Yüksek Lisans Tezi

Samed ÖZKAN

Matematik Anabilim Dalı

2013

T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

PROXİMİTY UZAYLAR

Hazırlayan
Samed ÖZKAN

Danışman
Doç. Dr. Muammer KULA

Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2013
KAYSERİ

T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

PROXİMİTY UZAYLAR

Hazırlayan
Samed ÖZKAN

Danışman
Doç. Dr. Muammer KULA

Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2013
KAYSERİ

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Adı Soyadı: Samed ÖZKAN

İmza: 

"Proximity Uzaylar" adlı Yüksek Lisans tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan
Samed ÖZKAN

Danışman
Doç. Dr. Muammer KULA

Matematik ABD Başkanı
Prof. Dr. Fuat GÜRCAN

Doç. Dr. Muammer KULA danışmanlığında **Samed ÖZKAN** tarafından hazırlanan **"Proximity Uzaylar"** adlı bu çalışma jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

20 / 06 / 2013

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. Mehmet BARAN

Üye : Doç. Dr. Muammer KULA

Üye : Yrd. Doç. Dr. Pakize TEMTEK

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 02/07/2013 tarih ve 2013/29-26. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

02 / 07 / 2013

Doç. Dr. Hasan YALÇIN
Enstitü Müdürü V.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren, her konuda yakın ilgi ve desteğiyle yardımlarını esirgemeyen, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, yanında çalışmaktan onur duyduğum değerli hocam Doç. Dr. Muammer KULA'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek Lisans öğrenimim boyunca maddi anlamda bana büyük katkı sağlayan, 1967'den beri eğitime katkılarıyla adından söz ettiren Türk Eğitim Vakfı (TEV)'na teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmalarım süresince sabır göstererek beni daima destekleyen sevgili eşim Semiha ÖZKAN'a ve bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme teşekkür ederim.

PROXİMİTY UZAYLAR

Samed ÖZKAN
Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2013
Danışman: Doç. Dr. Muammer KULA

ÖZET

Proximity uzaylar teorisi 1908'de Roma matematik kongresinde ortaya çıkmıştır. Konu Efremovič tarafından 1950'lerin başlarında yeniden keşfedilmiştir. Efremovič, herhangi bir X cümlesinin A ve B alt cümleleri için "A, B'ye yakındır" proximity bağıntısını karakterize etmiştir. Bu bağıntıyla X cümlesi *proximity (sonsuz küçük) uzay* adını almıştır. Proximity uzay için metrik uzayın ve topolojik grubun doğal bir genellemesidir diyebiliriz [1].

Bu çalışmanın birinci bölümünde, proximity uzaylarla ilgili temel tanımlar ve çeşitli proximity uzay örnekleri verildi.

İkinci bölümde bir X cümlesi üzerindeki bir proximity tarafından üretilen topoloji ve bu topolojinin temel özellikleri ele alındı. Alt uzay proximity'si tanımlandı. Proximity uzayların $\{(X_\alpha,\delta_\alpha)\,|\,\alpha\in\Lambda\}$ ailesinin çarpımı ve bu çarpım üzerindeki proximity bağıntısı üzerinde durularak örnekler verildi. Ayrıca bu bölümde ultrasüzgeçlerin proximity uzaylar teorisindeki karşılığı olan *cluster* kavramından bahsedildi.

Üçüncü bölümde bir proximity uzayda $\delta-$komşuluk kavramı yardımıyla proximity'nin alternatif tanımı verildi. Proximity uzayların genel formları olan, genelleştirilmiş proximity'ler ve bunlar arasındaki bazı ilişkiler incelendi. Son olarak proximity uzayların kategorisi olan PROX kategorisinin tanımı verildi ve $U: PROX \to SET$, $U((X,\delta))=X$ şeklinde tanımlanan U dönüşümünün bir topolojik funktor olduğu gösterildi.

Anahtar Sözcükler: Efremovič Proximity, Proximity Uzay, Quasi-proximity, $\delta-$dönüşüm, Cluster, $\delta-$komşuluk, PROX Kategorisi.

PROXIMITY SPACES

Samed ÖZKAN
Erciyes University, Institute of Natural and Applied Sciences
M.Sc. Thesis, June 2013
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Muammer KULA

ABSTRACT

The theory of proximity spaces showed itself as early as 1908 at the mathematical congress in Rome. The subject was essentially rediscovered in the early 1950's by Efremovič. He axiomatically characterized the proximity relation "A is near B" for subsets A and B of any set X. The set X together with this relation was called an *proximity (infinitesimal) space*. We can say that a proximity space is a natural generalization of a metric space and of a topological group [1].

In the first chapter of this thesis, basic definitions about proximity spaces and several examples of proximity spaces were given.

In the second chapter, we consider the topology on X which is induced by a proximity on X, and study its elementary properties. The subspace proximity was defined. We considered the product of a family $\{(X_\alpha,\delta_\alpha)|\alpha\in\Lambda\}$ of proximity spaces and proximity relation on this product. Then examples was given. Additionally in this chapter, we mentioned the concept of "*cluster*" which was the ultrafilters counterparts in proximity spaces.

In the third chapter, alternate description of proximity in a proximity space was given using the concept of $\delta-$neighbourhood. Generalized proximities which was the general form of proximity spaces, and some of the relationships between them were examined. Lastly, the definition of the category *PROX* of proximity spaces was given and the map U which is defined as $U: PROX \to SET$, $U((X,\delta))=X$, was shown to be a topological funktor.

Keywords: Efremovič Proximity, Proximity Space, Quasi-proximity, $\delta-$map, Cluster, $\delta-$neighbourhood, The Category PROX.

İÇİNDEKİLER

PROXİMİTY UZAYLAR

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK SAYFASI i
YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI ii
KABUL VE ONAY SAYFASI iii
TEŞEKKÜR iv
ÖZET v
ABSTRACT vi
İÇİNDEKİLER vii
SEMBOLLER LİSTESİ ix
ŞEKİLLER LİSTESİ xi

GİRİŞ 1

1. BÖLÜM

1.1. Temel Tanımlar 5
1.2. Proximity Uzay Örnekleri 10

2. BÖLÜM

2.1. Bir Proximity Tarafından Üretilen Topoloji 17
2.2. Proximity Uzayların Alt Uzayları 21
2.3. Proximity Uzayların Çarpımları 24
2.3. Cluster'lar ve Ultrasüzgeçler 36

3. BÖLÜM

3.1. Proximity'nin Alternatif Tanımı 40
3.2. Genelleştirilmiş Proximity'ler 45
3.3. PROX Kategorisi 51

4. BÖLÜM

4.1. Sonuç ve Öneriler 59

KAYNAKLAR 61
ÖZGEÇMİŞ 64

SEMBOLLER LİSTESİ

Sembol:	**Anlamı:**
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
I, Λ	: İndis kümeleri
$f : X \to Y$	: X 'den Y 'ye bir fonksiyon
(X,d)	: Metrik uzay
$D(A,B)$	: $inf\{ d(a,b) \mid a \in A, b \in B \}$
$A \delta B$	: A yakındır B
$A \not\delta B$	: A yakın değildir B
δ	: Proximity bağıntısı
(X,δ)	: Proximity uzay
$\tau(\delta)$	: δ proximity'si tarafından üretilen topoloji
$\overline{A}$ veya $Cl(A)$	: A'nın kapanışı
A^o	: A'nın içi
δ_Y	: Y cümlesi üzerindeki alt uzay proximity'si
$\tau(\delta_Y)$	: Alt uzay proximity'sinin ürettiği topoloji, yani Y üzerindeki alt uzay topolojisi
$\delta_2 < \delta_1$	: δ_1, δ_2 'den daha incedir
(X,U)	: Uniform uzay
$(X,*,\tau)$	: Topolojik grup
A^δ	: $\{ x \mid x \delta A \}$
$\bigtimes_{a \in \Lambda} X_a$	: Her $\alpha \in \Lambda$ için X_α cümlelerinin kartezyen çarpımı
δ_α	: X_α cümlesi üzerindeki proximity
$\{ A_i \mid i = 1,...,m \}$	: A cümlesinin bir sonlu örtüsü
$P_\alpha \mid (\alpha \in \Lambda)$	: X 'in X_α üzerine izdüşüm fonksiyonu
$s[P(X)]$	: X 'in kuvvet cümlesinin eleman sayısı
U	: Ultrasüzgeç
Υ	: Yarı-ultrasüzgeç

σ	: Cluster
σ_x	: $x \in X$ için nokta cluster'ı
Σ	: (X,δ) ayrılmış proximity uzayında bütün cluster'ların ailesi
Ψ	: X 'in Smirnov Kompaktlaştırması
$A \ll B$	: B, A'nın bir $\delta-$komşuluğudur
$A \not\ll B$	: B, A'nın bir $\delta-$komşuluğu değildir.
N_a	: $a \in A$'nın açık komşuluğu
$\{ N_a \mid a \in A \}$	: A'nın bir açık örtüsü
$\{ N_{a_i} \mid i = 1,...,n \}$	: $\{ N_a \mid a \in A \}$ açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü
α	: *P-proximity*
β	: *LO-proximity*
γ	: *LE-proximity*
θ	: *R-proximity*
λ	: *S-proximity*
P_i	: $i.$ proximity uzay aksiyomu
GP_i	: $i.$ genelleştirilmiş proximity uzay aksiyomu
π	: Keyfi bir genelleştirilmiş proximity
K	: Kategori
$Ob(K)$	: K kategorisinin objeleri
$Mor(K)$	: K kategorisinin morfizmleri
$K(A,B)$	: A'dan B'ye tüm morfizmlerin sınıfı
$PROX$	: Proximity uzaylar kategorisi
SET	: Cümlelerin kategorisi
Δ	: X üzerindeki tüm proximity bağıntıların sınıfı

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. (v) özelliğinini sağlayan bir E alt cümlesi 7

Şekil 3.1. U – kaynağı için başlangıç kaldırma 56

Şekil 3.2. U – kavşağı için bitiş kaldırma 57

GİRİŞ

Proximity uzaylar teorisi 1908'de Roma matematik kongresinde, bugün teorinin temel kavramları haline gelen Riesz'in [1] "Enchainment Teorisi" üzerine çeşitli fikirlerin tartışıldığı sırada ortaya çıkmıştır. Konu Efremovič [2, 3] tarafından 1950'lerin başlarında yeniden keşfedilmiştir. Efremovič, herhangi bir X cümlesinin A ve B alt cümleleri için "A, B'ye yakındır" proximity bağıntısını karakterize etmiştir. Bu bağıntıyla X cümlesi *proximity (sonsuz küçük) uzay* adını almıştır.

Proximity uzay için metrik uzayın ve topolojik grubun doğal bir genellemesidir diyebiliriz. Efremovič'in keşfinden 10 yıl kadar daha önce Krishna Murti [4], Wallace [5, 6] ve Szymanski [7] tarafından "Cümlelerin Ayrılması (Seperation of Sets)" adlı bir çalışma yapılmıştır. Bu çalışmada Efremovič ile benzer fakat Efremovič'e oranla daha ilkel kavramlar, zayıf aksiyomlar kullanılmıştır. Daha sonraları Efremovič bir proximity uzay için aksiyomların eşdeğerlerini elde etmek ve böylece teorisine alternatif bir yaklaşım sağlamak için proximity komşulukları kullanmıştır.

Efremovič'in [3] X'in A alt cümlesinin kapanışını, X'in A'ya yakın bütün noktalarının bir sınıfı olarak tanımlaması, bir proximity uzayda topoloji üretilebileceğini göstermiştir. Bu şekilde tamamen regüler uzay elde edilir. Ayrıca Efremovič, tamamen regüler her X uzayının Urysohn fonksiyonu yardımıyla bir proximity uzaya dönüştürülebileceğini de göstermiştir. Şöyle ki $A \delta B \Leftrightarrow f(A)=0$ ve $f(B)=1$ olacak şekilde sürekli bir $f : X \to [0,1]$ fonksiyonu vardır.

Daha sonraları Smirnov [8] tamamen regüler her uzayın maksimal ilişkili bir proximity uzaya sahip olduğunu göstermiş ve "Tamamen regüler bir uzay, minimal ilişkili bir proximity uzaya sahiptir ancak ve ancak yerel kompakttır" ifadesini ispatlamıştır.

Daha yakın zamanlarda Mrówka [9], bir proximity uzaydan bütün dizilerin kümesi üzerine bir yakınlık (nearness) bağıntısı tanımlamıştır. Bu da bir Fréchet L-uzayında proximity benzeri bir kavram ortaya çıkmasına kaynak oluşturmuştur. Bu kavram Goetz [10] tarafından, *UL-uzayı* olarak adlandırdığı uzayı elde etmek için bağımsız olarak keşfedilmiştir. Fakat UL-uzayında bir proximity uzay tam regüler olmaz, ayrıca UL-uzayının bir topolojik uzay olması da gerekmez.

Poljakov [11] ve Goetz [12] bu alanda daha fazla araştırma yapmışlar ve bu kavram ile Efremovič'in proximity kavramı arasındaki bağlantıyı tartışmışlardır. Švarc [13] ise daha önceden, verilen bir uzaydan bütün ağların cümlesi üzerine bir yakınlık (nearness) bağıntısı tanımlamıştır.

Bir proximity uzaydan diğerine olan dönüşümleri incelemek için bir proximity dönüşüm kavramı tanımlamak, Efremovič için tabii bir gereklilikti. Cümlelerin proximity'sini koruyan bir proximity dönüşüm topolojik uzaylardaki bir sürekli dönüşümün ve düzgün uzaylarda bir düzgün sürekli dönüşümün doğal bir benzeridir. İki proximity uzay arasındaki bir proximity dönüşüm, üretilen topolojilere göre süreklidir. Pervin [14] daha sonraları belirli şartlarda (eğer domain proximity uzay equinormal ise) bunun tersinin de geçerli olduğunu ortaya koymuştur.

1952'de Smirnov [8], proximity uzaylar ile ilgili çalışmalarını sürdürmüştür ve bu çalışmalarında Alexandroff'un şu sorusunu yanıtlamıştır: "Hangi topolojik uzaylar, verilen topoloji ile uyumlu bir proximity bağıntısı kabul ederler?" Smirnov, bir Tychonoff uzayının Hausdorff kompaktlaştırması ile uyumlu (compatible) proximity bağıntısı arasındaki bağlantıyı aşağıdaki ifadeyi göstererek keşfetmiştir. "Bir topolojik uzay bir uyumlu proximity bağıntıyı kabul eder ancak ve ancak o topolojik uzay kompakt bir Hausdorff uzayın altuzayıdır."

Ultrasüzgeç kavramının proximity uzaydaki bir benzeri olan *cluster* kavramı Leader [15] tarafından ortaya çıkarılmıştır. Bu kavram ile birçok proximity problemine alternatif bir yaklaşım sağlanmıştır. Leader [15] özellikle bir proximity uzayın kompaktlaştırılmasını elde ederken cluster'lardan faydalanmıştır.

Daha önce de belirtildiği gibi bazı yazarlar Efremovič'in kullandığı aksiyomlardan daha zayıf aksiyomlarla çalışmışlardır. Böylece quasi-proximity, paraproximity ve pseudo-proximity gibi genelleştirilmiş proximity'ler literatürde yer almıştır.

1963 yılında Pervin [16] ve Leader [17] Efremovic'in orijinal aksiyomlar kümesinin genelleştirilmesini bağımsız olarak çalışmışlardır. Pervin simetri aksiyomunu ihmal ederek *quasi-proximity (P-proximity)* adı verdiği uzayı elde etmiştir. Leader ise topolojik *d*-uzayına ulaşmak için simetri aksiyomunu çıkarmanın yanı sıra, P_5 aksiyomunun da daha zayıf bir formunu kullanmıştır.

Her topolojik uzayın, $A \delta B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} \neq \varnothing$ şeklinde δ ikili bağıntısıyla tanımlanan bir genelleştirilmiş proximity uzay meydana getirdiği gösterilmiştir.

Tersine, eğer kapanış operatörü $CL(A) = \overline{A} = \{x \mid \{x\} \delta A\}$ şeklinde tanımlanırsa, o zaman her quasi-proximity uzay ya da topolojik *d*-uzayı bir topolojik uzay haline gelir.

Daha sonraları Lodato [18], *Lodato proximity* olarak ifade ettiğimiz simetrik ikili bağıntı elde etmek için Leader'ın aksiyomlar cümlesine simetri şartını eklemiştir. Ayrıca üzerinde Lodato proximity tanımlı her kümenin R_0 aksiyomunu (her açık küme, noktalarının her birinin kapanışlarını içerir) sağladığını ispatlamıştır.

1964 yılında Hayashi [19] *paraproximity* kavramını ortaya çıkarmıştır. G açıktır ancak ve ancak $G \delta (X - G)$ şartı sağlandığında bir X paraproximity uzayının tamamen normal uzay (X topolojik uzayı tamamen normaldir ancak ve ancak X'in her alt uzayı alt uzay topolojisi ile normal uzaydır) olduğunu göstermiştir. Tersine, tamamen normal bir uzayın bir paraproximity uzay haline gelmesi için $A \delta B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} \neq \varnothing$ şeklindeki bağıntıyla tanımlanmalıdır. Ayrıca Hayashi [20] *pseudo-proximity uzayı* adını verdiği bir genelleştirilmiş proximity uzayını ele almıştır. Bu türdeki her uzaydan topoloji elde edilebileceğini ve her topolojik uzayın bir pseudo-proximity kabul edeceğini ispatlamıştır.

Ayrıca altmışlı yılların sonlarında Leader [21] bir *yerel proximity uzayı* tanımlamıştır.

Bilindiği gibi *Kategori* kavramı Samuel Eilenberg ve Saunders Mac Lane [22] tarafından 1945 yılında ortaya atılmıştır. Fakat benzer düşüncelerin ilk olarak Satnisław

Ulam tarafından 1930'ların sonlarında Polonya'da ortaya çıktığı iddia edilmiştir. Eilenberg ve Mac Lane [23] bu kuramı geliştirirken doğal dönüşümleri anlama çabası içerisindeydiler . Bunu yapabilmek için *Funktorlar* tanımlamak, funktorları tanımlamak için ise *Kategoriler* tanımlamaları gerekiyordu.

