2 m^2 p_m p_{m+1}}$$

$$+ \frac{(m+1)^2 p_{m+1} \hat{t}_{n,m+1} P_m \lambda_{m+1} - (m+1) p_{m+1} \hat{t}_{n,m+1} P_m \lambda_{m+1}}{(m+1)^2 m^2 p_m p_{m+1}}$$

$$= \frac{(m+1)^2 p_{m+1} P_m \lambda_m (\hat{t}_{nm} - \hat{t}_{n,m+1})}{(m+1)^2 m^2 p_m p_{m+1}} + \frac{(m+1)^2 p_{m+1} P_m \hat{t}_{n,m+1} (\lambda_m - \lambda_{m+1})}{(m+1)^2 m^2 p_m p_{m+1}}$$

$$+ \frac{\hat{t}_{n,m+1} \lambda_{m+1} \left((m+1)^2 p_{m+1} P_m - m^2 p_m P_{m+1} \right)}{(m+1)^2 m^2 p_m p_{m+1}}$$

$$= \frac{\lambda_m P_m \Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)}{m^2 p_m} + \frac{P_m \hat{t}_{n,m+1} \Delta\lambda_m}{m^2 p_m} + \hat{t}_{n,m+1}\lambda_{m+1}\Delta\left(\frac{P_m}{m^2 p_m}\right)$$

olup

$$\bar{\Delta}T_n = \frac{t_{nn}P_n\lambda_n}{n^2 p_n}(n+1)t_n + \sum_{m=1}^{n-1}\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\frac{(m+1)}{m^2}\frac{P_m\lambda_m}{p_m}t_m + \sum_{m=1}^{n-1}\frac{\hat{t}_{n,m+1}P_m}{p_m}\Delta\lambda_m t_m\frac{(m+1)}{m^2}$$

$$+\sum_{m=1}^{n-1}\hat{t}_{n,m+1}\lambda_{m+1}\Delta\left(\frac{P_m}{m^2 p_m}\right)t_m(m+1)$$

$$= T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3} + T_{n,4}$$

elde ederiz.

$$\left|T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3} + T_{n,4}\right|^k \le 4^k\left(\left|T_{n,1}\right|^k + \left|T_{n,2}\right|^k + \left|T_{n,3}\right|^k + \left|T_{n,4}\right|^k\right)$$

olduğundan, teoremi ispatlamak üzere r=1,2,3,4 için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|T_{n,r}\right|^k < \infty$$

olduğunu gösterelim.

Tekrar $\frac{n+1}{n} = O(1)$ ve (1.31) dan dolayı $P_n = O(np_n)$ ve (3.3) den dolayı $t_{nn} = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right)$ ve (1.30) dan $|\lambda_n| L_n = O(1)$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{u}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|T_{n,1}\right|^k = \sum_{n=1}^{u}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|\frac{t_{nn}P_n\lambda_n}{n^2 p_n}(n+1)t_n\right|^k$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{u}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} t_{nn}^k\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^k|\lambda_n|^k\frac{|t_n|^k}{n^k}$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{u}|\lambda_n|^{k-1}|\lambda_n|\frac{|t_n|^k}{n}$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{u}|\lambda_n|\frac{|t_n|^k}{n}$$

bulunur. Şimdi Abel kısmi toplama formülünü ile,

$$\sum_{n=1}^{u}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}|T_{n,1}|^k = O(1)\sum_{n=1}^{u-1}\Delta|\lambda_n|\sum_{m=1}^{n}\frac{|t_m|^k}{m} + O(1)|\lambda_u|\sum_{n=1}^{u}\frac{|t_n|^k}{n}$$

buluruz. $\Delta|\lambda_n| \le |\Delta\lambda_n|$ olduğundan ve (1.25), (1.27), (1.30) ve (1.37) şartlarından

$$= O(1)\sum_{n=1}^{u-1}|\Delta\lambda_n|L_n + O(1)\lambda_u L_u$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{u-1}\eta_n L_n + O(1)|\lambda_u|L_u$$

$$= O(1),\ u\to\infty$$

elde ederiz. Burada (1.31) şartını ve r=2 için, $k>1$ ve $\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1$ için Hölder eşitsizliği uygularsak,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}|T_{n,2}|^k = \sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|\sum_{m=1}^{n-1}\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\frac{m+1}{m^2}\frac{P_m\lambda_m}{p_m}t_m\right|^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right||\lambda_m||t_m|\right)^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right||\lambda_m|^k|t_m|^k\right)\times\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\right)^{k-1}$$

elde ederiz.