İlk olarak cebirsel topolojideki çalışmalarla ortaya çıkan Kategori Teorisi günümüzde matematiğin neredeyse tüm alanlarında uygulanmaktadır.

1. BÖLÜM

Bu bölümde proximity uzaylarla ilgili temel tanımlar ve çeşitli proximity uzay örnekleri verildi.

1.1. Temel Tanımlar

Bir X topolojik uzayında, topoloji; "x, $A \subset X$'in bir kapanış noktasıdır" bağıntısına ilişkin Kuratowski tarafından verilen kapanış aksiyomları ile belirlenir. x, A'nın bir kapanış noktası olduğunda "x *yakındır* A" diyebiliriz. Bu yakınlık bağıntısına göre sürekli bir $f : X \to Y$ fonksiyonu, x yakındır A iken $f(x)$ yakındır $f(A)$ özelliğini sağlayacak şekilde tanımlanır. Bu şekilde X'in A ve B alt cümleleri için "A yakındır B" bağıntısının aksiyomatize edilebilmesi sağlanır.

Tanım 1.1.1 *(Pseudo-metrik).*

$X \neq \varnothing$ bir cümle olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan reel değerli bir $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir *pseudo-metrik*, (X, d) ikilisine de *pseudo-metrik uzay* denir.

i) $\forall x \in X$ için $d(x,x) = 0$

ii) $\forall x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$

iii) $\forall x, y, z \in X$ için $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

X'in bir d pseudo-metriği ile bir pseudo-metrik uzay olması durumunda yakınlık bağıntısı doğal bir yolla tanımlanabilir:

$D(A,B) = inf\{d(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ olmak üzere A yakındır $B \Leftrightarrow D(A,B) = 0$ dır.

D'ye göre A cümlesinin kapanışı $\overline{A} = \{x \mid D(A,x) = 0\}$ dır.

(Y,e) bir başka pseudo-metrik olmak üzere E, D ile benzer şekilde tanımlansın ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. O zaman

f düzenli (uniformly) süreklidir $\Leftrightarrow$ $D(A,B) = 0 \Rightarrow E(f(A), f(B)) = 0$ dır.

Böylece alt cümleler arasındaki yakınlık bağıntısının bir şekilde uniformity ile bağlantılı olduğu görülür.

Yukarıdaki yakınlık bağıntısı (bir pseudo-metrik uzayda tanımlı) aşağıdaki özellikleri sağlar:

Burada "A yakındır B" ifadesi $A \delta B$ ile gösterilmiştir.

i) $A \delta B \Rightarrow B \delta A$

ii) $(A \cup B) \delta C \Leftrightarrow A \delta C \vee B \delta C$

iii) $A \delta B \Rightarrow A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$

iv) $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \delta B$

v) $A \not\delta B \Rightarrow A \not\delta E$ ve $(X - E) \not\delta B$ olacak şekilde bir E alt cümlesi vardır.

Ayrıca bir metrik uzaydaki yakınlık bağıntısı aşağıdaki özelliği de sağlar:

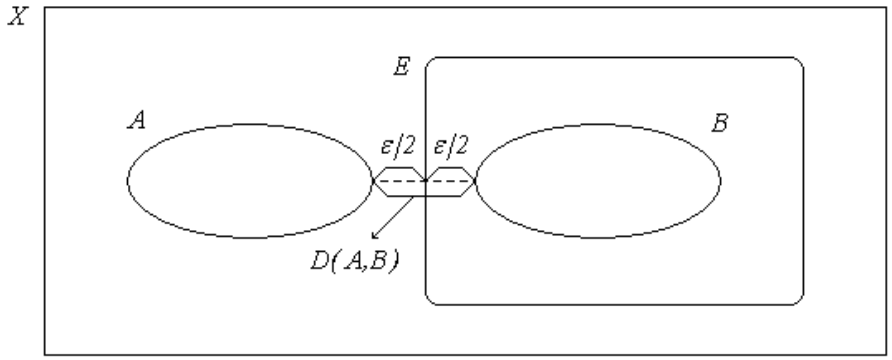
vi) $x \delta y \Rightarrow x = y$ dir.

$x \delta y$ ifadesinin asıl gösterimi $\{x\} \delta \{y\}$ şeklindedir, fakat yazım kolaylığı sağladığından biz bazen $x \delta y$ şeklinde de kullanacağız.

(v) özelliği hariç yukarıdaki özelliklerin hepsi yakınlık bağıntısının tanımından hemen elde edilir.

(v) özelliği için $A \not\delta B$ olsun. O zaman $D(A,B) = \varepsilon > 0$ dır.

$E = \{ x \in X \mid D(x,B) \le \frac{\varepsilon}{2} \}$ olduğunda $D(A,E) \ge \frac{\varepsilon}{2}$ ve $D(X-E,B) \ge \frac{\varepsilon}{2}$ bulunur. Buradan $A \not\delta E$ ve $(X-E) \not\delta B$ elde edilir.



Şekil 1.1. (v) özelliğini sağlayan bir E alt cümlesi

Yukarıda verilenlerden sonra proximity uzayın tanımını verebiliriz:

Tanım 1.1.2 *(Proximity Uzay).*

$X \neq \emptyset$ bir cümle olsun. X'in kuvvet cümlesi üzerindeki bir δ ikili bağıntısına, eğer aşağıdaki aksiyomları sağlarsa X üzerinde bir *(Efremovič) proximity* denir. (X,δ) çiftine de *proximity uzay* adı verilir [24].

$P_1)$ $A \delta B \Rightarrow B \delta A$

$P_2)$ $(A \cup B) \delta C \Leftrightarrow A \delta C \vee B \delta C$

$P_3)$ $A \delta B \Rightarrow A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$

$P_4)$ $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \delta B$

$P_5)$ $A \not\delta B \Rightarrow A \not\delta E$ ve $(X-E) \not\delta B$ olacak şekilde bir E alt cümlesi vardır.

Ayrıca proximity bağıntılar aşağıdaki aksiyomu da sağlarsa *ayrılmış (seperated) (ya da Hausdorff) proximity* adını alır.

$P_6)$ $\{x\} \delta \{y\} \Rightarrow x = y$ dir.

Tanım 1.1.3 *(Metrik (Pseudo-metrik) proximity).*

Eğer proximity, bir metrikten (pseudo-metrikten) elde edilmiş ise o proximity'ye *metrik (pseudo-metrik) proximity* adı verilir.

Not 1.1.1. Yukarıdaki aksiyomlar Efremovič'in orijinal aksiyomlarına denk olmasına rağmen farklıdır. Aksiyomları bu şekilde yazmamızın sebebi genelleştirilmiş proximity'lere geçişte kolaylık sağlamasıdır.

Sonraki bölümlerde, A'nın kapanışı $\overline{A} = \{x \mid x \delta A\}$ cümlesi şeklinde tanımlandığında, X üzerindeki bir δ proximity'sinin X üzerinde bir topoloji $(\tau = \tau(\delta))$ üreteceği gösterilecektir ve bu topolojinin her zaman tamamen regüler olduğu görülecektir. Gerçekten T_1 ayırma aksiyomuna denk olan P_6 aksiyomu sağlandığında, topoloji her zaman Tychonoff olur. Tersine, (X, τ) herhangi bir tamamen regüler topolojik uzay ise o zaman da $\tau(\delta) = \tau$ olacak şekilde X üzerinde bir δ proximity'si mevcuttur.

δ^*, $P_2 - P_5$ aksiyomlarını ve

$$P_{2^*}) \quad A\delta^*(B \cup C) \Leftrightarrow A\delta^*B \vee A\delta^*C$$

aksiyomunu sağlayan X'in kuvvet cümlesi üzerinde bir ikili bağıntı olsun. Eğer A'nın kapanışı $\overline{A} = \{x \mid x \delta^* A\}$ cümlesi şeklinde tanımlanırsa δ^*, X üzerinde bir $\tau(\delta^*)$ topolojisi üretir.

δ^* bağıntısı P_1 simetri aksiyomunu da sağlarsa o zaman üretilen topoloji tamamen regüler olur. Böylece P_1 simetri aksiyomunun bir bakıma üretilen topolojinin tamamen regülerliğine denk olduğu görülür.

P_5 aksiyomu proximity uzaylar teorisinde önemli bir rol oynamaktadır. Fakat bazı genelleştirilmiş proximity uzaylarda bu aksiyom ya çıkarılmıştır ya da daha zayıf bir şartla değiştirilmiştir.

Bir küme üzerinde ayrık ve ayrık olmayan topolojiler tanımlanabildiği gibi, ayrık (discrete) ve ayrık olmayan (indiscrete) proximity'ler de mevcuttur.

Tanım 1.1.4 *(Ayrık – Ayrık olmayan proximity).*

Eğer proximity bağıntısı $A\delta_1 B \Leftrightarrow A \cap B \neq \varnothing$ şeklinde tanımlanırsa, δ_1'e X üzerinde *ayrık proximity* denir.

Diğer taraftan eğer X'in boştan farklı her A ve B alt cümleleri için $A\delta_2 B$ oluyorsa, δ_2'ye de *ayrık olmayan proximity* denir.

Tanım 1.1.5 *(İnce – Kaba – Denk proximity).*

δ_1 ve δ_2, X üzerinde iki proximity olsun. Her $A,B \subset X$ için $A\delta_1 B \Rightarrow A\delta_2 B$ ise δ_1, δ_2'den *daha incedir* veya δ_2, δ_1'den *daha kabadır* denir ve $\delta_2 < \delta_1$ ile gösterilir. Eğer $\delta_1 < \delta_2$ ve $\delta_2 < \delta_1$ ise δ_2, δ_1'e *denktir* denir [25].

Tanım 1.1.6 *(Uniform Uzay).*

$X \neq \varnothing$ bir cümle olsun. $X \times X$ kartezyen çarpımının alt cümlelerinin boş olmayan bir U sınıfına, eğer aşağıdaki şartları sağlarsa X üzerinde bir *uniformity* denir [26]. (X,U) çiftine *uniform (düzenli) uzay* ve uniformity'nin elemanlarına da *çevre (entourage)* adı verilir.

$U_1)$ $\forall \mu \in U$ için $\{(x,x) \mid x \in X\} \subseteq \mu$

$U_2)$ $\mu \in U$ ve $\mu \subseteq \omega \subseteq X \times X \Rightarrow \omega \in U$

$U_3)$ $\mu \in U$ ve $\omega \in U \Rightarrow \mu \cap \omega \in U$

$U_4)$ $\mu \in U \Rightarrow \mu^{-1} \in U$

$U_5)$ $\mu \in U \Rightarrow (x,y),(y,z) \in v$ iken $(x,z) \in \mu$ olacak şekilde $v \in U$ vardır

Burada $\{(x,x) \mid x \in X\}$ cümlesine X *'in köşegeni* denir ve Δ_X şeklinde gösterilir. Eğer $\bigcap \{\mu \mid \mu \in U\} = \Delta_X$ sağlanıyorsa U uniformity'sine *ayrılmış (separated) uniformity* denir.

1.2. Proximity Uzay Örnekleri

Bu kısımda çeşitli proximity uzay örnekleri verilmiştir.

Örnek 1.2.1.

(X,τ) tamamen regüler bir uzay olmak üzere, X'in A ve B alt cümleleri fonksiyonel olarak ayrılabilirdir ancak ve ancak $f(A)=0$ ve $f(B)=1$ olacak şekilde sürekli bir $f: X \to [0,1]$ fonksiyonu vardır. Buna göre, X üzerinde bir δ proximity'si aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$A \delta B \Leftrightarrow$ A ve B fonksiyonel olarak ayrılabilirdir.

Örnek 1.2.2.

(X,U) bir uniform uzay olmak üzere, aşağıdaki ifade ile X üzerinde bir proximity tanımlanabilir:

$A \delta B \Leftrightarrow$ Her $\mu \in U$ için aşağıdaki birbirine denk üç şarttan biri (dolayısıyla hepsi) sağlanır:

i) $\mu[A] \cap B \neq \varnothing$

ii) $A \cap \mu[B] \neq \varnothing$

iii) $(A \times B) \cap \mu \neq \varnothing$ dir.

Burada $\mu[A] = \{B \mid (A,B) \in \mu\}$ ve $\mu[B] = \{A \mid (B,A) \in \mu\}$ şeklinde tanımlıdır.

Örnek 1.2.3.

$(X,*,\tau)$ bir topolojik grup ve K da birimin komşuluklar sistemi olsun. O zaman aşağıdaki gibi proximity'ler tanımlayabiliriz:

$A \delta_1 B \Leftrightarrow$ Her $N \in K$ için $NA \cap B \neq \varnothing$ dir.

$A \delta_2 B \Leftrightarrow$ Her $N \in K$ için $AN \cap B \neq \varnothing$ dir.

Genelde δ_1 ve δ_2 proximity'leri birbirinden farklıdır. Ancak X'in değişmeli ya da kompakt olduğu durumlarda denk olur.

Örnek 1.2.4.

Bir metrik uzayda $A\delta B \Leftrightarrow D(A,B)=0$ ile tanımlanan δ bağıntısı bir proximity'dir. Proximity aksiyomlarını sağladığını gösterelim:

(X,d) bir metrik uzay ve $A,B\subset X$ olsun. $D(A,B)=inf\{d(x,y)\,|\,x\in A,\ y\in B\}$ şeklinde tanımlansın.

$P_1)$ $A\delta B \Rightarrow B\delta A$ olduğunu gösterelim:

$A\delta B \Rightarrow D(A,B)=0$ olup metrik uzayın tanımından $D(B,A)=0$ olur. Dolayısıyla $B\delta A$ elde edilir.

$P_2)$ $(A\cup B)\delta C \Leftrightarrow A\delta C\vee B\delta C$ dir. Gerçekten

$$(A\cup B)\delta C \Leftrightarrow D(A\cup B,C)=0=inf\{d(x,y)\,|\,x\in A\cup B,\ y\in C\}$$
$$=0=inf\{d(x,y)\,|\,x\in A\vee x\in B,\ y\in C\}$$
$$=0=inf\{d(x,y)\,|\,x\in A,\ y\in C\}\vee inf\{d(x,y)\,|\,x\in B,\ y\in C\}$$

dir. Buradan $A\delta C\vee B\delta C$ elde edilir.

$P_3)$ $A\delta B \Rightarrow A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing$ olduğunu gösterelim:

$A\delta B \Leftrightarrow D(A,B)=0$ olduğundan $inf\{d(x,y)\,|\,x\in A,\ y\in B\}=0$ dır. Buradan $\exists\, d(x,y)=0$ olup metrik tanımından $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ dir. O halde $\exists x\in A$ ve $\exists y\in B$ vardır. Yani $A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing$ bulunur.

$P_4)$ $A\cap B\neq\varnothing \Rightarrow A\delta B$ olduğunu gösterelim:

$A\cap B\neq\varnothing$ ise $x\in A$ ve $x\in B$ olacak şekilde $\exists\, x\in(A\cap B)$ vardır. Buradan $\exists\, x\in(A\cap B)$ için $d(x,y)=0$ bulunur.
Yani $D(A,B)=inf\{d(x,y)\,|\,x\in A,\ y\in B\}=0$ olur. O halde $A\delta B$ elde edilir.

$P_5)$ $A \not\delta B \Rightarrow A \not\delta E$ ve $(X-E) \not\delta B$ olacak şekilde bir E alt cümlesi vardır.

Gerçekten $A \not\delta B$ olduğunu kabul edelim. O zaman $D(A,B)=\varepsilon>0$ dır. $E=\{x \in X \mid D(x,B) \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$ aldığımızda $D(A,E) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ ve $D(X-E,B) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ bulunur. Buradan $A \not\delta E$ ve $(X-E) \not\delta B$ elde edilir.

Örnek 1.2.5.

Normal bir topolojide proximity, $A \delta B \Leftrightarrow \overline{A} \cap \overline{B} \neq \varnothing$ ile tanımlanır. Proximity aksiyomlarının sağlandığını gösterelim:

$P_1)$ $A \delta B \Rightarrow B \delta A$ dir. Gerçekten

$$A \delta B \Leftrightarrow \overline{A} \cap \overline{B} \neq \varnothing \Leftrightarrow \overline{B} \cap \overline{A} \neq \varnothing \Leftrightarrow B \delta A$$

dır.

$P_2)$ $(A \cup B) \delta C \Leftrightarrow A \delta C \vee B \delta C$ olduğunu gösterelim:

$$(\Rightarrow): (A \cup B) \delta C \Rightarrow (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{C} \neq \varnothing$$

$$\Rightarrow (\overline{A} \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap \overline{C}) \neq \varnothing$$

$$\Rightarrow (\overline{A} \cap \overline{C}) \neq \varnothing \vee (\overline{B} \cap \overline{C}) \neq \varnothing$$

$$\Rightarrow A \delta C \vee B \delta C$$

$$(\Leftarrow): A \delta C \vee B \delta C \Rightarrow (\overline{A} \cap \overline{C}) \neq \varnothing \vee (\overline{B} \cap \overline{C}) \neq \varnothing$$

$$\Rightarrow (\overline{A} \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap \overline{C}) \neq \varnothing$$

$$\Rightarrow (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{C} \neq \varnothing$$

$$\Rightarrow (A \cup B) \delta C$$

elde edilir.

$P_3)$ $A \delta B \Rightarrow A \neq \varnothing \wedge B \neq \varnothing$ olduğunu gösterelim:

$A \delta B$ olsun. $A = \varnothing \wedge B = \varnothing$ kabul edelim. Bu durumda $\overline{A} = \varnothing \wedge \overline{B} = \varnothing$ dir. Buradan $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$ elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. O halde $A \neq \varnothing \wedge B \neq \varnothing$ dir.

$P_4)$ $A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow A \delta B$ dir.

Gerçekten $A \cap B \neq \varnothing$ olsun. O zaman $x \in A \wedge x \in B$ olacak şekilde $\exists x$ vardır. Ayrıca $A \subseteq \overline{A}$ ve $B \subseteq \overline{B}$ olduğundan $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \varnothing$ elde edilir. O halde $A \delta B$ dir.

$P_5)$ $A \delta B \Rightarrow A \delta E$ ve $(X - E) \delta B$ olacak şekilde bir E alt cümlesi vardır.

Bunu göstermek için $A \delta B$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$ dir. Uzay normal ve $\overline{A}, \overline{B}$ kapalı olduğundan $\overline{B} \subseteq E$ ve $\overline{A} \cap \overline{E} = \varnothing$ olacak şekilde bir E açığı mevcuttur. Burada $X - E$ kapalı ve $\overline{B} \subseteq E$ olduğundan $(X - E) \cap \overline{B} = \varnothing$ bulunur. Yani $A \delta E$ ve $(X - E) \delta B$ elde edilir.

Örnek 1.2.6.

$X = \{a, b\}$ olsun. $P(X) = \{X, \varnothing, \{a\}, \{b\}\}$ olur. Buna göre

$$\delta_1 = \{(X, X), (\{a\}, \{a\}), (\{b\}, \{b\}), (X, \{a\}), (\{a\}, X), (X, \{b\}), (\{b\}, X)\}$$

bağıntısı $P_1 - P_5$ aksiyomlarını sağladığından bir proximity'dir. Yani (X, δ_1) bir proximity uzaydır. Ayrıca δ_1 bağıntısı P_6 aksiyomunu da sağladığından ayrılmış (ya da Hausdorff) proximity'dir.

Burada $[P(X) - \{\varnothing\}] \times [P(X) - \{\varnothing\}]$ cümlesini ele aldığımızda $(\{a\}, \{b\}), (\{b\}, \{a\}) \notin \delta_1$'dir ve δ_1 ayrık proximity olur.

δ_1 bağıntısına diğer alt cümleleri de ekleyerek oluşturduğumuz,

$$\delta_2 = \{(X, X), (\{a\}, \{a\}), (\{b\}, \{b\}), (X, \{a\}), (\{a\}, X), (X, \{b\}), (\{b\}, X),$$
$$(\{a\}, \{b\}), (\{b\}, \{a\})\}$$

bağıntısı da benzer şekilde proximity aksiyomlarını sağlar ve (X,δ_2) de bir proximity uzaydır. Fakat P_6 aksiyomunu sağlamadığından ayrılmış proximity değildir.

Burada $\delta_2 = [P(X)-\{\varnothing\}]\times[P(X)-\{\varnothing\}]$ olur ve ayrık olmayan proximity'dir.

Örnek 1.2.7.

$X=\{1,2,3\}$ olsun. $P(X)=\{X,\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}$ olur.

Buna göre aşağıdaki $\delta_n\ (n=1,...,5)$ bağıntıları P_1-P_5 aksiyomlarını sağladıklarından birer proximity'dir. $(X,\delta_n)\ (n=1,...,5)$ uzayları da birer proximity uzaydır.

$$\delta_1=\{(X,X),(\{1\},\{1\}),(\{2\},\{2\}),(\{3\},\{3\}),(\{1,2\},\{1,2\}),(\{2,3\},\{2,3\}),$$
$$(\{1,3\},\{1,3\}),(X,\{1\}),(\{1\},X),(X,\{2\}),(\{2\},X),(X,\{3\}),(\{3\},X),$$
$$(X,\{1,2\}),(\{1,2\},X),(X,\{2,3\}),(\{2,3\},X),(X,\{1,3\}),(\{1,3\},X),$$
$$(\{1\},\{1,2\}),(\{1,2\},\{1\}),(\{1\},\{1,3\}),(\{1,3\},\{1\}),(\{2\},\{1,2\}),(\{1,2\},\{2\}),$$
$$(\{2\},\{2,3\}),(\{2,3\},\{2\}),(\{3\},\{1,3\}),(\{1,3\},\{3\}),(\{3\},\{2,3\}),(\{2,3\},\{3\}),$$
$$(\{1,2\},\{2,3\}),(\{2,3\},\{1,2\}),(\{1,2\},\{1,3\}),(\{1,3\},\{1,2\}),(\{2,3\},\{1,3\}),$$
$$(\{1,3\},\{2,3\})\}$$

olsun. δ_1 bağıntısı P_6 aksiyomunu da sağladığından ayrılmış proximity'dir.

Burada $[P(X)-\{\varnothing\}]\times[P(X)-\{\varnothing\}]$ cümlesini ele aldığımızda

$$(\{1\},\{2\}),(\{2\},\{1\}),(\{1\},\{3\}),(\{3\},\{1\}),(\{2\},\{3\}),(\{3\},\{2\}),$$
$$(\{1\},\{2,3\}),(\{2,3\},\{1\}),(\{2\},\{1,3\}),(\{1,3\},\{2\}),(\{3\},\{1,2\}),(\{1,2\},\{3\})\notin\delta_1$$

olur.

$$\delta_2=\{(X,X),(\{1\},\{1\}),(\{2\},\{2\}),(\{3\},\{3\}),(\{1,2\},\{1,2\}),(\{2,3\},\{2,3\}),$$
$$(\{1,3\},\{1,3\}),(X,\{1\}),(\{1\},X),(X,\{2\}),(\{2\},X),(X,\{3\}),(\{3\},X),$$
$$(X,\{1,2\}),(\{1,2\},X),(X,\{2,3\}),(\{2,3\},X),(X,\{1,3\}),(\{1,3\},X),$$

$(\{1\},\{1,2\}),(\{1,2\},\{1\}),(\{1\},\{1,3\}),(\{1,3\},\{1\}),(\{2\},\{1,2\}),(\{1,2\},\{2\}),$

$(\{2\},\{2,3\}),(\{2,3\},\{2\}),(\{3\},\{1,3\}),(\{1,3\},\{3\}),(\{3\},\{2,3\}),(\{2,3\},\{3\}),$

$(\{1,2\},\{2,3\}),(\{2,3\},\{1,2\}),(\{1,2\},\{1,3\}),(\{1,3\},\{1,2\}),(\{2,3\},\{1,3\}),$

$(\{1,3\},\{2,3\}),(\{1\},\{2\}),(\{2\},\{1\}),(\{1\},\{2,3\}),(\{2,3\},\{1\}),(\{2\},\{1,3\}),$

$(\{1,3\},\{2\})\}$

olarak alalım.

Burada $(\{1\},\{3\}),(\{3\},\{1\}),(\{2\},\{3\}),(\{3\},\{2\}),(\{3\},\{1,2\}),(\{1,2\},\{3\}) \notin \delta_2$ dir.

$\delta_3 = \{(X,X),(\{1\},\{1\}),(\{2\},\{2\}),(\{3\},\{3\}),(\{1,2\},\{1,2\}),(\{2,3\},\{2,3\}),$

$(\{1,3\},\{1,3\}),(X,\{1\}),(\{1\},X),(X,\{2\}),(\{2\},X),(X,\{3\}),(\{3\},X),$

$(X,\{1,2\}),(\{1,2\},X),(X,\{2,3\}),(\{2,3\},X),(X,\{1,3\}),(\{1,3\},X),$

$(\{1\},\{1,2\}),(\{1,2\},\{1\}),(\{1\},\{1,3\}),(\{1,3\},\{1\}),(\{2\},\{1,2\}),(\{1,2\},\{2\}),$

$(\{2\},\{2,3\}),(\{2,3\},\{2\}),(\{3\},\{1,3\}),(\{1,3\},\{3\}),(\{3\},\{2,3\}),(\{2,3\},\{3\}),$

$(\{1,3\},\{2,3\}),(\{1\},\{3\}),(\{3\},\{1\}),(\{1\},\{2,3\}),(\{2,3\},\{1\}),(\{3\},\{1,2\}),$

$(\{1,2\},\{3\})\}$

olsun. Burada $(\{1\},\{2\}),(\{2\},\{1\}),(\{2\},\{3\}),(\{3\},\{2\}),(\{2\},\{1,3\}),(\{1,3\},\{2\}) \notin \delta_3$ tür.

$\delta_4 = \{(X,X),(\{1\},\{1\}),(\{2\},\{2\}),(\{3\},\{3\}),(\{1,2\},\{1,2\}),(\{2,3\},\{2,3\}),$

$(\{1,3\},\{1,3\}),(X,\{1\}),(\{1\},X),(X,\{2\}),(\{2\},X),(X,\{3\}),(\{3\},X),$

$(X,\{1,2\}),(\{1,2\},X),(X,\{2,3\}),(\{2,3\},X),(X,\{1,3\}),(\{1,3\},X),$

$(\{1\},\{1,2\}),(\{1,2\},\{1\}),(\{1\},\{1,3\}),(\{1,3\},\{1\}),(\{2\},\{1,2\}),(\{1,2\},\{2\}),$

$(\{2\},\{2,3\}),(\{2,3\},\{2\}),(\{3\},\{1,3\}),(\{1,3\},\{3\}),(\{3\},\{2,3\}),(\{2,3\},\{3\}),$

$(\{1,3\},\{2,3\}),(\{2\},\{3\}),(\{3\},\{2\}),(\{2\},\{1,3\}),(\{1,3\},\{2\}),(\{3\},\{1,2\}),$

$(\{1,2\},\{3\})\}$

olsun. Burada $(\{1\},\{2\}),(\{2\},\{1\}),(\{1\},\{3\}),(\{3\},\{1\}),(\{1\},\{2,3\}),(\{2,3\},\{1\}) \notin \delta_4$ tür.

$\delta_5 = \{(X,X),(\{1\},\{1\}),(\{2\},\{2\}),(\{3\},\{3\}),(\{1,2\},\{1,2\}),(\{2,3\},\{2,3\}),$

$(\{1,3\},\{1,3\}),(X,\{1\}),(\{1\},X),(X,\{2\}),(\{2\},X),(X,\{3\}),(\{3\},X),$

$(X,\{1,2\}),(\{1,2\},X),(X,\{2,3\}),(\{2,3\},X),(X,\{1,3\}),(\{1,3\},X),$

$(\{1\},\{1,2\}),(\{1,2\},\{1\}),(\{1\},\{1,3\}),(\{1,3\},\{1\}),(\{2\},\{1,2\}),(\{1,2\},\{2\}),$

$(\{2\},\{2,3\}),(\{2,3\},\{2\}),(\{3\},\{1,3\}),(\{1,3\},\{3\}),(\{3\},\{2,3\}),(\{2,3\},\{3\}),$

$(\{1,2\},\{2,3\}),(\{2,3\},\{1,2\}),(\{1,2\},\{1,3\}),(\{1,3\},\{1,2\}),(\{2,3\},\{1,3\}),$

$(\{1,3\},\{2,3\}),(\{1\},\{2\}),(\{2\},\{1\}),(\{1\},\{3\}),(\{3\},\{1\}),(\{2\},\{3\}),(\{3\},\{2\}),$

$(\{1\},\{2,3\}),(\{2,3\},\{1\}),(\{2\},\{1,3\}),(\{1,3\},\{2\}),(\{3\},\{1,2\}),(\{1,2\},\{3\})\}$

olarak alalım. Burada $\delta_5 = [P(X)-\{\varnothing\}]\times[P(X)-\{\varnothing\}]$ dir.

2. BÖLÜM

Bu bölümde bir proximity tarafından üretilen topoloji ve temel özellikleri, alt uzay proximity'si, proximity uzayların çarpımı ve ultrasüzgeçlerin proximity uzaylar teorisindeki karşılığı olan cluster kavramı ele alındı.

2.1. Bir Proximity Tarafından Üretilen Topoloji

Bu bölümde X üzerindeki bir proximity tarafından üretilen topolojiyi ve temel özelliklerini ele alacağız. P_1, P_2 ve P_5 aksiyomlarından elde edilebilen aşağıdaki Yardımcı Teorem'in (i) ve (ii) özellikleri çeşitli ispatlarda kolaylık sağlamaktadır.

Yardımcı Teorem 2.1.1.

i) Eğer $A \delta B$, $A \subset C$ ve $B \subset D$ ise $C \delta D$ olur. Böylece X, boş olmayan her alt cümlesine yakındır [24].

ii) Eğer $A \delta x$ ve $x \delta B$ olacak şekilde bir x varsa $A \delta B$ olur [24].

Teorem 2.1.1. Bir (X, δ) proximity uzayının bir A alt cümlesi kapalıdır ancak ve ancak $x \delta A \Rightarrow x \in A$ şeklinde tanımlanıyorsa, o zaman bu şekilde tanımlanan bütün kapalı cümlelerin tümleyenlerinin sınıfı X üzerinde bir $\tau = \tau(\delta)$ topolojisini verir [24].

İspat: $\varnothing$ ve X'in kapalı cümleler oldukları açıktır. Kabul edelim ki $\{ A_i \mid i \in I \}$ kapalı cümlelerin keyfi bir sınıfı olsun. Eğer $x \delta \bigcap_{i \in I} A_i$ ise o zaman Yardımcı Teorem 2.1.1'den her bir $i \in I$ için $x \delta A_i$ ve böylece her bir A_i kapalı olduğundan her bir $i \in I$

için $x \in A_i$ elde edilir. Buradan $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ bulunur, yani $\bigcap_{i \in I} A_i$ kapalıdır. Son olarak eğer A_1 ve A_2 kapalı ve $x \delta (A_1 \cup A_2)$ ise o zaman P_2 aksiyomundan ya $x \delta A_1$ ya da $x \delta A_2$ dir. A_1 ve A_2 kapalı olduğundan $x \in A_1$ veya $x \in A_2$ bulunur. Yani $x \in (A_1 \cup A_2)$ dir. Böylece $A_1 \cup A_2$ kapalıdır.

Teorem 2.1.2. (X, δ) bir proximity uzay ve $\tau = \tau(\delta)$ olsun. O zaman bir A cümlesinin $\tau -$kapanışı $\overline{A} = \{x \mid x \delta A\}$ şeklinde verilir [24].

İspat: Eğer $\overline{A}$, A ve $A^\delta = \{x \mid x \delta A\}$'yı içeren bütün kapalı cümlelerin kesişimini gösteriyorsa o zaman biz $\overline{A} = A^\delta$ olduğunu göstermeliyiz. Eğer $x \in A^\delta$ ise $x \delta A$ olur ve Yardımcı Teorem 2.1.1'den $x \delta \overline{A}$ bulunur. $\overline{A}$ kapalı olduğundan $x \in \overline{A}$ dır. Böylece $A^\delta \subset \overline{A}$ elde edilir. Ters kapsamayı ispat etmek için A^δ'ın kapalı olduğunu yani $x \delta A^\delta \Rightarrow x \in A^\delta$ ifadesinin sağlandığını ispatlamak yeterlidir. Kabul edelim ki $x \notin A^\delta$ olsun. O zaman $x \not\delta A$ dır. P_5 aksiyomundan $x \not\delta E$ ve $(X - E) \not\delta A$ olacak şekilde bir E cümlesi vardır. Böylece $(X - E)$'nin A'ya yakın hiçbir noktası yoktur, yani $A^\delta \subset E$ dir. Buradan $x \not\delta E \Rightarrow x \not\delta A^\delta$ elde edilir.

Sonuç 2.1.1. G, (X, δ) proximity uzayının bir alt cümlesi olmak üzere, her $x \in G$ için $G \in \tau(\delta) \Leftrightarrow x \not\delta (X - G)$ dir [24].

Sonuç 2.1.2. A ve B bir (X, δ) proximity uzayının alt cümleleri olmak üzere $A \not\delta B$ ise,

$i)$ $\overline{B} \subset (X - A)$

$ii)$ $B \subset (X - A)^o$

dir. Burada kapanış ve iç $\tau(\delta)$'ya göre alınmıştır [24].

İspat: (i) ifadesinin ispatı için $x \notin (X - A)$ olsun. O zaman $x \in A$ dır, yani $x \delta A$ dır. $A \not\delta B$ olduğundan $x \not\delta B$ bulunur. O halde $x \notin \overline{B}$ elde edilir.

(ii) ifadesinin ispatı için $(X-A)^o = X-\overline{A}$ özdeşliğini kullanacağız. $x \notin (X-A)^o$ ise $x \in \overline{A}$ dır. Buradan $x \delta A$ olur ve böylece $x \notin B$ elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.1.2. (X,δ) proximity uzayının A ve B alt cümleleri için $A \delta B \Leftrightarrow \overline{A} \delta \overline{B}$ dır [24]. Burada kapanış $\tau(\delta)$'ya göre alınmıştır.

İspat: Gereklilik Yardımcı Teorem 2.1.1'in aşikâr bir sonucudur. Yeterliliği ispatlamak için $A \delta B$ olduğunu varsayalım. O zaman $A \delta E$ ve $(X-E) \delta B$ olacak şekilde bir E alt cümlesi vardır. Sonuç 2.1.2'den $\overline{B} \subset E$ ve Yardımcı Teorem 2.1.1'den $A \delta E \Rightarrow A \delta \overline{B}$ bulunur. Simetri aksiyomundan $\overline{A} \delta \overline{B}$ elde edilir.

Tanım 2.1.1 *(τ ile uyumlu).*

X cümlesi üzerinde bir τ topolojisi ve bir δ proximity'si tanımlansın ve $\tau = \tau(\delta)$ olsun. Bu takdirde δ proximity'si τ ile *uyumludur (compatible)* denir.

Teorem 2.1.3. (X,τ) tamamen regüler bir uzay olmak üzere "$A \delta B \Leftrightarrow A$ ve B fonksiyonel olarak ayrılabilirdir" şeklinde tanımlanan (Örnek 1.2.1) δ proximity'si τ ile uyumludur. Burada eğer (X,τ) bir Tychonoff (Tamamen regüler + T_1) uzayı ise δ ayrılmış proximity'dir [24].