Burada (3.5) den $\sum_{m=1}^{n-1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right| \le t_{nn}$ ve (3.3) den $t_{nn}=O\left(\frac{p_n}{P_n}\right)$ olduğundan,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|T_{n,2}\right|^k = O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} t_{nn}^{k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\left|\lambda_m\right|^k\left|t_m\right|^k\right)$$

$$= O(1)\sum_{m=1}^{u}\left|\lambda_m\right|^k\left|t_m\right|^k\sum_{n=m+1}^{u+1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|$$

$$= O(1)\sum_{m=1}^{u}\left|\lambda_m\right|\left|t_m\right|^k t_{mm} = O(1)\sum_{m=1}^{u}\left|\lambda_m\right|\left|t_m\right|^k\frac{p_m}{P_m}$$

bulunur. Abel kısmi toplama formülünü ile,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|T_{n,2}\right|^k = O(1)\sum_{m=1}^{u-1}\Delta\left|\lambda_m\right|\sum_{r=1}^{m}\frac{p_r}{P_r}\left|t_r\right|^k + O(1)\left|\lambda_u\right|\sum_{m=1}^{u}\frac{p_m}{P_m}\left|t_m\right|^k$$

elde ederiz. (1.26), (1.27), (1.30) ve (1.37) şartlarından

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|T_{n,2}\right|^k = O(1)\sum_{m=1}^{u-1}\left|\Delta\lambda_m\right|L_m + O(1)\lambda_u L_u$$

$$= O(1)\sum_{m=1}^{u-1}\eta_m L_m + O(1)\left|\lambda_u\right|L_u$$

$$= O(1),\ u\to\infty$$

elde ederiz. Şimdi de (1.27), (1.31) şartlarını kullanıp Hölder eşitsizliğini uygularsak,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|T_{n,3}\right|^k = \sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|\sum_{n=1}^{n-1}\frac{\hat{t}_{n,m+1}P_m}{p_m}\Delta\lambda_m t_m\frac{m+1}{m^2}\right|^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|\left|\Delta\lambda_m\right|\left|t_m\right|\right)^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|\eta_m\left|t_m\right|^k\right)\times\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|\eta_m\right)^{k-1}$$

buluruz. (1.36), (3.5) ve (3.10) dan $\left|\hat{t}_{n,m+1}\right| = O\left(m\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\right)$ olduğundan

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|T_{n,3}\right|^k = O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|\eta_m\left|t_m\right|^k\right)\times\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|m\eta_m\right)^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} t_{nn}{}^{k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|\eta_m\left|t_m\right|^k\right)$$

$$= O(1)\sum_{m=1}^{u}\eta_m\left|t_m\right|^k\sum_{n=m+1}^{u+1}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right| .$$

Bulunan bu eşitliğe (3.7) den $\sum_{n=m+1}^{u+1}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right| \le 1$ olduğunu ve Abel kısmi toplama formülünü uygularsak,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|T_{n,3}\right|^k = O(1)\sum_{m=1}^{u} m\eta_m\frac{1}{m}\left|t_m\right|^k$$

$$= O(1)\sum_{m=1}^{u-1}\Delta(m\eta_m)\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{r}\left|t_r\right|^k + O(1)u\eta_u\sum_{m=1}^{u}\frac{1}{m}\left|t_m\right|^k$$

bulunur. Şimdi

$$\left|\Delta(m\eta_m)\right| = \left|m\eta_m - (m+1)\eta_{m+1}\right| = \left|m\eta_m - m\eta_{m+1} + \eta_{m+1}\right|$$

$$= \left|m\Delta\eta_m - \eta_{m+1}\right| \le m\left|\Delta\eta_m\right| + \eta_{m+1} \qquad (3.11)$$

olup, (1.25), (1.29), (3.11) ve Lemma 1.4.33 ün şartlarını kullanırsak,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|T_{n,3}\right|^k = O(1)\sum_{m=1}^{u-1}\left|\Delta(m\eta_m)\right|L_m + O(1)u\eta_u L_u$$

$$= O(1)\sum_{m=1}^{u-1} m\left|\Delta\eta_m\right|L_m + O(1)\sum_{m=1}^{u-1}\eta_{m+1}L_{m+1} + O(1)u\eta_u L_u$$

$$= O(1),\ u\to\infty$$

buluruz. Son olarak (1.38) den $\Delta\left(\frac{P_n}{p_n n^2}\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ şartını ve Hölder eşitsizliğini kullanırsak,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|T_{n,4}\right|^k=\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|\sum_{m=1}^{n-1}\hat{t}_{n,m+1}\lambda_{m+1}\Delta\left(\frac{P_m}{m^2 p_m}\right)t_m(m+1)\right|^k$$

$$=O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|\left|\lambda_{m+1}\right|^k\frac{\left|t_m\right|^k}{m}\right)\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|\frac{1}{m}\right)^{k-1}$$

elde ederiz. (1.39), (3.3), (3.5) ve (3.10) dan $\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|=O\left(m\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\right)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|T_{n,4}\right|^k=O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|\left|\lambda_{m+1}\right|^k\frac{\left|t_m\right|^k}{m}\right)\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\right)^{k-1}$$

$$=O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}t_{nn}^{k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|\left|\lambda_{m+1}\right|^k\frac{\left|t_m\right|^k}{m}\right)$$

$$=O(1)\sum_{m=1}^{u}\frac{\left|\lambda_{m+1}\right|}{m}\left|t_m\right|^k\sum_{n=m+1}^{u+1}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|$$

bulunur. (3.7) şartı gereğince

$$\sum_{n=2}^{u-1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|T_{n,4}\right|^k=O(1)\sum_{m=1}^{u}\frac{\left|\lambda_{m+1}\right|}{m}\left|t_m\right|^k$$

bulunur.

Böylece $T_{n,1}$ de yapılan işlemler uygulanırsa

$$\sum_{n=2}^{u-1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|T_{n,4}\right|^k=O(1),\ u\to\infty$$

elde edilir, bu da teoremin ispatını verir.

4. BÖLÜM

4.1. Sonsuz Serilerin $|T, p_n; \delta|_k$ Toplanabilmesi

Burada Teorem 1.4.29 ve Teorem 1.4.30 u $|T, p_n; \delta|_k$ toplanabilirliğe genelleştiren iki teoremi ifade ve ispat edeceğiz.

Teorem 4.1.1. $0 \le \delta < 1/k$ ve $k \ge 1$ olsun. $T = (t_{nm})$ matrisi de (3.1)-(3.3), (3.10) şartlarını sağlayan pozitif normal matris ve (L_n) dizisini hemen hemen artan dizi kabul edelim. Eğer (1.27)-(1.32) şartları ile

$$\sum_{n=1}^{u} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\delta k-1} |t_n|^k = O(L_u),\ u \to \infty \tag{4.1}$$

$$\sum_{n=m+1}^{u+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\delta k} \left| \Delta_m (\hat{t}_{nm}) \right| = O\left\{ \left(\frac{P_m}{p_m} \right)^{\delta k-1} \right\},\ u \to \infty \tag{4.2}$$

şartları sağlıyorsa, bu taktirde $\sum \frac{a_n P_n \lambda_n}{n p_n}$ serisi $|T, p_n; \delta|_k$ toplanabilirdir [27].

İspat: (T_n), $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n P_n \lambda_n}{n p_n}$ serisinin A-dönüşümü

$$\bar{\Delta} T_n = \frac{t_{nn} P_n \lambda_n}{n^2 p_n} (n+1) t_n + \sum_{m=1}^{n-1} \Delta_m (\hat{t}_{nm}) \frac{(m+1)}{m^2} \frac{P_m \lambda_m}{p_m} t_m + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\hat{t}_{n,m+1} P_m}{p_m} \Delta \lambda_m t_m \frac{(m+1)}{m^2}$$

$$+ \sum_{m=1}^{n-1} \hat{t}_{n,m+1} \lambda_{m+1} \Delta \left(\frac{P_m}{m^2 p_m} \right) t_m (m+1)$$

$$= T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3} + T_{n,4}$$

şeklinde bulunmuştu.