İspat: δ'nın bir proximity olduğunu göstermek için P_5 aksiyomunu göstermek yeterlidir. Çünkü proximity'nin diğer aksiyomları kolaylıkla gösterilebilir. $A \delta B$ ve f, X'den $[0,1]$'e sürekli bir fonksiyon olmak üzere $f(A)=0$ ve $f(B)=1$ olduğunu varsayalım. $E = \{x \in X \mid \frac{1}{2} \le f(x) \le 1\}$ olsun. O zaman $A \delta E$ ve $(X-E) \delta B$ dir. Örneğin; g, $[0,1]$'den $[0,1]$'e bir dönüşümü göstersin ve

$$g(y) = 2y \quad , \quad 0 \le y \le \frac{1}{2}$$

$$g(y) = 1 \quad , \quad \frac{1}{2} \le y \le 1$$

şeklinde tanımlansın. O zaman g süreklidir, dolayısıyla gf de süreklidir. $gf : X \to [0,1]$ olur. Burada $gf(A) = 0$ ve $gf(E) = 1$ dir.

Şimdi (X,τ) uzayı Tychonoff olduğunda, δ 'nın ayrılmış proximity olacağını görelim.

(X,τ) uzayı T_1 olduğunda, $x \neq y$ ise $x \notin \overline{y}$ dir. Tamamen regüler uzayın tanımından x ve $\overline{y}$ fonksiyonel olarak ayrılabilirdir ve bu da $x \not\delta y$ olmasını gerektirir.

Şimdi de $\tau = \tau(\delta)$ olduğunu gösterelim. $G \in \tau$ ve $x \in G$ olsun. O zaman x, $X - G$ kapalı cümlesinde değildir. $f(x) = 0$ ve $f(X - G) = 1$ olacak şekilde bir $f : X \to [0,1]$ sürekli fonksiyonu vardır. Yani $x \not\delta (X - G)$ dir. Sonuç 2.1.1'den dolayı $G \in \tau(\delta)$ dır.

Tersine eğer $G \in \tau(\delta)$ ve $x \in G$ ise $x \not\delta (X - G)$ dir. Buradan $f(x) = 0$ ve $f(X - G) = 1$ olacak şekilde bir $f : X \to [0,1]$ τ – sürekli fonksiyonu vardır. O halde $f^{-1}([0,\frac{1}{2}))$, x'in G'de içerilen bir τ – açık komşuluğudur. Bundan dolayı $G \in \tau$ elde edilir.

Böylece tamamen regüler her uzay üzerinde, uyumlu bir proximity; her Tychonoff uzayı üzerinde de ayrılmış bir proximity tanımlayabileceğimizi gördük.

Teorem 2.1.3'ün tersi de doğrudur. Yani bir δ proximity'si tarafından üretilen $\tau(\delta)$ topolojisi her zaman tamamen regülerdir. Benzer şekilde ayrılmış bir δ proximity'si tarafından üretilen $\tau(\delta)$ topolojisi de her zaman Tychonoff'tur.

Teorem 2.1.4. $X \neq \varnothing$ bir cümle ve δ, X üzerinde bir proximity olsun. π_1 ve π_2 sırasıyla *1.* ve *2.* izdüşüm fonksiyonu olmak üzere $i = 1$ veya $i = 2$ için;

$$\tau = \{\pi_i[A] \mid A \in \delta\} \cup \{\varnothing\}$$

sınıfı X üzerinde diskre topolojidir.

İspat: $X \neq \varnothing$ bir cümle ve (X,δ) proximity uzay olsun.

$\delta \subseteq [P(X) - \{\varnothing\}] \times [P(X) - \{\varnothing\}]$ olduğunu biliyoruz.

$i=1$ veya $i=2$ için $\tau=\{\pi_i[A] \mid A\in\delta\}\cup\{\varnothing\} = P(X)$ olduğunu göstermeliyiz.

$\forall\ S\in[P(X)-\{\varnothing\}]$ için $X\cap S\neq\varnothing$ dir. P_4 aksiyomu $(A, B\in X$ için $A\cap B\neq\varnothing \Rightarrow (A,B)\in\delta)$ ve simetri aksiyomundan $(X,S),(S,X)\in\delta$ olur. $\pi_1[(S,X)]=S$ veya $\pi_2[(X,S)]=S$ olduğundan $i=1$ veya $i=2$ için $\tau=[P(X)-\{\varnothing\}]\cup\{\varnothing\}=P(X)$ elde edilir.

Aşağıdaki teorem, ince bir proximity yapısının ince bir topoloji ürettiğini göstermektedir.

Teorem 2.1.5.

i) δ_1 ve δ_2 bir X cümlesi üzerinde tanımlanan iki proximity olmak üzere, $\delta_1<\delta_2 \Rightarrow \tau(\delta_1)\subset\tau(\delta_2)$ dir [24].

ii) τ_1 ve τ_2, X üzerinde tamamen regüler iki topoloji ve δ_1, δ_2 de X üzerinde sırasıyla τ_1 ve τ_2'ye göre "$A\not\delta B \Leftrightarrow A$ ve B fonksiyonel olarak ayrılabilirdir" şeklinde tanımlanan iki proximity olmak üzere $\tau_1\subset\tau_2 \Rightarrow \delta_1<\delta_2$ dir [24].

İspat:

i) $A\in\tau(\delta_1)$ olsun. Sonuç 2.1.1'den her $x\in A$ için $x\not\delta_1(X-A)$ bulunur. $\delta_1<\delta_2$ olduğundan her $x\in A$ için $x\not\delta_2(X-A)$ elde edilir. Böylece $A\in\tau(\delta_2)$ olur ve $\tau(\delta_1)\subset\tau(\delta_2)$ elde edilir.

ii) $A\delta_1 B$ ise o zaman $f(A)=0$ ve $f(B)=1$ olacak şekilde bir $f:(X,\tau_1)\to[0,1]$ τ_1-sürekli fonksiyonu vardır. $\tau_1\subset\tau_2$ olduğundan f aynı zamanda bir τ_2-fonksiyondur. Buradan $A\delta_2 B$ bulunur. Böylece $\delta_1<\delta_2$ elde edilir.

2.2. Proximity Uzayların Alt Uzayları

Genel topolojik uzaylarda çalışırken sürekli fonksiyonlar önemli bir rol oynamaktadır. Benzer bir rolü de düzgün (uniform) uzaylarda düzgün (uniformly) sürekli fonksiyonlar

üstlenmiştir. Bu sürekli fonksiyonların proximity uzaylar teorisindeki karşılığı proximity dönüşüm kavramıdır.

Tanım 2.2.1 *(δ – dönüşüm).*

(X,δ_1) ve (Y,δ_2) iki proximity uzay olsun. $f : X \to Y$ fonksiyonuna bir *proximity dönüşüm (δ – dönüşüm)* denir ancak ve ancak

$$A\delta_1 B \Rightarrow f(A)\delta_2 f(B)$$

dir. Buna denk olarak, f bir δ – dönüşümdür ancak ve ancak

$$C\delta_2 D \Rightarrow f^{-1}(C)\delta_1 f^{-1}(D)$$

$$C\ll_2 D \Rightarrow f^{-1}(C)\ll_1 f^{-1}(D)$$

sağlanır [24]. Burada $A\ll_i B \Leftrightarrow A\delta_i(X-B),\ i\in\{1,2\}$ şeklinde tanımlıdır.

Teorem 2.2.1. İki proximity dönüşümün bileşkesi yine bir proximity dönüşümdür.

İspat: (X,δ_1), (Y,δ_2) ve (Z,δ_3) birer proximity uzay olmak üzere $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ de iki proximity dönüşüm olsun. δ – dönüşümün tanımından

$A,B\subseteq X$ için $A\delta_1 B \Rightarrow f(A)\delta_2 f(B)$ ve

$f(A),f(B)\subseteq Y$ olduğundan $f(A)\delta_2 f(B) \Rightarrow g[f(A)]\delta_3 g[f(B)]$ sağlanır.

Buradan $A\delta_1 B \Rightarrow gf(A)\delta_3 gf(B)$ elde edilir. O halde $gf : X \to Z$ bir δ – dönüşümdür.

Teorem 2.2.2. $f : (X,\delta_1) \to (Y,\delta_2)$ proximity dönüşümü $\tau(\delta_1)$ ve $\tau(\delta_2)$'ye göre süreklidir.

İspat: f bir δ – dönüşüm olduğundan $x\delta_1 A \Rightarrow f(x)\delta_2 f(A)$ dır. $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$ ifadesi kullanılarak süreklilik kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 2.2.3. (X,δ_1) ve (Y,δ_2) proximity uzaylar olmak üzere X kompakt ise her $f : X \to Y$ sürekli fonksiyonu bir $\delta-$dönüşümdür.

İspat: A ve B, $A\delta_1 B$ olacak şekilde X'in alt cümleleri ise Teorem 3.1.1'den $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \varnothing$ dir. Buradan $f(\overline{A}) \cap f(\overline{B}) \neq \varnothing$, yani $f(\overline{A})\delta_2 f(\overline{B})$ bulunur. f sürekli olduğundan $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ ve $f(\overline{B}) \subset \overline{f(B)}$ dan $\overline{f(A)}\delta_2 \overline{f(B)}$ elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.1.2'den $f(A)\delta_2 f(B)$ olur. O halde f bir $\delta-$dönüşümdür.

Tanım 2.2.2 *($\delta-$homeomorfizm).*

(X,δ_1) ve (Y,δ_2) iki proximity uzay olsun. (X,δ_1) ve (Y,δ_2) proximal izomorftur (veya $\delta-$homeomorftur) ancak ve ancak f ve f^{-1} proximity dönüşümler olacak şekilde bir $f : X \to Y$ birebir dönüşümü vardır. Böyle bir f dönüşümü *proximity izomorfizm* veya $\delta-$*homeomorfizm* olarak adlandırılır. Ayrıca *equimorfizm* terimi de kullanılır.

Teorem 2.2.2 gereğince proximal izomorf uzaylar homeomorftur fakat homeomorf uzayların proximal izomorf olması gerekmez.

Tanım 2.2.3 *(Proximity invaryant).*

Eğer herhangi bir özellik proximity izomorfizmleri altında korunuyor ise buna bir *proximity invaryant* denir.

Her topolojik invaryantın bir proximity invaryant olduğu açıktır.

Tanım 2.2.4 *(Alt uzay proximity'si).*

(X,δ) bir proximity uzay ve $Y \subset X$ olsun. Y'nin alt cümleleri aynı zamanda X'in de alt cümleleridir. Y'nin A ve B alt cümleleri için

$$A\delta_Y B \Leftrightarrow A\delta B$$

şeklinde tanımlayalım. δ_Y'nin Y üzerinde bir proximity olduğu ve $\tau(\delta_Y)$'nin Y üzerindeki alt uzay topolojisi olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Buna göre δ_Y'ye *alt uzay proximity*'si denir [24].

2.3. Proximity Uzayların Çarpımları

Bu bölümde proximity uzayların $\{(X_\alpha, \delta_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ ailesinin çarpımı üzerinde duracağız.

$X = \bigtimes_{a \in \Lambda} X_a$; her $\alpha \in \Lambda$ için X_α cümlelerinin kartezyen çarpımını göstersin.

X üzerindeki bir δ proximity'si aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

A ve B, X'in alt cümleleri olsunlar. O halde $A \delta B \Leftrightarrow A$ ve B'nin sırasıyla $\{A_i \mid i = 1,...,m\}$ ve $\{B_j \mid j = 1,...,n\}$ sonlu örtülerinin her bir çifti için her bir $\alpha \in \Lambda$ için $P_\alpha[A_i] \, \delta_\alpha \, P_\alpha[B_j]$ olacak şekilde bir A_i ve bir B_j mevcuttur [1]. Burada P_α, X'in X_α üzerine izdüşümüdür.

Teorem 2.3.1. Yukarıdaki gibi tanımlanan δ ikili bağıntısı X çarpım uzayı üzerinde bir proximity'dir. Burada her bir δ_α ayrılmış proximity'dir ancak ve ancak δ ayrılmış proximity'dir [24].

İspat: Proximity aksiyomlarının sağlandığını gösterelim:

$P_1)$ $\forall \alpha \in \Lambda$ için δ_α simetrik olduğundan δ da simetriktir.

$P_2)$ A, B ve C, X'in alt cümleleri olmak üzere $A \delta C$ olsun. $A \cup B$'nin her örtüsü A'nın bir örtüsü olduğundan $(A \cup B) \delta C$ bulunur.

Tersine $A \not\delta C$ ve $B \not\delta C$ olsun. O zaman bazı $\alpha = s_{ij} \in \Lambda$ için $P_\alpha[A_i] \not\delta_\alpha P_\alpha[C_j]$ $(i = 1,...,m$ ve $j = 1,...,n)$ olacak şekilde A ve C'nin sırasıyla $\{A_i \mid i = 1,...,m\}$ ve $\{C_j \mid j = 1,...,n\}$ sonlu örtüleri mevcuttur. Benzer şekilde bazı $\alpha = t_{ik} \in \Lambda$ için

$P_\alpha[A_i]\,\delta_\alpha\,P_\alpha[D_k]$ $(i=m+1,...,m+p$ ve $k=1,...,q)$ olacak şekilde B ve C'nin sırasıyla $\{A_i \mid i=m+1,...,m+p\}$ ve $\{D_k \mid k=1,...,q\}$ sonlu örtüleri vardır.

$\{C_j \cap D_k \mid j=1,...,n\ ;\ k=1,...,q\}$ cümlesi C'nin bir örtüsü ve $\{A_i \mid i=1,...,m+p\}$ cümlesi de $A\cup B$'nin bir örtüsüdür. $\alpha=s_{ij}$ veya $\alpha=t_{ik}$ için $P_\alpha[A_i]\,\delta_\alpha\,P_\alpha[C_j\cap D_k]$ olduğundan $(A\cup B)\,\delta\,C$ elde edilir.

$P_3)$ $A\,\delta\,B$ ise A ve B'nin boş olmadığı kolayca görülebilir.

$P_4)$ $A\cap B\neq\varnothing$ ise o zaman bir $x=(x_\alpha)\in A\cap B$ vardır. A ve B'nin sırasıyla $\{A_i \mid i=1,...,m\}$ ve $\{B_j \mid j=1,...,n\}$ örtülerinin her çifti için, x'i içeren bir A_i ve bir B_j mevcuttur. Açık olarak her $\alpha\in\Lambda$ için $x_\alpha\in P_\alpha[A_i]\cap P_\alpha[B_j]$ dir. Buradan $\alpha\in\Lambda$ için $P_\alpha[A_i]\,\delta_\alpha\,P_\alpha[B_j]$ elde edilir. O halde $A\,\delta\,B$'dir.

$P_5)$ $A\,\delta\,B$ ise en az bir $s=t_{ij}\in\Lambda$ için $P_s[A_i]\,\delta_s\,P_s[B_j]$ $(i=1,...,m$ ve $j=1,...,n)$ olacak şekilde A ve B'nin sırasıyla $\{A_i \mid i=1,...,m\}$ ve $\{B_j \mid j=1,...,n\}$ örtüleri mevcuttur. Her $\alpha\in\Lambda$ için (X_α,δ_α) proximity uzay olduğundan $P_s[A_i]\,\delta_s\,E_{ij}$ ve $(X_s-E_{ij})\,\delta_s\,P_s[B_j]$ olacak şekilde E_{ij} vardır.

$E_j=\bigcap_{i=1}^{m}P_s^{-1}[E_{ij}]$ ve $E=\bigcup_{j=1}^{n}E_j$ diyelim. $P_s[E_j]\subset E_{ij}$ olduğundan $s=t_{ij}$ için $P_s[A_i]\,\delta_s\,P_s[E_j]$ bulunur, yani $A\,\delta\,E$ elde edilir.

$D_{ij}=(X-P_s^{-1}[E_{ij}])=P_s^{-1}[X_s-E_{ij}]$ ve $F_j=(X-E_j)=\bigcup_{i=1}^{m}D_{ij}$ olsun. O zaman $(X-E)=\bigcap_{j=1}^{n}F_j$ olur.

$(X_s-E_{ij})\,\delta_s\,B_j$ ve $D_{ij}=P_s^{-1}(X_s-E_{ij})$ olduğundan her i ve j için $B_j\,\delta\,D_{ij}$ bulunur ve her j için $B_j\,\delta\,F_j$ olur. Böylece her j için $(X-E)\,\delta\,B_j$ elde edilir. Bu da $(X-E)\,\delta\,B$ olduğunu gösterir.

P_6) δ ayrılmış proximity ve X_α'daki x_α, y_α noktaları için $x_\alpha \delta_\alpha y_\alpha$ olsun. O zaman $\lambda = \alpha$ hariç her $\lambda \in \Lambda$ için $x = (x_\lambda)$ ve $y = (y_\lambda)$ olacak şekilde X'de iki nokta mevcuttur. Yani $x_\alpha = y_\alpha$ olur. Bu da δ_α'nın ayrılmış olduğunu gösterir.

Tersine, $x = (x_\alpha) \delta y = (y_\alpha)$ ise her $\alpha \in \Lambda$ için $x_\alpha \delta_\alpha y_\alpha$ dır. Eğer her bir δ_α ayrılmış ise her $\alpha \in \Lambda$ için $x_\alpha = y_\alpha$ dır. Yani $x = y$ dir.

Örnek 2.3.1.

(X_1, δ_1) ve (X_2, δ_2) iki proximity uzay olsun.

$X_1 = \{1,2\}$ ve $X_2 = \{a,b\}$ alalım. $X = X_1 \times X_2$ olmak üzere

$X = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$ bulunur. Buna göre $P(X)$ kuvvet cümlesini yazalım:

$$P(X) = \{X, \varnothing, \{(1,a)\}, \{(1,b)\}, \{(2,a)\}, \{(2,b)\}, \{(1,a),(1,b)\},$$
$$\{(1,a),(2,a)\}, \{(1,a),(2,b)\}, \{(1,b),(2,a)\}, \{(1,b),(2,b)\},$$
$$\{(2,a),(2,b)\}, \{(1,a),(1,b),(2,a)\}, \{(1,a),(1,b),(2,b)\},$$
$$\{(1,a),(2,a),(2,b)\}, \{(1,b),(2,a),(2,b)\}\}$$

dir. Ayrıca X_1 ve X_2 üzerindeki proximity'ler sırasıyla

$$\delta_1 = \{(X_1,X_1),(\{1\},\{1\}),(\{2\},\{2\}),(X_1,\{1\}),(\{1\},X_1),(X_1,\{2\}),(\{2\},X_1)\}$$

$$\delta_2 = \{(X_2,X_2),(\{a\},\{a\}),(\{b\},\{b\}),(X_2,\{a\}),(\{a\},X_2),(X_2,\{b\}),(\{b\},X_2)\}$$

şeklinde verilsin.