O halde teoremi ispatlamak için r=1,2,3,4 için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,r}\right|^k<\infty$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. İlk olarak ve (1.31) dan dolayı $P_n=O\left(np_n\right)$ ve (3.3) den dolayı $t_{nn}=O\left(\frac{p_n}{P_n}\right)$ ve (1.30) dan $\left|\lambda_n\right|L_n=O(1)$ olduğundan,

$$\sum_{n=1}^{u}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,1}\right|^k=\sum_{n=1}^{u}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|\frac{t_{nn}P_n\lambda_n}{n^2p_n}(n+1)t_n\right|^k$$

$$=O(1)\sum_{n=1}^{u}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}t_{nn}^k\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^k\left|\lambda_n\right|^k\frac{\left|t_n\right|^k}{n^k}$$

$$=O(1)\sum_{n=1}^{u}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\left|\lambda_n\right|^{k-1}\left|\lambda_n\right|\left|t_n\right|^k$$

$$=O(1)\sum_{n=1}^{u}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\left|\lambda_n\right|\left|t_n\right|^k.$$

Şimdi bu ifadeye Abel kısmi toplama formülü uygulanırsa,

$$\sum_{n=1}^{u}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,1}\right|^k=O(1)\sum_{n=1}^{u-1}\Delta\left|\lambda_n\right|\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{P_r}{p_r}\right)^{\delta k-1}\left|t_r\right|^k+O(1)\left|\lambda_u\right|\sum_{n=1}^{u}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\left|t_n\right|^k$$

bulunur. $\Delta\left|\lambda_n\right|\le\left|\Delta\lambda_n\right|$ olup (1.27), (1.30), (1.37) ve (4.1) şartlarından

$$\sum_{n=1}^{u}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,1}\right|^k=O(1)\sum_{n=1}^{u-1}\left|\Delta\lambda_n\right|L_n+O(1)\left|\lambda_u\right|L_u$$

$$=O(1)\sum_{n=1}^{u-1}\eta_nL_n+O(1)\left|\lambda_u\right|L_u$$

$$=O(1),\ u\to\infty$$

bulunur.

Burada (1.31) şartını ve r=2 için, $k>1$ ve $\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1$ için Hölder eşitsizliği uygularsak,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,2}\right|^k=\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|\sum_{m=1}^{n-1}\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\frac{m+1}{m^2}\frac{P_m\lambda_m}{p_m}t_m\right|^k$$

$$=O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\left|\lambda_m\right|\left|t_m\right|\right)^k$$

$$=O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\left|\lambda_m\right|^k\left|t_m\right|^k\right)\times\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\right)^{k-1}$$

elde ederiz. Burada (3.5) den $\sum_{m=1}^{n-1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\le t_{nn}$ ve (3.3) den $t_{nn}=O\left(\frac{p_n}{P_n}\right)$ olduğundan,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,2}\right|^k=O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\left|\lambda_m\right|^k\left|t_m\right|^k\right)$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadeye indis değişikliği yapılarak (1.30) ve (4.2) şartlarını kullanarak

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,2}\right|^k=O(1)\sum_{m=1}^{u}\left|\lambda_m\right|^{k-1}\left|\lambda_m\right|\left|t_m\right|^k\sum_{n=m+1}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|$$

$$=O(1)\sum_{m=1}^{u}\left(\frac{P_m}{p_m}\right)^{\delta k-1}\left|\lambda_m\right|\left|t_m\right|^k$$

buluruz. Burada $T_{n,1}$ deki gibi işlemler uygulanırsa,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,2}\right|^k=O(1),\ u\to\infty$$

elde edilir.

Şimdi

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,3}\right|^k=\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|\sum_{m=1}^{n-1}\frac{\hat{t}_{n,m+1}P_m}{p_m}\Delta\lambda_m t_m\frac{m+1}{m^2}\right|^k$$

$$=O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|\left|\Delta\lambda_m\right|\left|t_m\right|\right)^k$$

buluruz. $\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|=O\left(m\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\right)$ olduğundan

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|T_{n,3}\right|^k=O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}m\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\eta_m\left|t_m\right|^k\right)\times\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|m\eta_m\right)^{k-1}$$

$$=O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k}\left(\sum_{m=1}^{n-1}m\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\eta_m\left|t_m\right|^k\right)$$

$$=O(1)\sum_{m=1}^{u}m\eta_m\left|t_m\right|^k\sum_{n=m+1}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\ .$$

Burada (4.2) ve Abel kısmi toplama formülünü uygularsak,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,3}\right|^k=O(1)\sum_{m=1}^{u}m\eta_m\left|t_m\right|^k\left(\frac{P_m}{p_m}\right)^{\delta k-1}$$

$$=O(1)\sum_{m=1}^{u-1}\Delta(m\eta_m)\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{P_r}{p_r}\right)^{\delta k-1}\left|t_r\right|^k+O(1)u\eta_u\sum_{m=1}^{u}\left(\frac{P_m}{p_m}\right)^{\delta k-1}\left|t_m\right|^k$$

bulunur. Burada (1.29), (3.11), (4.1) ve Lemma 1.4.33 ün şartlarını kullanırsak,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|T_{n,3}\right|^k=O(1)\sum_{m=1}^{u-1}\left|\Delta(m\eta_m)\right|L_m+O(1)u\eta_u L_u$$

$$=O(1)\sum_{m=1}^{u-1}m\left|\Delta\eta_m\right|L_m+O(1)\sum_{m=1}^{u-1}\eta_{m+1}L_{m+1}+O(1)u\eta_u L_u$$

$$=O(1),\ u\to\infty$$

buluruz.

Şimdi $\Delta\left(\frac{P_n}{p_n n^2}\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ şartını ve Hölder eşitsizliğini kullanırsak,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,4}\right|^k = O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|\left|\lambda_{m+1}\right|\frac{\left|t_m\right|}{m}\right)^k$$

elde ederiz.

(3.3), (3.5) şartları ve $\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|=O\left(m\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\right)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,4}\right|^k = O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\left|\lambda_{m+1}\right|\left|t_m\right|\right)^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\left|\lambda_{m+1}\right|^k\left|t_m\right|^k\right)\times\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\right)^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\left|\lambda_{m+1}\right|^k\left|t_m\right|^k\right)$$

bulunur. Şimdi indis değişikliği yapıp (4.2) şartını kullanırsak,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,4}\right|^k = O(1)\sum_{m=1}^{u}\left|\lambda_{m+1}\right|^{k-1}\left|\lambda_{m+1}\right|\left|t_m\right|^k\sum_{n=m+1}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|$$

$$= O(1)\sum_{m=1}^{u}\left(\frac{P_m}{p_m}\right)^{\delta k-1}\left|\lambda_{m+1}\right|\left|t_m\right|^k$$

buluruz. Yukarıdaki ifadeye $T_{n,1}$ deki işlemler uygulanırsa

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,4}\right|^k = O(1),\ u\to\infty$$

elde edilir. Teorem 4.1.1 in ispatı tamamlanır.

Teorem 4.1.2. $0 \le \delta < 1/k$ ve $k \ge 1$ olsun**.** $T = (t_{nm})$ matrisini (3.1)-(3.3) şartlarını sağlayan pozitif normal matris ve (L_n) dizisini de hemen hemen artan dizi olarak kabul edelim. (1.24), (1.27)- (1.30), (4.1), (4.2) şartları ile

$$\sum_{n=1}^{u} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\delta k} \frac{|t_n|^k}{n} = O(L_u),\ u \to \infty \tag{4.3}$$

ve

$$\sum_{n=m+1}^{u+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\delta k} |\hat{t}_{n,m+1}| = O\left\{ \left(\frac{P_m}{p_m} \right)^{\delta k} \right\},\ u \to \infty \tag{4.4}$$

şartları sağlıyorsa, bu taktirde $\sum a_n \lambda_n$ serisi $|T, p_n; \delta|_k$ toplanabilirdir [28].

İspat: $\sum a_n \lambda_n$ serisinin A-dönüşümü (U_n) olmak üzere

$$\overline{\Delta} U_n = \frac{n+1}{n} t_{nn} \lambda_n t_n + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{m+1}{m} \Delta_m (\hat{t}_{nm}) \lambda_m t_m + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{m+1}{m} \hat{t}_{n,m+1} \Delta \lambda_m t_m + \sum_{m=1}^{n-1} \hat{t}_{n,m+1} \lambda_{m+1} \frac{t_m}{m}$$

$$= U_{n,1} + U_{n,2} + U_{n,3} + U_{n,4}$$

şeklinde bulunmuştu.

O halde teoremi ispatlamak için r=1,2,3,4 olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\delta k + k - 1} |U_{n,r}|^k < \infty$$

ifadesini göstermemiz yeterli olacaktır.