Özel olarak $P(X)$'in boştan farklı $A = \{(1,a),(2,a)\}$ ve $B = \{(1,b),(2,a),(2,b)\}$ alt cümlelerini alalım. Buna göre $A \delta B$ midir? Bunu gösterelim.

$A \delta B \Leftrightarrow A$ ve B'nin sırasıyla $\{A_i \mid i = 1,...,m\}$ ve $\{B_j \mid j = 1,...,n\}$ sonlu örtülerinin her bir çifti için her bir $\alpha \in \Lambda$ için $P_\alpha[A_i] \delta_\alpha P_\alpha[B_j]$ olacak şekilde bir A_i ve B_j mevcuttur. Bu tanıma göre

$A_1 = \{(1,a)\}$ ve $A_2 = \{(2,a)\}$ olmak üzere $\{A_1, A_2\}$ sınıfı A 'nın bir örtüsüdür.

Benzer şekilde $B_1 = \{(1,b)\}$, $B_2 = \{(2,a)\}$ ve $B_3 = \{(2,b)\}$ olmak üzere $\{B_1, B_2, B_3\}$ sınıfı da B 'nin bir örtüsüdür.

$P_1 : X \to X_1$ ve $P_2 : X \to X_2$ izdüşüm fonksiyonları olmak üzere $\forall \alpha \in \{1,2\}$ için $P_\alpha[A_i]\, \delta_\alpha\, P_\alpha[B_j]$ olacak şekilde bir A_i ve B_j var mıdır? Gösterelim.

i) $A_1 = \{(1,a)\}$ ve $B_1 = \{(1,b)\}$ için

$P_1[A_1]\, \delta_1\, P_1[B_1]$ olup olmadığını gösterelim. $P_1[A_1] = \{1\}$ ve $P_1[B_1] = \{1\}$ dir. $\{1\}\delta_1\{1\}$ olduğundan $P_1[A_1]\, \delta_1\, P_1[B_1]$ elde edilir.
$P_2[A_1]\, \delta_2\, P_2[B_1]$ olup olmadığını gösterelim. $P_2[A_1] = \{a\}$ ve $P_2[B_1] = \{b\}$ dir. $\{a\}\delta_2\{b\}$ olduğundan $P_2[A_1]\, \delta_2\, P_2[B_1]$ bulunur.

ii) $A_1 = \{(1,a)\}$ ve $B_2 = \{(2,a)\}$ için

$P_1[A_1]\, \delta_1\, P_1[B_2]$ olup olmadığını gösterelim. $P_1[A_1] = \{1\}$ ve $P_1[B_2] = \{2\}$ dir. $\{1\}\delta_1\{2\}$ olduğundan $P_1[A_1]\, \delta_1\, P_1[B_2]$ elde edilir.
$P_2[A_1]\, \delta_2\, P_2[B_2]$ olup olmadığını gösterelim. $P_2[A_1] = \{a\}$ ve $P_2[B_2] = \{a\}$ dir. $\{a\}\delta_2\{a\}$ olduğundan $P_2[A_1]\, \delta_2\, P_2[B_2]$ bulunur.

iii) $A_1 = \{(1,a)\}$ ve $B_3 = \{(2,b)\}$ için

$P_1[A_1]\, \delta_1\, P_1[B_3]$ olup olmadığını gösterelim. $P_1[A_1] = \{1\}$ ve $P_1[B_3] = \{2\}$ dir. $\{1\}\delta_1\{2\}$ olduğundan $P_1[A_1]\, \delta_1\, P_1[B_3]$ elde edilir.
$P_2[A_1]\, \delta_2\, P_2[B_3]$ olup olmadığını gösterelim. $P_2[A_1] = \{a\}$ ve $P_2[B_3] = \{b\}$ dir. $\{a\}\delta_2\{b\}$ olduğundan $P_2[A_1]\, \delta_2\, P_2[B_3]$ bulunur.

iv) $A_2 = \{(2,a)\}$ ve $B_1 = \{(1,b)\}$ için

$P_1[A_2]\,\delta_1\,P_1[B_1]$ olup olmadığını gösterelim. $P_1[A_2]=\{2\}$ ve $P_1[B_1]=\{1\}$ dir. $\{2\}\not\delta_1\{1\}$ olduğundan $P_1[A_2]\not\delta_1 P_1[B_1]$ elde edilir.

$P_2[A_2]\,\delta_2\,P_2[B_1]$ olup olmadığını gösterelim. $P_2[A_2]=\{a\}$ ve $P_2[B_1]=\{b\}$ dir. $\{a\}\not\delta_2\{b\}$ olduğundan $P_2[A_2]\not\delta_2 P_2[B_1]$ bulunur.

v) $A_2=\{(2,a)\}$ ve $B_2=\{(2,a)\}$ için

$P_1[A_2]\,\delta_1\,P_1[B_2]$ olup olmadığını gösterelim. $P_1[A_2]=\{2\}$ ve $P_1[B_2]=\{2\}$ dir. $\{2\}\delta_1\{2\}$ olduğundan $P_1[A_2]\,\delta_1\,P_1[B_2]$ elde edilir.

$P_2[A_2]\,\delta_2\,P_2[B_2]$ olup olmadığını gösterelim. $P_2[A_2]=\{a\}$ ve $P_2[B_2]=\{a\}$ dir. $\{a\}\delta_2\{a\}$ olduğundan $P_2[A_2]\,\delta_2\,P_2[B_2]$ bulunur.

vi) $A_2=\{(2,a)\}$ ve $B_3=\{(2,b)\}$ için

$P_1[A_2]\,\delta_1\,P_1[B_3]$ olup olmadığını gösterelim. $P_1[A_2]=\{2\}$ ve $P_1[B_3]=\{2\}$ dir. $\{2\}\delta_1\{2\}$ olduğundan $P_1[A_2]\,\delta_1\,P_1[B_3]$ elde edilir.

$P_2[A_2]\,\delta_2\,P_2[B_3]$ olup olmadığını gösterelim. $P_2[A_2]=\{a\}$ ve $P_2[B_3]=\{b\}$ dir. $\{a\}\not\delta_2\{b\}$ olduğundan $P_2[A_2]\not\delta_2 P_2[B_3]$ bulunur.

(v)'teki sonuçtan dolayı $\forall\alpha\in\{1,2\}$ için $P_\alpha[A_2]\,\delta_\alpha\,P_\alpha[B_2]$ sağlanır. O halde $A\,\delta\,B$ dir.

Örnek 2.3.2.

Örnek 2.3.1.'de aldığımız A ve B cümlelerini değiştirelim. Bu kez $P(X)$'in $A=\{(1,a),(2,b)\}$ ve $B=\{(1,b),(2,a)\}$ alt cümlelerini alalım. Buna göre $A\,\delta\,B$ midir?

Benzer şekilde $A_1=\{(1,a)\}$ ve $A_2=\{(2,b)\}$ olmak üzere $\{A_1,A_2\}$ sınıfı A'nın bir örtüsüdür. $B_1=\{(1,b)\}$ ve $B_2=\{(2,a)\}$ olmak üzere $\{B_1,B_2\}$ sınıfı da B'nin bir örtüsüdür.

$P_1 : X \to X_1$ ve $P_2 : X \to X_2$ izdüşüm fonksiyonları olmak üzere $\forall \alpha \in \{1,2\}$ için $P_\alpha[A_i]\,\delta_\alpha\, P_\alpha[B_j]$ olacak şekilde bir A_i ve B_j var mıdır? Gösterelim.

i) $A_1 = \{(1,a)\}$ ve $B_1 = \{(1,b)\}$ için

$P_1[A_1]\,\delta_1\, P_1[B_1]$ olup olmadığını gösterelim. $P_1[A_1] = \{1\}$ ve $P_1[B_1] = \{1\}$ dir. $\{1\}\delta_1\{1\}$ olduğundan $P_1[A_1]\,\delta_1\, P_1[B_1]$ elde edilir.

$P_2[A_1]\,\delta_2\, P_2[B_1]$ olup olmadığını gösterelim. $P_2[A_1] = \{a\}$ ve $P_2[B_1] = \{b\}$ dir. $\{a\}\delta_2\{b\}$ olduğundan $P_2[A_1]\,\delta_2\, P_2[B_1]$ bulunur.

ii) $A_1 = \{(1,a)\}$ ve $B_2 = \{(2,a)\}$ için

$P_1[A_1]\,\delta_1\, P_1[B_2]$ olup olmadığını gösterelim. $P_1[A_1] = \{1\}$ ve $P_1[B_2] = \{2\}$ dir. $\{1\}\delta_1\{2\}$ olduğundan $P_1[A_1]\,\delta_1\, P_1[B_2]$ elde edilir.

$P_2[A_1]\,\delta_2\, P_2[B_2]$ olup olmadığını gösterelim. $P_2[A_1] = \{a\}$ ve $P_2[B_2] = \{a\}$ dir. $\{a\}\delta_2\{a\}$ olduğundan $P_2[A_1]\,\delta_2\, P_2[B_2]$ bulunur.

iii) $A_2 = \{(2,b)\}$ ve $B_1 = \{(1,b)\}$ için

$P_1[A_2]\,\delta_1\, P_1[B_1]$ olup olmadığını gösterelim. $P_1[A_2] = \{2\}$ ve $P_1[B_1] = \{1\}$ dir. $\{2\}\delta_1\{1\}$ olduğundan $P_1[A_2]\,\delta_1\, P_1[B_1]$ elde edilir.

$P_2[A_2]\,\delta_2\, P_2[B_1]$ olup olmadığını gösterelim. $P_2[A_2] = \{b\}$ ve $P_2[B_1] = \{b\}$ dir. $\{b\}\delta_2\{b\}$ olduğundan $P_2[A_2]\,\delta_2\, P_2[B_1]$ bulunur.

iv) $A_2 = \{(2,b)\}$ ve $B_2 = \{(2,a)\}$ için

$P_1[A_2]\,\delta_1\, P_1[B_2]$ olup olmadığını gösterelim. $P_1[A_2] = \{2\}$ ve $P_1[B_2] = \{2\}$ dir. $\{2\}\delta_1\{2\}$ olduğundan $P_1[A_2]\,\delta_1\, P_1[B_2]$ elde edilir.

$P_2[A_2]\,\delta_2\, P_2[B_2]$ olup olmadığını gösterelim. $P_2[A_2] = \{b\}$ ve $P_2[B_2] = \{a\}$ dir. $\{b\}\delta_2\{a\}$ olduğundan $P_2[A_2]\,\delta_2\, P_2[B_2]$ bulunur.

O halde $\forall \alpha \in \{1,2\}$ için $P_\alpha[A_i]\,\delta_\alpha\,P_\alpha[B_j]$ olacak şekilde bir A_i ve B_j çifti bulunamaz. Yani $A \not\delta B$ dir.

Örnek 2.3.3.

Bu örnekte de üç proximity uzayın çarpımını inceleyelim.

(X_1,δ_1), (X_2,δ_2) ve (X_3,δ_3) proximity uzaylar olsun.

$X_1=\{1,2\}$, $X_2=\{a,b,c\}$ ve $X_3=\{x,y\}$ alalım. $X=X_1\times X_2\times X_3$ olmak üzere

$$X=\{(1,a,x),(1,a,y),(1,b,x),(1,b,y),(1,c,x),(1,c,y),$$
$$(2,a,x),(2,a,y),(2,b,x),(2,b,y),(2,c,x),(2,c,y)\}$$

bulunur. Buna göre $s[P(X)]=2^{12}$ olduğundan kuvvet cümlesinin bir kısmını yazalım:

$$P(X)=\{X,\varnothing,\{(1,a,x)\},\{(1,a,y)\},\{(1,b,x)\},.....,\{(2,c,y)\},$$
$$\{(1,a,x),(1,a,y)\},\{(1,a,x),(1,b,x)\},.....,\{(2,c,x),(2,c,y)\},$$
$$\{(1,a,x),(1,a,y),(1,b,x)\},.....,\{(1,a,x),(1,b,x),(2,a,x)\},.....,$$
$$\{(1,a,y),(1,b,y),(1,c,x),(2,b,y),(2,c,y)\},.....\}$$

olur. Ayrıca X_1, X_2 ve X_3 üzerindeki proximity'ler sırasıyla

$$\delta_1=\{(X_1,X_1),(\{1\},\{1\}),(\{2\},\{2\}),(X_1,\{1\}),(\{1\},X_1),(X_1,\{2\}),(\{2\},X_1),$$
$$(\{1\},\{2\}),(\{2\},\{1\})\}$$

$$\delta_2=\{(X_2,X_2),(\{a\},\{a\}),(\{b\},\{b\}),(\{c\},\{c\}),(\{a,b\},\{a,b\}),(\{b,c\},\{b,c\}),$$
$$(\{a,c\},\{a,c\}),(X_2,\{a\}),(\{a\},X_2),(X_2,\{b\}),(\{b\},X_2),(X_2,\{c\}),(\{c\},X_2),$$
$$(X_2,\{a,b\}),(\{a,b\},X_2),(X_2,\{b,c\}),(\{b,c\},X_2),(X_2,\{a,c\}),(\{a,c\},X_2),$$
$$(\{a\},\{a,b\}),(\{a,b\},\{a\}),(\{a\},\{a,c\}),(\{a,c\},\{a\}),(\{b\},\{a,b\}),(\{a,b\},\{b\}),$$
$$(\{b\},\{b,c\}),(\{b,c\},\{b\}),(\{c\},\{a,c\}),(\{a,c\},\{c\}),(\{c\},\{b,c\}),(\{b,c\},\{c\}),$$
$$(\{a,b\},\{b,c\}),(\{b,c\},\{a,b\}),(\{a,b\},\{a,c\}),(\{a,c\},\{a,b\}),(\{b,c\},\{a,c\}),$$

$(\{a,c\},\{b,c\}),(\{a\},\{c\}),(\{c\},\{a\}),(\{a\},\{b,c\}),(\{b,c\},\{a\}),(\{c\},\{a,b\}),$

$(\{a,b\},\{c\})\}$

$\delta_3 = \{(X_3, X_3),(\{x\},\{x\}),(\{y\},\{y\}),(X_3,\{x\}),(\{x\}, X_3),(X_3,\{y\}),(\{y\}, X_3)\}$

şeklinde verilsin.

Özel olarak $P(X)$'in boştan farklı $A = \{(1,a,x),(1,b,x),(2,a,x)\}$ ve $B = \{(1,a,y),(1,b,y),(1,c,x),(2,b,y),(2,c,y)\}$ alt cümlelerini alalım. Buna göre $A \delta B$ midir? Bunu gösterelim.

$A \delta B \Leftrightarrow A$ ve B'nin sırasıyla $\{A_i \mid i = 1,...,m\}$ ve $\{B_j \mid j = 1,...,n\}$ sonlu örtülerinin her bir çifti için her bir $\alpha \in \Lambda$ için $P_\alpha[A_i] \delta_\alpha P_\alpha[B_j]$ olacak şekilde bir A_i ve B_j mevcuttur.

$A_1 = \{(1,a,x)\}$, $A_2 = \{(1,b,x)\}$ ve $A_3 = \{(2,a,x)\}$ olmak üzere $\{A_1, A_2, A_3\}$ sınıfı A'nın bir örtüsüdür.

Benzer şekilde $B_1 = \{(1,a,y)\}$, $B_2 = \{(1,b,y)\}$, $B_3 = \{(1,c,x)\}$, $B_4 = \{(2,b,y)\}$ ve $B_5 = \{(2,c,y)\}$ olmak üzere $\{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$ sınıfı da B'nin bir örtüsüdür.

$P_1 : X \to X_1$, $P_2 : X \to X_2$ ve $P_3 : X \to X_3$ izdüşüm fonksiyonları olmak üzere $\forall \alpha \in \{1,2,3\}$ için $P_\alpha[A_i] \delta_\alpha P_\alpha[B_j]$ olacak şekilde bir A_i ve B_j var mıdır? Gösterelim.

i) $A_1 = \{(1,a,x)\}$ ve $B_1 = \{(1,a,y)\}$ için

$P_1[A_1] \delta_1 P_1[B_1]$ olup olmadığını gösterelim. $P_1[A_1] = \{1\}$ ve $P_1[B_1] = \{1\}$ dir. $\{1\} \delta_1 \{1\}$ olduğundan $P_1[A_1] \delta_1 P_1[B_1]$ elde edilir.

$P_2[A_1] \delta_2 P_2[B_1]$ olup olmadığını gösterelim. $P_2[A_1] = \{a\}$ ve $P_2[B_1] = \{a\}$ dir. $\{a\} \delta_2 \{a\}$ olduğundan $P_2[A_1] \delta_2 P_2[B_1]$ bulunur.

$P_3[A_1]\,\delta_3\,P_3[B_1]$ olup olmadığını gösterelim. $P_3[A_1]=\{x\}$ ve $P_3[B_1]=\{y\}$ dir. $\{x\}\not\delta_3\{y\}$ olduğundan $P_3[A_1]\not\delta_3\,P_3[B_1]$ elde edilir.

ii) $A_1=\{(1,a,x)\}$ ve $B_2=\{(1,b,y)\}$ için

$P_1[A_1]\,\delta_1\,P_1[B_2]$ olup olmadığını gösterelim. $P_1[A_1]=\{1\}$ ve $P_1[B_2]=\{1\}$ dir. $\{1\}\delta_1\{1\}$ olduğundan $P_1[A_1]\,\delta_1\,P_1[B_2]$ elde edilir.

$P_2[A_1]\,\delta_2\,P_2[B_2]$ olup olmadığını gösterelim. $P_2[A_1]=\{a\}$ ve $P_2[B_2]=\{b\}$ dir. $\{a\}\not\delta_2\{b\}$ olduğundan $P_2[A_1]\not\delta_2\,P_2[B_2]$ bulunur.