İlk olarak $\frac{n+1}{n} = O(1)$, (1.30) dan dolayı $|\lambda_n| = O\left(\frac{1}{L_n} \right) = O(1)$ ve (3.3) den dolayı $t_{nn} = O\left(\frac{p_n}{P_n} \right)$ olduğundan,

$$\sum_{n=1}^{u}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|U_{n,1}\right|^k=\sum_{n=1}^{u}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|\frac{n+1}{n}t_{nn}\lambda_n t_n\right|^k$$

$$=O(1)\sum_{n=1}^{u}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|\lambda_n\right|^k\left|t_n\right|^k {t_{nn}}^k$$

$$=O(1)\sum_{n=1}^{u}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\left|\lambda_n\right|\left|\lambda_n\right|^{k-1}\left|t_n\right|^k$$

$$=O(1)\sum_{n=1}^{u}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\left|\lambda_n\right|\left|t_n\right|^k$$

buluruz. Şimdi bu ifadeye Abel kısmi toplama formülü uygulanırsa,

$$\sum_{n=1}^{u}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|U_{n,1}\right|^k=O(1)\sum_{n=1}^{u-1}\Delta\left|\lambda_n\right|\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{P_r}{p_r}\right)^{\delta k-1}\left|t_r\right|^k+O(1)\left|\lambda_u\right|\sum_{n=1}^{u}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\left|t_n\right|^k$$

bulunur. $\Delta\left|\lambda_n\right|\le\left|\Delta\lambda_n\right|$ olduğundan, ayrıca (1.27), (1.30), (1.37) ve (4.1) şartlarından

$$\sum_{n=1}^{u}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|U_{n,1}\right|^k=O(1)\sum_{n=1}^{u-1}\left|\Delta\lambda_n\right|L_n+O(1)\left|\lambda_u\right|L_u$$

$$=O(1)\sum_{n=1}^{u-1}\eta_n L_n+O(1)\left|\lambda_u\right|L_u$$

$$=O(1),\ u\to\infty$$

elde ederiz.

Hölder eşitsizliği ve (3.5) eşitliğinden,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|U_{n,2}\right|^k=\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|\sum_{m=1}^{n-1}\frac{m+1}{m}\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\lambda_m t_m\right|^k$$

$$=O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\left|\lambda_m\right|\left|t_m\right|\right)^k$$

$$=O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\left|\lambda_m\right|^k\left|t_m\right|^k\right)\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\right)^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1} t_{nn}^{k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\left|\lambda_m\right|^k\left|t_m\right|^k\right)$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|\left|\lambda_m\right|^k\left|t_m\right|^k\right)$$

elde edilir. Yukarıda verilen ifadeye indis değişikliği yapılarak (1.30) ve (4.2) şartlarından

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|U_{n,2}\right|^k = O(1)\sum_{m=1}^{u}\left|\lambda_m\right|^{k-1}\left|\lambda_m\right|\left|t_m\right|^k\sum_{n=m+1}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k}\left|\Delta_m\left(\hat{t}_{nm}\right)\right|$$

$$= O(1)\sum_{m=1}^{u}\left(\frac{P_m}{p_m}\right)^{\delta k-1}\left|\lambda_m\right|\left|t_m\right|^k$$

bulunur. Yukarıda verilen ifadeye $U_{n,1}$ deki işlemler uygulanırsa,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|U_{n,2}\right|^k = O(1),\ u\to\infty$$

bulunur. Hölder eşitsizliği ve (1.27) şartını kullanarak,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|U_{n,3}\right|^k = \sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|\sum_{m=1}^{n-1}\frac{m+1}{m}\hat{t}_{n,m+1}\Delta\lambda_m t_m\right|^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|\left|\Delta\lambda_m\right|\left|t_m\right|\right)^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|\eta_m\left|t_m\right|^k\right)\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|\eta_m\right)^{k-1}$$

bulunur.

(3.3), (3.8) şartlarından ve $\left(\sum_{m=1}^{n-1}\eta_m\right)^{k-1}$ sınırlı olduğundan,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|U_{n,3}\right|^k = O(1)\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|\eta_m\left|t_m\right|^k\right)$$

$$= O(1)\sum_{m=1}^{u}\eta_m\left|t_m\right|^k\sum_{n=m+1}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|$$

elde edilir. (4.4) şartını kullanıp ve Abel kısmi toplama formülü uygulanırsa,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|U_{n,3}\right|^k = O(1)\sum_{m=1}^{u}\left(\frac{P_m}{p_m}\right)^{\delta k} m\eta_m\frac{\left|t_m\right|^k}{m}$$

$$= O(1)\sum_{m=1}^{u-1}\left|\Delta(m\eta_m)\right|\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{P_r}{p_r}\right)^{\delta k}\frac{\left|t_r\right|^k}{r} + O(1)u\eta_u\sum_{m=1}^{u}\left(\frac{P_m}{p_m}\right)^{\delta k}\frac{\left|t_m\right|^k}{m}$$

elde edilir. $\left|\Delta(m\eta_m)\right| \le m\left|\Delta\eta_m\right| + \eta_{m+1}$ eşitsizliği, (1.29), (1.36), (1.37) ve (4.3) şartları kullanılarak,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|U_{n,3}\right|^k = O(1)\sum_{m=1}^{u-1}m\left|\Delta\eta_m\right|L_m + O(1)\sum_{m=1}^{u-1}\eta_{m+1}L_{m+1} + O(1)u\eta_u L_u$$

$$= O(1),\ u\to\infty$$

elde edilir. Son olarak, Hölder eşitsizliği ve (1.24), (3.3), (3.8), (4.4) şartları kullanılarak,

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|U_{n,4}\right|^k = \sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m}\hat{t}_{n,m+1}\lambda_{m+1}t_m\right|^k$$

$$\le \sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|\left|\lambda_{m+1}\right|\frac{\left|t_m\right|^k}{m}\right)$$

$$\le \sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|\left|\lambda_{m+1}\right|\frac{\left|t_m\right|^k}{m}\right)\left(\sum_{m=1}^{n-1}\left|\hat{t}_{n,m+1}\right|\frac{\left|\lambda_{m+1}\right|}{m}\right)^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{m=1}^{u}\frac{|\lambda_{m+1}|}{m}|t_m|^k \sum_{n=m+1}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k}|\hat{t}_{n,m+1}|$$

$$= O(1)\sum_{m=1}^{u}\left(\frac{P_m}{p_m}\right)^{\delta k}\frac{|\lambda_{m+1}|}{m}|t_m|^k$$

elde ederiz. Abel kısmi toplam formülü uygulanarak,

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}|U_{n,4}|^k = O(1)\sum_{m=1}^{u-1}\Delta|\lambda_{m+1}|\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{P_r}{p_r}\right)^{\delta k}\frac{|t_r|^k}{r} + O(1)|\lambda_{u+1}|\sum_{m=1}^{u}\left(\frac{P_m}{p_m}\right)^{\delta k}\frac{|t_m|^k}{m}$$

buluruz. (1.27), (1.30), (1.37) ve (4.3) şartlarından da

$$\sum_{n=2}^{u+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}|U_{n,4}|^k = O(1)\sum_{m=1}^{u-1}\eta_{m+1}L_{m+1} + O(1)|\lambda_{u+1}|L_{u+1}$$

$$= O(1),\ u\to\infty$$

olup Teorem 4.1.2 nin ispatı tamamlanmış olur.

5. BÖLÜM

SONUÇ ve ÖNERİLER

5.1. Sonuç ve Öneriler

Sonuç 5.1.1. Eğer Teorem 3.1.1 de $t_{nm} = \frac{p_m}{P_n}$ alınırsa Teorem 1.4.28 bulunur.

Sonuç 5.1.2. Eğer Teorem 3.1.2 de $t_{nm} = \frac{p_m}{P_n}$ alınırsa Teorem 1.4.29 bulunur. Teorem 3.1.2 de (L_n) dizisi pozitif azalmayan dizi ve $t_{nm} = \frac{p_m}{P_n}$ alınırsa, $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ toplanabilme üzerine bilinen bir teorem elde edilir [24].

Sonuç 5.1.3. Eğer Teorem 4.1.1 de $t_{nm} = \frac{p_m}{P_n}$ ve $\delta = 0$ alınırsa Teorem 1.4.29 bulunur.

Sonuç 5.1.4. Eğer Teorem 4.1.2 de $t_{nm} = \frac{p_m}{P_n}$ ve $\delta = 0$ alınırsa Teorem 1.4.30 bulunur.