$P_3[A_1]\,\delta_3\,P_3[B_2]$ olup olmadığını gösterelim. $P_3[A_1]=\{x\}$ ve $P_3[B_2]=\{y\}$ dir. $\{x\}\not\delta_3\{y\}$ olduğundan $P_3[A_1]\not\delta_3\,P_3[B_2]$ elde edilir.

iii) $A_1=\{(1,a,x)\}$ ve $B_3=\{(1,c,x)\}$ için

$P_1[A_1]\,\delta_1\,P_1[B_3]$ olup olmadığını gösterelim. $P_1[A_1]=\{1\}$ ve $P_1[B_3]=\{1\}$ dir. $\{1\}\delta_1\{1\}$ olduğundan $P_1[A_1]\,\delta_1\,P_1[B_3]$ elde edilir.

$P_2[A_1]\,\delta_2\,P_2[B_3]$ olup olmadığını gösterelim. $P_2[A_1]=\{a\}$ ve $P_2[B_3]=\{c\}$ dir. $\{a\}\delta_2\{c\}$ olduğundan $P_2[A_1]\,\delta_2\,P_2[B_3]$ bulunur.

$P_3[A_1]\,\delta_3\,P_3[B_3]$ olup olmadığını gösterelim. $P_3[A_1]=\{x\}$ ve $P_3[B_3]=\{x\}$ dir. $\{x\}\delta_3\{x\}$ olduğundan $P_3[A_1]\,\delta_3\,P_3[B_3]$ elde edilir.

iv) $A_1=\{(1,a,x)\}$ ve $B_2=\{(2,b,y)\}$ için

$P_1[A_1]\,\delta_1\,P_1[B_4]$ olup olmadığını gösterelim. $P_1[A_1]=\{1\}$ ve $P_1[B_4]=\{2\}$ dir. $\{1\}\delta_1\{2\}$ olduğundan $P_1[A_1]\,\delta_1\,P_1[B_4]$ elde edilir.

$P_2[A_1]\,\delta_2\,P_2[B_4]$ olup olmadığını gösterelim. $P_2[A_1]=\{a\}$ ve $P_2[B_4]=\{b\}$ dir. $\{a\}\not\delta_2\{b\}$ olduğundan $P_2[A_1]\not\delta_2\,P_2[B_4]$ bulunur.

$P_3[A_1]\,\delta_3\,P_3[B_4]$ olup olmadığını gösterelim. $P_3[A_1]=\{x\}$ ve $P_3[B_4]=\{y\}$ dir. $\{x\}\not\delta_3\{y\}$ olduğundan $P_3[A_1]\not\delta_3\,P_3[B_4]$ elde edilir.

v) $A_1 = \{(1,a,x)\}$ ve $B_5 = \{(2,c,y)\}$ için

$P_1[A_1]\,\delta_1\,P_1[B_5]$ olup olmadığını gösterelim. $P_1[A_1] = \{1\}$ ve $P_1[B_5] = \{2\}$ dir. $\{1\}\delta_1\{2\}$ olduğundan $P_1[A_1]\,\delta_1\,P_1[B_5]$ elde edilir.

$P_2[A_1]\,\delta_2\,P_2[B_5]$ olup olmadığını gösterelim. $P_2[A_1] = \{a\}$ ve $P_2[B_5] = \{c\}$ dir. $\{a\}\delta_2\{c\}$ olduğundan $P_2[A_1]\,\delta_2\,P_2[B_5]$ bulunur.

$P_3[A_1]\,\delta_3\,P_3[B_5]$ olup olmadığını gösterelim. $P_3[A_1] = \{x\}$ ve $P_3[B_5] = \{y\}$ dir. $\{x\}\delta_3\{y\}$ olduğundan $P_3[A_1]\,\delta_3\,P_3[B_5]$ elde edilir.

vi) $A_2 = \{(1,b,x)\}$ ve $B_1 = \{(1,a,y)\}$ için

$P_1[A_2]\,\delta_1\,P_1[B_1]$ olup olmadığını gösterelim. $P_1[A_2] = \{1\}$ ve $P_1[B_1] = \{1\}$ dir. $\{1\}\delta_1\{1\}$ olduğundan $P_1[A_2]\,\delta_1\,P_1[B_1]$ elde edilir.

$P_2[A_2]\,\delta_2\,P_2[B_1]$ olup olmadığını gösterelim. $P_2[A_2] = \{b\}$ ve $P_2[B_1] = \{a\}$ dir. $\{b\}\delta_2\{a\}$ olduğundan $P_2[A_2]\,\delta_2\,P_2[B_1]$ bulunur.

$P_3[A_2]\,\delta_3\,P_3[B_1]$ olup olmadığını gösterelim. $P_3[A_2] = \{x\}$ ve $P_3[B_1] = \{y\}$ dir. $\{x\}\delta_3\{y\}$ olduğundan $P_3[A_2]\,\delta_3\,P_3[B_1]$ elde edilir.

vii) $A_2 = \{(1,b,x)\}$ ve $B_2 = \{(1,b,y)\}$ için

$P_1[A_2]\,\delta_1\,P_1[B_2]$ olup olmadığını gösterelim. $P_1[A_2] = \{1\}$ ve $P_1[B_2] = \{1\}$ dir. $\{1\}\delta_1\{1\}$ olduğundan $P_1[A_2]\,\delta_1\,P_1[B_2]$ elde edilir.

$P_2[A_2]\,\delta_2\,P_2[B_2]$ olup olmadığını gösterelim. $P_2[A_2] = \{b\}$ ve $P_2[B_2] = \{b\}$ dir. $\{b\}\delta_2\{b\}$ olduğundan $P_2[A_2]\,\delta_2\,P_2[B_2]$ bulunur.

$P_3[A_2]\,\delta_3\,P_3[B_2]$ olup olmadığını gösterelim. $P_3[A_2] = \{x\}$ ve $P_3[B_2] = \{y\}$ dir. $\{x\}\delta_3\{y\}$ olduğundan $P_3[A_2]\,\delta_3\,P_3[B_2]$ elde edilir.

viii) $A_2 = \{(1,b,x)\}$ ve $B_3 = \{(1,c,x)\}$ için

$P_1[A_2]\,\delta_1\,P_1[B_3]$ olup olmadığını gösterelim. $P_1[A_2]=\{1\}$ ve $P_1[B_3]=\{1\}$ dir. $\{1\}\delta_1\{1\}$ olduğundan $P_1[A_2]\,\delta_1\,P_1[B_3]$ elde edilir.

$P_2[A_2]\,\delta_2\,P_2[B_3]$ olup olmadığını gösterelim. $P_2[A_2]=\{b\}$ ve $P_2[B_3]=\{c\}$ dir. $\{b\}\not\delta_2\{c\}$ olduğundan $P_2[A_2]\not\delta_2\,P_2[B_3]$ bulunur.

$P_3[A_2]\,\delta_3\,P_3[B_3]$ olup olmadığını gösterelim. $P_3[A_2]=\{x\}$ ve $P_3[B_3]=\{x\}$ dir. $\{x\}\delta_3\{x\}$ olduğundan $P_3[A_2]\,\delta_3\,P_3[B_3]$ elde edilir.

ix) $A_2=\{(1,b,x)\}$ ve $B_2=\{(2,b,y)\}$ için

$P_1[A_2]\,\delta_1\,P_1[B_4]$ olup olmadığını gösterelim. $P_1[A_2]=\{1\}$ ve $P_1[B_4]=\{2\}$ dir. $\{1\}\delta_1\{2\}$ olduğundan $P_1[A_2]\,\delta_1\,P_1[B_4]$ elde edilir.

$P_2[A_2]\,\delta_2\,P_2[B_4]$ olup olmadığını gösterelim. $P_2[A_2]=\{b\}$ ve $P_2[B_4]=\{b\}$ dir. $\{b\}\delta_2\{b\}$ olduğundan $P_2[A_2]\,\delta_2\,P_2[B_4]$ bulunur.

$P_3[A_2]\,\delta_3\,P_3[B_4]$ olup olmadığını gösterelim. $P_3[A_2]=\{x\}$ ve $P_3[B_4]=\{y\}$ dir. $\{x\}\not\delta_3\{y\}$ olduğundan $P_3[A_2]\not\delta_3\,P_3[B_4]$ elde edilir.

x) $A_2=\{(1,b,x)\}$ ve $B_5=\{(2,c,y)\}$ için

$P_1[A_2]\,\delta_1\,P_1[B_5]$ olup olmadığını gösterelim. $P_1[A_2]=\{1\}$ ve $P_1[B_5]=\{2\}$ dir. $\{1\}\delta_1\{2\}$ olduğundan $P_1[A_2]\,\delta_1\,P_1[B_5]$ elde edilir.

$P_2[A_2]\,\delta_2\,P_2[B_5]$ olup olmadığını gösterelim. $P_2[A_2]=\{b\}$ ve $P_2[B_5]=\{c\}$ dir. $\{b\}\not\delta_2\{c\}$ olduğundan $P_2[A_2]\not\delta_2\,P_2[B_5]$ bulunur.

$P_3[A_2]\,\delta_3\,P_3[B_5]$ olup olmadığını gösterelim. $P_3[A_2]=\{x\}$ ve $P_3[B_5]=\{y\}$ dir. $\{x\}\not\delta_3\{y\}$ olduğundan $P_3[A_2]\not\delta_3\,P_3[B_5]$ elde edilir.

xi) $A_3=\{(2,a,x)\}$ ve $B_1=\{(1,a,y)\}$ için

$P_1[A_3]\,\delta_1\,P_1[B_1]$ olup olmadığını gösterelim. $P_1[A_3]=\{2\}$ ve $P_1[B_1]=\{1\}$ dir. $\{2\}\delta_1\{1\}$ olduğundan $P_1[A_3]\,\delta_1\,P_1[B_1]$ elde edilir.

$P_2[A_3]\,\delta_2\,P_2[B_1]$ olup olmadığını gösterelim. $P_2[A_3]=\{a\}$ ve $P_2[B_1]=\{a\}$ dir. $\{a\}\delta_2\{a\}$ olduğundan $P_2[A_3]\,\delta_2\,P_2[B_1]$ bulunur.

$P_3[A_3]\,\delta_3\,P_3[B_1]$ olup olmadığını gösterelim. $P_3[A_3]=\{x\}$ ve $P_3[B_1]=\{y\}$ dir. $\{x\}\not\delta_3\{y\}$ olduğundan $P_3[A_3]\not\delta_3\,P_3[B_1]$ elde edilir.

xii) $A_3=\{(2,a,x)\}$ ve $B_2=\{(1,b,y)\}$ için

$P_1[A_3]\,\delta_1\,P_1[B_2]$ olup olmadığını gösterelim. $P_1[A_3]=\{2\}$ ve $P_1[B_2]=\{1\}$ dir. $\{2\}\delta_1\{1\}$ olduğundan $P_1[A_3]\,\delta_1\,P_1[B_2]$ elde edilir.

$P_2[A_3]\,\delta_2\,P_2[B_2]$ olup olmadığını gösterelim. $P_2[A_3]=\{a\}$ ve $P_2[B_2]=\{b\}$ dir. $\{a\}\not\delta_2\{b\}$ olduğundan $P_2[A_3]\not\delta_2\,P_2[B_2]$ bulunur.

$P_3[A_3]\,\delta_3\,P_3[B_2]$ olup olmadığını gösterelim. $P_3[A_3]=\{x\}$ ve $P_3[B_2]=\{y\}$ dir. $\{x\}\not\delta_3\{y\}$ olduğundan $P_3[A_3]\not\delta_3\,P_3[B_2]$ elde edilir.

xiii) $A_3=\{(2,a,x)\}$ ve $B_3=\{(1,c,x)\}$ için

$P_1[A_3]\,\delta_1\,P_1[B_3]$ olup olmadığını gösterelim. $P_1[A_3]=\{2\}$ ve $P_1[B_3]=\{1\}$ dir. $\{2\}\delta_1\{1\}$ olduğundan $P_1[A_3]\,\delta_1\,P_1[B_3]$ elde edilir.

$P_2[A_3]\,\delta_2\,P_2[B_3]$ olup olmadığını gösterelim. $P_2[A_3]=\{a\}$ ve $P_2[B_3]=\{c\}$ dir. $\{a\}\delta_2\{c\}$ olduğundan $P_2[A_3]\,\delta_2\,P_2[B_3]$ bulunur.

$P_3[A_3]\,\delta_3\,P_3[B_3]$ olup olmadığını gösterelim. $P_3[A_3]=\{x\}$ ve $P_3[B_3]=\{x\}$ dir. $\{x\}\delta_3\{x\}$ olduğundan $P_3[A_3]\,\delta_3\,P_3[B_3]$ elde edilir.

xiv) $A_3=\{(2,a,x)\}$ ve $B_2=\{(2,b,y)\}$ için

$P_1[A_3]\,\delta_1\,P_1[B_4]$ olup olmadığını gösterelim. $P_1[A_3]=\{2\}$ ve $P_1[B_4]=\{2\}$ dir. $\{2\}\delta_1\{2\}$ olduğundan $P_1[A_3]\,\delta_1\,P_1[B_4]$ elde edilir.

$P_2[A_3]\,\delta_2\,P_2[B_4]$ olup olmadığını gösterelim. $P_2[A_3]=\{a\}$ ve $P_2[B_4]=\{b\}$ dir. $\{a\}\not\delta_2\{b\}$ olduğundan $P_2[A_3]\not\delta_2\,P_2[B_4]$ bulunur.

$P_3[A_3]\,\delta_3\,P_3[B_4]$ olup olmadığını gösterelim. $P_3[A_3]=\{x\}$ ve $P_3[B_4]=\{y\}$ dir. $\{x\}\delta_3\{y\}$ olduğundan $P_3[A_3]\,\delta_3\,P_3[B_4]$ elde edilir.

xv) $A_3=\{(2,a,x)\}$ ve $B_5=\{(2,c,y)\}$ için

$P_1[A_3]\,\delta_1\,P_1[B_5]$ olup olmadığını gösterelim. $P_1[A_3]=\{2\}$ ve $P_1[B_5]=\{2\}$ dir. $\{2\}\delta_1\{2\}$ olduğundan $P_1[A_3]\,\delta_1\,P_1[B_5]$ elde edilir.

$P_2[A_3]\,\delta_2\,P_2[B_5]$ olup olmadığını gösterelim. $P_2[A_3]=\{a\}$ ve $P_2[B_5]=\{c\}$ dir. $\{a\}\delta_2\{c\}$ olduğundan $P_2[A_3]\,\delta_2\,P_2[B_5]$ bulunur.

$P_3[A_3]\,\delta_3\,P_3[B_5]$ olup olmadığını gösterelim. $P_3[A_3]=\{x\}$ ve $P_3[B_5]=\{y\}$ dir. $\{x\}\delta_3\{y\}$ olduğundan $P_3[A_3]\,\delta_3\,P_3[B_5]$ elde edilir.

$\forall\alpha\in\{1,2,3\}$ için $P_\alpha[A_1]\,\delta_\alpha\,P_\alpha[B_3]$ ve $P_\alpha[A_3]\,\delta_\alpha\,P_\alpha[B_3]$ sağlanır. Yani *(iii)* veya *(xiii)*'teki sonuçtan dolayı $A\,\delta\,B$ dir.

2.4. Cluster'lar ve Ultrasüzgeçler

Ultrasüzgeçler topolojik uzaylarda yakınsaklık ve kompaktlık gibi kavramlar kadar önemli rol oynarlar. Bu bölümde ultrasüzgeçlerin proximity uzaylardaki karşılığı olan cluster kavramı üzerinde duracağız. Ultrasüzgeçlerin ve cluster'ların yakından ilişkili olduklarını göstereceğiz ve bu ilişkiyi kullanarak proximity uzaylar teorisinde çeşitli sonuçlar elde edeceğiz.

X'in boş olmayan alt cümlelerinin bir U ailesinin ultrasüzgeç olması için gerek ve yeter koşul

$U_1)$ A ve B, U'ya ait ise $A\cap B\neq\varnothing$ dir.

$U_2)$ $\forall C\in U$ için $A\cap C\neq\varnothing$ ise $A\in U$ dur.

$U_3)$ $(A\cup B)\in U$ ise $A\in U$ veya $B\in U$ dur.

şartlarının sağlanmasıdır.

Bir proximity uzayda, kümelerin sınıfları da U_1, U_2, U_3 şartlarına benzer şartları sağlamaları beklenir. Fakat proximity uzaylarda "boş olmayan arakesit" yerine "yakınlık bağıntısı" alınır. Proximity uzaylar teorisinde önemli bir yere sahip olan cluster kavramını aşağıdaki tanımla verelim:

Tanım 2.4.1 *(Cluster).*

(X,δ) proximity uzayının alt cümlelerinin bir σ sınıfı için eğer

$C_1)$ A ve B, σ'ya ait ise $A\,\delta\,B$ dir.

$C_2)$ $\forall C \in \sigma$ için $A\,\delta\,C$ ise $A \in \sigma$ dır.

$C_3)$ $(A \cup B) \in \sigma$ ise $A \in \sigma$ veya $B \in \sigma$ dır.

şartları sağlanıyorsa σ sınıfına *cluster* adı verilir.

Not 2.4.1.

i) Her $x \in X$ için, $\sigma_x = \{A \subset X \mid A\,\delta\,x\}$ sınıfı bir cluster'dır. Buna nokta cluster denir.

ii) Bazı $x \in X$ için $\{x\} \in \sigma$ ise $\sigma = \sigma_x$ dir. (X,δ) ayrılmış proximity uzay ise $x\,\delta\,y \Rightarrow x = y$ ile çeliştiği için hiçbir cluster birden fazla noktayı içermez. Bu nedenle $x \neq y \Rightarrow \sigma_x \neq \sigma_y$ yazılabilir.

iii) σ, X'de herhangi bir cluster ise C_2'den $X \in \sigma$ dır. Bundan dolayı X'in her E alt kümesi için, ya $E \in \sigma$ ya da $(X - E) \in \sigma$ olur. Zaten bir ultrasüzgeç de bu özelliği sağlar.

iv) $A \in \sigma$ ve $A \subset B$ ise $B \in \sigma$ dır. Bu da ultrasüzgecin bir özelliğidir.

v) σ, X'de herhangi bir cluster ise $A \in \sigma \Leftrightarrow \overline{A} \in \sigma$ olur.