KAYNAKÇA

1. Das, G., 1969. Tauberian theorems for absolute Nörlund summability. **Proceedings of the London Mathematical Society (3), 19**: 357-384.
2. Kishore, N., Hotta, G. C., 1970. On $\left|\overline{N}, p_n\right|$ summability factors. **Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), 31**: 9- 12.
3. Tanović-Miller, N., 1979. On strong summability. **Glasnik Matematički Serija III, 14** (34): 87-97.
4. Bor, H., 1985. On two summability methods. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 97** (1): 147-149.
5. Sulaiman, W. T., 2003. Inclusion theorems for absolute matrix summability methods of an infinite series (IV). **Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 34** (11)**:** 1547-1557.
6. Özarslan, H. S., Öğdük, H. N., 2004. Generalizations of two theorems on absolute summability methods. **The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1** (2): Art. 13, 7 pp.
7. Maddox, I. J., 1970. Elements of Functional Analysis. Cambridge University Press, London, 208 pp.
8. McFadden, L., 1942. Absolute Nörlund summability. **Duke Mathematical Journal, 9**: 168-207.
9. Petersen, G. M., 1966. Regular Matrix Transformations. McGraw-Hill Publishing Company Limited, London-New York-Toronto, 142 pp.
10. Ayres, F. Jr., 1962. Schaum's Outline of Theory and Problems of Matrices. McGraw-Hill, New York, 219 pp.
11. Boos, J., 2000. Classical and Modern Methods in Summability. Oxford University Press, New York, 600 pp.
12. Fekete, M., 1911. Zur Theorie der divergenten reihen. **Mathematical ès Termezs Èrtesitö (Budapest), 29**: 719-726.
13. Flett, T. M., 1957. On an extension of absolute summability and some theorems of Littlewood and Paley. **Proceedings of the London Mathematical Society (3), 7**: 113-141.
14. Hardy, G. H., 1949. Divergent Series. Oxford University Press, Oxford, 396 pp.

15. Mazhar, S. M., 1966. On the summability factors of infinite series. **Publicationes Mathematicae Debrecen, 13**: 229-236.

16. Bor, H., 1993. On local property of $\left|\overline{N}, p_n; \delta\right|_k$ summability of factored Fourier series. **Journal of Mathematical Analysis and Applications, 179** (2): 646-649.

17. Boas, R. P., Jr., 1965. Quasi-positive sequences and trigonometric series. **Proceedings of the London Mathematical Society (3), 14a**: 38-46.

18. Bari, N. K., Stečkin, S. B., 1956. Best approximations and differential properties of two conjugate functions. **Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva, 5**: 483-522.

19. Bor, H., 2000. An application of almost increasing and δ-quasi-monotone sequences. **JIPAM. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 1** (2): Art. 18, 1-6.

20. Bor, H., 2002. Corrigendum on the paper: "An application of almost increasing and δ-quasi-monotone sequences". **JIPAM. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 3** (1)**:** Art. 16, 1-2.

21. Bor, H., 2007. A note on absolute Riesz summability factors. **Mathematical Inequalities & Applications, 10** (3): 619-625.

22. Bor, H., 2001. On absolute Riesz summability factors. **Advanced Studies in Contemporary Mathematics (Pusan), 3** (2)**:** 23-29.

23. Mazhar, S. M., 1997. A note on absolute summability factors. **Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica, 25** (3): 233-242.

24. Bor, H., 1988. Absolute summability factors for infinite series. **Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 19** (7): 664-671.

25. Özarslan, H. S., An application of absolute matrix summability using almost increasing and δ-quasi-monotone sequences. **Kyungpook Mathematical Journal** (baskıda).

26. Özarslan, H. S., 2013. A new application of almost increasing sequences. **Miskolc Mathematical Notes, 14** (1)**:** 201-208.

27. Özarslan, H. S., 2016. A new application of generalized almost increasing sequences. **Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 8** (2): 9-15.

28. Özarslan, H. S., 2016. A new study on generalized absolute matrix summability. **Communications in Mathematics and Applications, 7** (4): 303-309.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Büşra ÖNER
Uyruğu: Türkiye (T.C)
Doğum Tarihi ve Yeri: 07.09.1991 - Kayseri
Medeni Durum: Evli
e-mail: busra_oner38@hotmail.com
Yazışma Adresi: Osmangazi Mah. 4360 Sok. Bayrak Ap. No:4/8 Kocasinan/KAYSERİ

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	ERÜ, Matematik	2019
Lisans	ERÜ, Matematik	2014
Lise	Aydınlıkevler Lisesi, Kayseri	2009

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görev
2015-Halen	Kocasinan İlçe Milli Eğitim Müdürlüğü	Öğretmen
2015-Halen	Metropol Eğitim Kurumları	Öğretmen

YABANCI DİL

İngilizce