Yardımcı Teorem 2.4.1. σ_1 ve σ_2, (X,δ) proximity uzayında $\sigma_1 \subset \sigma_2$ olacak şekilde iki cluster ise $\sigma_1 = \sigma_2$ dir [24].

İspat: $A \in \sigma_2$ ise her $C \in \sigma_2$ için $A \delta C$ dir. $\sigma_1 \subset \sigma_2$ olduğundan her $B \in \sigma_1$ için $A \delta B$ olur. Buradan $A \in \sigma_1$ elde edilir. Böylece $\sigma_2 \subset \sigma_1$ bulunur. O halde $\sigma_1 = \sigma_2$ dir.

Not 2.4.2.

i) Kompakt bir proximity uzayın iki alt kümesi yakındır ancak ve ancak bu alt kümelerin kapanışlarının kesişimi boştan farklıdır. Bu yüzden kompakt bir tamamen regüler uzay tek bir uyumlu proximity'ye sahiptir.

ii) $A \delta B$ ise A ve B iki cluster'a da ait olacak şekilde farklı σ ve σ' cluster'ları bulunabilir.

Örneğin, $X = \mathbb{R}$'yi alışılmış topoloji ile alalım. $A \delta B \Rightarrow \overline{A} \cap \overline{B} \neq \varnothing$ şeklinde tanımlansın. $A = [0,1]$ ve $B = (0,1)$ ise $A \delta B$ olur ve iki küme de σ_0 ve σ_1 nokta cluster'larına aittir [24].

Tanım 2.4.2 *(Yarı-ultrasüzgeç).*

Bir X kümesinde bir Υ *yarı-ultrasüzgeci*, aşağıdaki şartları sağlayan X'in boş olmayan alt cümlelerinin bir sınıfıdır.

i) $(A \cup B) \in \Upsilon$ ise $A \in \Upsilon \ \vee \ B \in \Upsilon$ dur.

ii) $A \in \Upsilon \ \wedge \ A \subset B$ ise $B \in \Upsilon$ dur.

iii) $\forall S \in \Upsilon$ için $A \cap S \neq \varnothing$ ise $A \in \Upsilon$ dur

iv) $\{x\}$ ve $\{y\}$'nin ikisi de Υ'a ait ise $x = y$ dir.

Her ultrasüzgeç bir yarı-ultrasüzgeçtir ancak bunun tersi doğru değildir. Ayrılmış bir proximity uzaydaki her cluster bir yarı-ultrasüzgeçtir. Bu da bir yarı-ultrasüzgecin bir süzgeç olması gerekmediğini gösterir [24].

Teorem 2.4.1 *(Smirnov Kompaktlaştırması).*

(X, δ) ayrılmış bir proximity uzay olsun ve Ψ de X'deki bütün cluster'ların kümesini göstersin. Buradan Ψ'nin kuvvet kümesi üzerinde bir δ^* ayrılmış proximity'si tanımlanabilir. δ^* tarafından Ψ üzerinde üretilen topoloji τ^* ise (Ψ, τ^*) kompakt olur.

Buna göre, her (X,δ) ayrılmış proximity uzayı tek bir Ψ kompakt Hausdorff uzayının yoğun bir alt uzayıdır. Ψ tek bir uyumlu proximity'ye sahip olduğundan, X'in A ve B alt cümleleri yakındır ancak ve ancak Ψ'de kapanışlarının kesişimi boştan farklıdır.

Ψ'ye, X'in *Smirnov Kompaktlaştırması* adı verilir. Bu teoremin ispatı sıralı yardımcı teoremlerle "Proximity Spaces [24]" kitabında ayrıntılı olarak verilmiştir.

3. BÖLÜM

Bu bölümde bir proximity uzayda $\delta-$komşuluk kavramı yardımıyla proximity'nin alternatif tanımı, proximity uzayların genel formları olan genelleştirilmiş proximity'ler ve proximity uzayların kategorisi olan PROX kategorisi verildi.

3.1. Proximity'nin Alternatif Tanımı

Verilen bir (X,U) uniform uzayı için bir B alt cümlesine A'nın bir uniform komşuluğu denilir ancak ve ancak $\mu[A] \subset B$ olacak şekilde bir $\mu \in U$ çevresi (entourage) vardır [27]. Buna benzer bir kavram da bir proximity uzayda tanımlanabilen $\delta-$komşuluk kavramıdır. Bu komşuluk kavramı proximity uzay çalışmalarına alternatif bir yaklaşım sağlar ve proximity uzaylar teorisinde oldukça kullanışlıdır.

Tanım 3.1.1 *$(\delta-$komşuluk).*

(X,δ) proximity uzayının bir B alt cümlesi, A'nın bir $\delta-$*komşuluğudur* $(A \ll B)$ ancak ve ancak $A \delta (X-B)$ dir.

Yardımcı Teorem 3.1.1. (X,δ) bir proximity uzay olsun. $\overline{A}$ ve B° de $\tau(\delta)$'ya göre sırasıyla A'nın kapanışı ve B'nin içi olsun. O halde

i) $A \ll B \Rightarrow \overline{A} \ll B$

ii) $A \ll B \Rightarrow A \ll B^{\circ}$

sağlanır [24].

Burada $A \subset B^{\circ}$ olduğundan $\delta-$komşuluk, bir topolojik komşuluktur.

İspat:

i) $A \ll B$ olsun. $A \delta (X - B)$ ya da simetri aksiyomundan $(X - B) \delta A$ dır. $(X - B) \delta A$ ise $(X - B) \delta E$ ve $(X - E) \delta A$ olacak şekilde bir E cümlesi vardır. Sonuç 2.1.2'den $\overline{A} \subset E$ bulunur. Yardımcı Teorem 2.1.1 (i)'den $(X - B) \delta E$ ise $(X - B) \delta \overline{A}$ ya da simetri aksiyomundan $\overline{A} \delta (X - B)$ bulunur. Buradan $\overline{A} \ll B$ elde edilir.

ii) $A \ll B$ olsun. $A \delta (X - B)$ dir. Benzer şekilde $A \delta (X - B)$ ise $A \delta E$ ve $(X - E) \delta (X - B)$ olacak şekilde bir E cümlesi vardır. Sonuç 2.1.2'den $\overline{(X - B)} \subset E$ bulunur. Yardımcı Teorem 2.1.1 (i)'den $A \delta E$ ise $A \delta \overline{(X - B)}$ bulunur. Buradan $A \delta (X - B^{\circ})$ ve $A \ll B^{\circ}$ elde edilir.

Aşağıda P_5 aksiyomunun alternatif biçimi verilmiştir. Aksiyomun bu biçimi birçok araştırmacı tarafından kullanılmıştır.

Yardımcı Teorem 3.1.2. P_5 aksiyomu aşağıdaki ifadeye denktir:

$A \delta B$ ise $A \delta (X - C)$, $(X - D) \delta B$ ve $C \delta D$ olacak şekilde C ve D alt cümleleri mevcuttur.

İspat: $(\Leftarrow)$: İlk olarak yeterliliği ispatlayalım. Eğer $C \delta D$ ise $C \subset (X - D)$ olur. $(X - D) \delta B$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.1.1 (i)'den $C \delta B$ bulunur. $E = X - C$ olsun. $C = X - E$ yazabiliriz. O halde $A \delta B$ iken $A \delta E$ ve $(X - E) \delta B$ olacak şekilde bir E cümlesi vardır.

$(\Rightarrow)$: Şimdi de gerekliliği ispatlayalım. Kabulümüzden $A \delta B$ ise $A \delta D$ ve $(X - D) \delta B$ olacak şekilde bir D cümlesi vardır. $A \delta D$ olduğundan $A \delta (X - C)$ ve $C \delta D$ olacak şekilde bir C cümlesi vardır.

Sonuç 3.1.1. $A \delta B$ ise $A \ll C$, $B \ll D$ ve $C \delta D$ olacak şekilde C ve D alt cümleleri vardır. Bu nedenle bir (X, δ) ayrılmış proximity uzayının $\tau(\delta)$ topolojisi Hausdorff'tur.

Yardımcı Teorem 3.1.3. δ, tamamen regüler bir (X,τ) uzayı üzerinde uyumlu bir proximity olsun. Eğer A kompakt, B kapalı ve $A \cap B = \varnothing$ ise, $A \not\delta B$ dir.

İspat: Her $a \in A$ için $a \not\delta B$ dir. Yardımcı Teorem 3.1.1 ve Sonuç 3.1.1'den $N_a \not\delta B$ olacak şekilde a'nın açık bir N_a komşuluğu vardır. $\{N_a \mid a \in A\}$ sınıfı A kompakt cümlesinin bir açık örtüsüdür ve bu örtünün sonlu bir $\{N_{a_i} \mid i = 1,...,n\}$ alt örtüsü mevcuttur. P_2 aksiyomundan $N \not\delta B$ olur. Çünkü burada $N = \bigcup_{i=1}^{n} N_{a_i}$ dir. $A \subset N$ olduğundan $A \not\delta B$ elde edilir.

Tamamen regüler kompakt bir uzay tek bir uyumlu uniformity'ye sahiptir. Proximity uzaylar için de benzer bir teorem verilebilir:

Teorem 3.1.1. Tamamen regüler (Tychonoff) her kompakt uzay, $A \delta B \Leftrightarrow \overline{A} \cap \overline{B} \neq \varnothing$ ile verilen tek bir uyumlu (ayrılmış) proximity'ye sahiptir.

İspat: Eğer δ herhangi bir uyumlu proximity ve $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \varnothing$ ise o zaman P_4 aksiyomu ve Yardımcı Teorem 2.1.2'den $A \delta B$ elde edilir. Bir kompakt uzayın kapalı alt kümeleri de kompakt olduğundan Yardımcı Teorem 3.1.3'ten ispatın diğer tarafı da gerçekleştirilir.

Teorem 3.1.2. (X,δ) bir proximity uzay olmak üzere, $\ll$ bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlar [24]:

i) $X \ll X$

ii) $A \ll B \Rightarrow A \subset B$ dir.

Ayrıca (X,δ) ayrık (discrete) ise tersi de sağlanır.

iii) $A \subset B \ll C \subset D \Rightarrow A \ll D$

iv) $i = 1,...,n$ için $A \ll B_i \Leftrightarrow A \ll \bigcap_{i=1}^{n} B_i$

v) $A \ll B \Rightarrow (X - B) \ll (X - A)$

vi) $A \ll B$ ise $A \ll C \ll B$ olacak şekilde bir C vardır.

Eğer δ ayrılmış bir proximity ise

vii) $\{x\} \ll (X - \{y\}) \Leftrightarrow \{x\} \neq \{y\}$ sağlanır.

İspat:

i) P_3 aksiyomundan $X \,\delta\, \varnothing$ olduğundan $X \ll X$ dir.

ii) $A \,\delta\, (X - B)$ ise $A \cap (X - B) = \varnothing$ dir ve $A \subset B$ elde edilir. Ayrık proximity'de $A \,\delta\, B \Leftrightarrow A \cap B \neq \varnothing$ idi. İspatın ikinci kısmı için $A \subset B$ olsun. $A \cap (X - B) = \varnothing$ dir. δ ayrık proximity olduğundan $A \,\delta\, (X - B)$ bulunur ve $A \ll B$ elde edilir.

iii) $A \not\ll D$ olsun. O zaman $A \,\delta\, (X - D)$ olur. Buradan da $B \,\delta\, (X - C)$ bulunur. $B \,\delta\, (X - C) \Leftrightarrow B \not\ll C$ dir.

iv) $n = 2$ için göstermemiz yeterlidir. Buna göre

$$(A \ll B_1 \wedge A \ll B_2) \Leftrightarrow [A \,\delta\, (X - B_1) \wedge A \,\delta\, (X - B_2)]$$

$$\Leftrightarrow A \,\delta\, [(X - B_1) \cup (X - B_2)]$$

$$\Leftrightarrow A \,\delta\, [X - (B_1 \cap B_2)]$$

$$\Leftrightarrow A \ll (B_1 \cap B_2)$$

olur.

v) $A \ll B$ ise $A \,\delta\, (X - B)$ dir. Simetri özelliğinden $(X - B) \,\delta\, A$ olur ve $(X - B) \ll (X - A)$ elde edilir.

vi) $A \ll B$ ise $A \,\delta\, (X - B)$ dir. P_5 aksiyomundan $A \,\delta\, (X - C)$ ve $C \,\delta\, (X - B)$ olacak şekilde bir $(X - C)$ cümlesi mevcuttur. O halde $A \ll C \ll B$ bulunur.

vii) P_6 aksiyomundan $\{x\} \neq \{y\} \Leftrightarrow \{x\} \,\delta\, \{y\} \Leftrightarrow \{x\} \ll (X - \{y\})$ bulunur.

Sonuç 3.1.2. $i = 1,...,n$ için $A_i \ll B_i$ ise $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \ll \bigcap_{i=1}^{n} B_i$ ve $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \ll \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ sağlanır.

Ayrılmış proximity aksiyomlarının tamamı yukarıdaki ispatlarda kullanılmıştır. Özellikle P_5 aksiyomu ile Teorem 3.1.2 *(vi)* maddesi ve P_6 ile Teorem 3.1.2 *(vii)* maddesinin birbirine denk olduğuna dikkat edelim.

Aşağıdaki teorem, Teorem 3.1.2'nin tersidir.

Teorem 3.1.3. $\ll$, X'in kuvvet kümesi üzerinde Teorem 3.1.2 *(i)−(vi)* maddelerini sağlayan bir ikili bağıntı olsun. δ bağıntısı da $A \delta B \Leftrightarrow A \ll (X - B)$ ile tanımlansın. O zaman δ, X üzerinde bir proximity'dir. B, A'nın bir $\delta-$komşuluğudur ancak ve ancak $A \ll B$ dir. Ayrıca $\ll$ bağıntısı Teorem 3.1.2 *(vii)* maddesini de sağlıyorsa δ ayrılmış proximity olur.

İspat: $(P_1)-(P_6)$ ayrılmış proximity aksiyomlarının sağlandığını gösterelim:

$P_1)$ $A \delta B$ ise $A \ll (X - B)$ dir. Teorem 3.1.2 *(v)*'ten $B \ll (X - A)$ bulunur ve $B \delta A$ elde edilir.

$P_2)$ $(A \cup B) \delta C$ ise $(A \cup B) \ll (X - C)$ dir. Teorem 3.1.2 *(iii)*'ten $A \ll (X - C)$ ve $B \ll (X - C)$ olur ve $A \delta C$ ve $B \delta C$ elde edilir.

Tersine, $(A \cup B) \delta C$ ise P_1 simetri aksiyomundan $C \delta (A \cup B)$ olur. Buradan $C \ll [X - (A \cup B)]$ ve $C \ll [(X - A) \cap (X - B)]$ bulunur. Teorem 3.1.2 *(iv)*'ten $C \ll (X - A)$ ve $C \ll (X - B)$ elde edilir. Böylece $C \delta A$ veya $C \delta B$ olur. δ simetrik olduğundan $A \delta C$ veya $B \delta C$ yazılabilir.

$P_3)$ Teorem 3.1.2 *(i)*'in direkt sonucudur.

$P_4)$ $A \delta B$ ise $A \ll (X - B)$ dir. Teorem 3.1.2 *(ii)*'den $A \subset (X - B)$ olur, yani $A \cap B = \varnothing$ elde edilir.

$P_5)$ $A \delta B$ olduğunu kabul edelim, yani $A \ll (X - B)$ olsun. O zaman Teorem 3.1.2 (iv) maddesi $A \ll (X - C) \ll (X - B)$ olacak şekilde bir C'nin varlığını gösterir. Böylece $A \delta C$ ve $(X - C) \delta B$ olacak şekilde bir C bulunur.

$P_6)$ $\{x\} \delta \{y\} \Leftrightarrow \{x\} \ll (X - \{y\})$ ve Teorem 3.1.2 (vii)'den $\{x\} \ll (X - \{y\}) \Leftrightarrow \{x\} \neq \{y\}$ elde edilir.

"$A \ll B$ ancak ve ancak B, A'nın bir $\delta -$komşuluğudur" ifadesi de tanımdan kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 3.1.4. (X, δ) bir proximity uzay ve $A \subset X$ ise $\overline{A} = \bigcap_{A \ll B} B$ olur.

İspat: Yardımcı Teorem 3.1.1 (i) ve Teorem 3.1.2 (ii)'den $A \ll B \Rightarrow \overline{A} \subset B$ dir. Buradan $\overline{A} \subset \bigcap_{A \ll B} B$ bulunur.

Ters kapsamayı göstermek için $x \notin \overline{A}$ kabul edelim. O zaman $x \delta \overline{A}$ ve Sonuç 3.1.1'den; $\overline{A}$, x'i içermeyen bir B_x $\delta -$komşuluğuna sahiptir. Yani $x \notin \bigcap_{A \ll B} B$ dir. Böylece $\bigcap_{A \ll B} B \subset \overline{A}$ elde edilir.

O halde $\overline{A} \subset \bigcap_{A \ll B} B$ olur.

3.2. Genelleştirilmiş Proximity'ler

Literatürde proximity uzayların birçok genelleştirilmiş formlarının olduğu bilinmektedir. Bunlardan bazıları Efremovič proximity uzayların ortaya çıkmasından daha önce de mevcuttu. Bu bölümde kısaca bu genelleştirilmiş proximity'ler ve bunlar arasındaki bazı ilişkileri inceleyeceğiz.

Tanım 3.2.1 *(EF-proximity).*

X'in kuvvet kümesi üzerinde tanımlanan bir δ ikili bağıntısı, eğer aşağıdaki özellikleri sağlarsa X üzerinde bir *Efremovič Proximity* ya da *EF-proximity* olarak adlandırılır [24].

i) $A\delta B \Rightarrow B\delta A$

ii) $A\delta(B\cup C) \Leftrightarrow A\delta B \vee A\delta C$

$(A\cup B)\delta C \Leftrightarrow A\delta C \vee B\delta C$

iii) $A\delta B \Rightarrow A\neq\emptyset \wedge B\neq\emptyset$

iv) $A\cap B\neq\emptyset \Rightarrow A\delta B$

v) $A\delta B \Rightarrow A\delta E$ ve $(X-E)\delta B$ olacak şekilde bir E alt cümlesi vardır.

Bu çalışma boyunca üzerinde çalıştığımız proximity *EF-proximity*'dir.

Tanım 3.2.2 *(P-proximity).*

X'in kuvvet kümesi üzerinde tanımlanan bir α ikili bağıntısı, eğer aşağıdaki özellikleri sağlarsa X üzerinde bir *Pervin Proximity* ya da *P-proximity* olarak adlandırılır. Ayrıca P-proximity *quasi-proximity* olarak da bilinir [24].

i) $A\alpha(B\cup C) \Leftrightarrow A\alpha B \vee A\alpha C$

$(A\cup B)\alpha C \Leftrightarrow A\alpha C \vee B\alpha C$

ii) $A\alpha B \Rightarrow A\neq\emptyset \wedge B\neq\emptyset$

iii) $A\cap B\neq\emptyset \Rightarrow A\alpha B$

iv) $A\not\alpha B \Rightarrow A\not\alpha E$ ve $(X-E)\not\alpha B$ olacak şekilde bir E alt cümlesi vardır.

EF-proximity'deki (i) şartını çıkardığımızda *P-proximity*'yi elde ederiz.

Tanım 3.2.3 *(LO-proximity).*

X'in kuvvet kümesi üzerinde tanımlanan bir β ikili bağıntısı, eğer aşağıdaki özellikleri sağlarsa X üzerinde bir *Lodato Proximity* ya da *LO-proximity* olarak adlandırılır [28].

i) $A\beta B \Rightarrow B\beta A$

ii) $A\beta(B\cup C) \Leftrightarrow A\beta B \vee A\beta C$

$(A\cup B)\beta C \Leftrightarrow A\beta C \vee B\beta C$

iii) $A \beta B \Rightarrow A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$

iv) $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \beta B$

v) $A \beta B$ ve $\forall b \in B$ için $\{b\} \beta C \Rightarrow A \beta C$

Tanım 3.2.4 *(LE-proximity).*

X 'in kuvvet kümesi üzerinde tanımlanan bir γ ikili bağıntısı, eğer aşağıdaki özellikleri sağlarsa X üzerinde bir *Leader Proximity* ya da *LE-proximity* olarak adlandırılır [24].

i) $A \gamma (B \cup C) \Leftrightarrow A \gamma B \vee A \gamma C$

$(A \cup B) \gamma C \Leftrightarrow A \gamma C \vee B \gamma C$

ii) $A \gamma B \Rightarrow A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$

iii) $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \gamma B$

iv) $A \gamma B$ ve $\forall b \in B$ için $\{b\} \gamma C \Rightarrow A \gamma C$

LO-proximity'deki *(i)* şartını çıkardığımızda *LE-proximity*'yi elde ederiz.

Tanım 3.2.5 *(R-proximity).*

X 'in kuvvet kümesi üzerinde tanımlanan bir θ ikili bağıntısı, eğer aşağıdaki özellikleri sağlarsa X üzerinde bir *R-proximity* olarak adlandırılır [28].

i) $A \theta B \Rightarrow B \theta A$

ii) $A \theta (B \cup C) \Leftrightarrow A \theta B \vee A \theta C$

$(A \cup B) \theta C \Leftrightarrow A \theta C \vee B \theta C$

iii) $A \theta B \Rightarrow A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$

iv) $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \theta B$

v) $\{a\} \theta B \Rightarrow \{a\} \theta E$ ve $(X - E) \theta B$ olacak şekilde bir E alt cümlesi vardır.

Tanım 3.2.6 *(S-proximity).*

X 'in kuvvet kümesi üzerinde tanımlanan bir λ ikili bağıntısı, eğer aşağıdaki özellikleri sağlarsa X üzerinde bir *Seperation Proximity* ya da *S-proximity* olarak adlandırılır [28].

i) $A \lambda B \Rightarrow B \lambda A$

ii) $A \lambda (B \cup C) \Leftrightarrow A \lambda B \vee A \lambda C$

$(A \cup B) \lambda C \Leftrightarrow A \lambda C \vee B \lambda C$

iii) $A \lambda B \Rightarrow A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$

iv) $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \lambda B$

v) $\{a\} \lambda B$ ve $\forall b \in B$ için $\{b\} \lambda C \Rightarrow \{a\} \lambda C$

vi) $\{x\} \lambda \{y\} \Rightarrow x = y$

Yukarıda verilen genelleştirilmiş proximity'lerin aralarındaki ilişkilerin daha açık görülebilmesi için bu proximity'leri tek bir tanımda toplayabiliriz.

Tanım 3.2.7 *(Genelleştirilmiş Proximity'ler).*

X boştan farklı bir küme ve δ, $P(X)$ üzerinde bir ikili bağıntı olmak üzere aşağıdaki aksiyomlar verilsin.

GP_0) $\{x\} \delta \{y\} \Rightarrow x = y$

GP_1) $A \delta B \Rightarrow B \delta A$

GP_2) $A \delta (B \cup C) \Leftrightarrow A \delta B \vee A \delta C$

$(A \cup B) \delta C \Leftrightarrow A \delta C \vee B \delta C$

GP_3) $A \delta B \Rightarrow A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$

GP_4) $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \delta B$

GP_5) $A \not\delta B \Rightarrow A \not\delta E$ ve $(X - E) \not\delta B$ olacak şekilde bir E alt cümlesi vardır.

GP_6) $\{a\} \not\delta B \Rightarrow \{a\} \not\delta E$ ve $(X - E) \not\delta B$ olacak şekilde bir E alt cümlesi vardır.

GP_7) $A \delta B$ ve $\forall b \in B$ için $\{b\} \delta C \Rightarrow A \delta C$

GP_8) $\{a\} \delta B$ ve $\forall b \in B$ için $\{b\} \delta C \Rightarrow \{a\} \delta C$

Buna göre, eğer δ bağıntısı;

$GP_i \quad (i = 1,2,3,4,5)$ aksiyomlarını sağlarsa *EF-proximity* adını alır.

$GP_i \quad (i = 2,3,4,5)$ aksiyomlarını sağlarsa *P-proximity* adını alır.

$GP_i \quad (i = 1,2,3,4,7)$ aksiyomlarını sağlarsa *LO-proximity* adını alır.

$GP_i \quad (i = 2,3,4,7)$ aksiyomlarını sağlarsa *LE-proximity* adını alır.

$GP_i \quad (i = 1,2,3,4,6)$ aksiyomlarını sağlarsa *R-proximity* adını alır.

$GP_i \quad (i = 0,1,2,3,4,8)$ aksiyomlarını sağlarsa *S-proximity* adını alır.

Ayrıca *S-proximity* hariç diğer genelleştirilmiş proximity'ler ek olarak GP_0 aksiyomunu da sağlıyorsa bunlara ayrılmış proximity denir. Örneğin GP_0 aksiyomunu sağlayan *LO-proximity*'ye ayrılmış *LO-proximity* denir.

Açıkça görüldüğü gibi *P-proximity* ve *LE-proximity* için simetri aksiyomu bulunmamaktadır. Bu proximity'leri içeren ispatlarda buna dikkat edilmelidir.

Teorem 3.2.1. X üzerindeki her ayrılmış *LO-proximity*, aynı zamanda X üzerinde bir *S-proximity*'dir [24].

İspat: GP_7 aksiyomu GP_8 aksiyomundan daha güçlüdür. O halde ispat açıktır.

Teorem 3.2.2. X üzerindeki her *EF-proximity*, aynı zamanda X üzerinde bir *R-proximity*'dir.

İspat: GP_5 aksiyomu GP_6 aksiyomundan daha güçlüdür. O halde ispat açıktır.

Teorem 3.2.3. X üzerindeki her α *P-proximity*'si aynı zamanda X üzerinde bir *LE-proximity*'dir [24].

İspat: İspat için α ikili bağıntısının GP_7 aksiyomunu sağladığını göstermemiz yeterlidir. Kabul edelim ki $A \alpha B$ ve $\forall b \in B$ için $\{b\} \alpha C$ olsun. Eğer $A \not\alpha C$ ise o zaman GP_5 aksiyomundan $A \not\alpha E$ ve $(X - E) \not\alpha C$ olacak şekilde bir $E \subset X$ vardır.

$A \not\alpha E$ ve $A \alpha B$ ise $B \not\subset E$, yani $B \cap (X - E) \neq \varnothing$ olur. Eğer $b \in B \cap (X - E)$ ise o zaman $\{b\} \alpha C \Rightarrow (X - E) \alpha C$ bulunur ve çelişki elde edilir. O halde $A \alpha C$'dir ve α bağıntısı GP_7 aksiyomunu sağlar.

Teorem 3.2.4. X üzerindeki her δ *EF-proximity*'si aynı zamanda X üzerinde bir *LO-proximity*'dir [29].

İspat: İspat için δ ikili bağıntısının GP_7 aksiyomunu sağladığını göstermemiz yeterlidir. Kabul edelim ki $A \delta B$ ve $\forall b \in B$ için $\{b\} \delta C$ olsun. Eğer $A \not\delta C$ ise o zaman GP_5 aksiyomundan $A \not\delta E$ ve $(X - E) \not\delta C$ olacak şekilde bir $E \subset X$ vardır. $A \not\delta E$ ve $A \delta B$ ise $B \not\subset E$, yani $B \cap (X - E) \neq \varnothing$ olur. Eğer $b \in B \cap (X - E)$ ise o zaman $\{b\} \delta C \Rightarrow (X - E) \delta C$ bulunur ve çelişki elde edilir. O halde $A \delta C$'dir ve δ bağıntısı GP_7 aksiyomunu sağlar.

Teorem 3.2.5. X üzerindeki her θ ayrılmış *R-proximity*'si aynı zamanda X üzerinde bir *S-proximity*'dir.

İspat: Ayrılmış bir *R-proximity* GP_0 aksiyomunu sağladığından ispat için θ ikili bağıntısının GP_8 aksiyomunu sağladığını göstermemiz yeterlidir.

Kabul edelim ki $\{a\} \theta B$ ve $\forall b \in B$ için $\{b\} \theta C$ olsun. Eğer $\{a\} \not\theta C$ ise o zaman GP_6 aksiyomundan $\{a\} \not\theta E$ ve $(X - E) \not\theta C$ olacak şekilde bir $E \subset X$ vardır. $\{a\} \not\theta E$ ve $\{a\} \theta B$ ise $B \not\subset E$, yani $B \cap (X - E) \neq \varnothing$ olur. Eğer $b \in B \cap (X - E)$ ise o zaman $\{b\} \theta C \Rightarrow (X - E) \theta C$ bulunur ve çelişki elde edilir. O halde $\{a\} \theta C$'dir ve θ bağıntısı GP_8 aksiyomunu sağlar.

Teorem 3.2.6. X üzerindeki her ayrılmış *EF-proximity*, aynı zamanda X üzerinde bir *S-proximity*'dir.

İspat: Teorem 3.2.2'den her *EF-proximity*'nin bir *R-proximity* olduğunu biliyoruz. GP_0 aksiyomu dahil edildiğinde her ayrılmış *EF-proximity*, bir ayrılmış *R-proximity*'dir. Teorem 3.2.5'ten her ayrılmış *R-proximity* aynı zamanda bir *S-proximity*'dir. O halde her ayrılmış *EF-proximity*'nin bir *S-proximity* olduğu elde edilir.

X üzerinde keyfi bir genelleştirilmiş proximity'yi göstermek için π sembolünü kullanalım. Buna göre $A \pi B$ olmak üzere $A \subset C \ \wedge \ B \subset D \ \Rightarrow \ C \pi D$ sağlanır.

Bir X cümlesi üzerindeki bütün genelleştirilmiş proximity'lerin sınıfı üzerinde kısmi bir sıralama

$$\pi_1 < \pi_2 \ \Leftrightarrow \ A \pi_2 B \Rightarrow A \pi_1 B$$

ifadesi ile tanımlanabilir.

3.3. PROX Kategorisi

Tanım 3.3.1 *(Kategori).*

Objelerin bir sınıfı $Ob(K)$ ve her bir $A, B \in Ob(K)$ obje çifti için A'dan B'ye tüm morfizmlerin sınıfı $K(A,B)$ olmak üzere,

$$Mor(K) = \bigcup_{A,B \in Ob(K)} K(A,B)$$

olsun. $Mor(K)$ üzerinde aşağıdaki şekilde bir kısmi işlem tanımlansın:

Her $A, B, C \in Ob(K)$ için bir

$$\begin{aligned} K(B,C) \times K(A,B) &\rightarrow K(A,C) \\ (g,f) &\mapsto gf \end{aligned}$$

işlemi bulunsun. Bu şekilde tanımlanan kısmi işlem aşağıdaki özellikleri sağlasın:

i) Eğer $f \in K(A,B)$, $g \in K(B,C)$ ve $h \in K(C,D)$ ise $(hg)f = h(gf)$ olsun.

ii) Her bir $A \in Ob(K)$ için $f \in K(A,-)$ ve $g \in K(-,A)$ iken $f 1_A = f$ ve $1_A g = g$ olacak şekilde birim morfizm olarak adlandırılan bir $1_A \in K(A,A)$ morfizmi bulunsun.

Bu şekildeki bir yapıya bir *Kategori* denir.

Tanım 3.3.2 *(PROX Kategorisi).*

$Ob(PROX):\ (X,\delta),(Y,\delta'),(Z,\delta''),.....$ gibi proximity uzaylar

$Mor(PROX):\ Mor[(X,\delta),(Y,\delta')]=\{f \mid f:(X,\delta)\xrightarrow{\delta-\text{dönüşüm}}(Y,\delta')\}$ ve bileşke işlemi de aşağıdaki gibi olsun:

$$\begin{aligned}\circ:\ Mor[(Y,\delta'),(Z,\delta'')]\times Mor[(X,\delta),(Y,\delta')] &\to Mor[(X,\delta),(Z,\delta'')]\\ (g,f) &\mapsto g\circ f\end{aligned}$$

$g\circ f$ 'nin bir $\delta-$dönüşüm olduğunu gösterelim. Bunun için

$g\circ f:(X,\delta)\to(Z,\delta'')$ olmak üzere

$$\begin{aligned}g\circ f(A\,\delta\,B) &= g(f(A\,\delta\,B))\\ &= g(f(A)\,\delta'\,f(B)) \qquad (f,\ \delta-\text{dönüşüm olduğundan})\\ &= g(f(A))\,\delta''\,g(f(B)) \qquad (g,\ \delta-\text{dönüşüm olduğundan})\\ &= (g\circ f)(A)\,\delta''\,(g\circ f)(B)\end{aligned}$$

dir. Buna göre (i) ve (ii) şartlarının sağlandığını gösterelim:

$i)$ $f:(X,\delta)\to(Y,\delta')$, $g:(Y,\delta')\to(Z,\delta'')$ ve $h:(Z,\delta'')\to(T,\delta''')$ olmak üzere bileşke işlemi birleşme özelliğine sahip olmalıdır. Yani $(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$ olmalıdır.

f, g ve h fonksiyon olduklarından $(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$ dir.

$$\begin{aligned}A\,\delta\,B\ \Rightarrow\ ((h\circ g)\circ f)(A\,\delta\,B) &= h\circ(g\circ(f(A\,\delta\,B)))\\ &= h\circ(g\circ(f(A)\,\delta'\,f(B))) \qquad (f,\ \delta-\text{dönüşüm old.})\\ &= h\circ(g(f(A))\,\delta''\,g(f(B))) \qquad (g,\ \delta-\text{dönüşüm old.})\\ &= ((h\circ g)\circ f)(A)\,\delta'''\,((h\circ g)\circ f)(B) \qquad (h,\ \delta-\text{d. old.})\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla bileşke işleminin birleşme özelliği vardır.

$ii)$ *PROX'*daki her (X,δ) objesi için

$$1_{(X,\delta)} : (X,\delta) \to (X,\delta)$$
$$x \mapsto x$$
$$A\,\delta\,B \mapsto 1_X(A)\,\delta\,1_X(B) = A\,\delta\,B$$

dönüşümü vardır ve her $f : (X,\delta) \to (Y,\delta')$ dönüşümü için $f \circ 1_X : (X,\delta) \to (Y,\delta')$ olur, yani $f \circ 1_X = f$ dir. Benzer şekilde her $g : (Y,\delta') \to (X,\delta)$ dönüşümü için $1_X \circ g : (Y,\delta') \to (X,\delta)$ olur, yani $1_X \circ g = g$ dir.

O halde *PROX* kategori olma şartlarını sağlar. Bu kategoriye *Proximity Uzaylar Kategorisi (PROX Kategorisi)* denir.

Not 3.3.1: $\{x\}$ tek nokta cümlesi üzerinde $\delta = \{(\{x\},\{x\})\}$ sınıfı bir proximity'dir ve $(\{x\},\delta)$ bir proximity uzaydır. Buna göre herhangi bir (X,δ^*) proximity uzayı için

$$Mor[(X,\delta^*),(\{x\},\delta)] = \{f \mid f : (X,\delta^*) \xrightarrow{\delta-\text{dönüşüm}} (\{x\},\delta)\}$$

tek elemanlı olduğundan $(\{x\},\delta)$ objesi *PROX* kategorisinin final (terminal, bitiş, son) objesidir.

Tanım 3.3.3: *(Funktor)*

K ve L kategoriler olmak üzere K'nın her bir A objesini L'nin bir $F(A)$ objesine, K'nın her bir $f : A \to B$ morfizmini ise L'deki bir $F(f) : F(A) \to F(B)$ morfizmine dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan bir F dönüşümüne K'dan L'ye bir *Funktor* denir ve $F : K \to L$ olarak yazılır.

i) Her $A \in Ob(K)$ için $F(1_A) = 1_{F(A)}$ dır.

ii) K kategorisinde $g \circ f$ bileşkesi tanımlı olacak şekildeki f ve g morfizmleri için $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ dir.

Örnek 3.3.1:

$U : PROX \to SET$, $U((X,\delta)) = X$ şeklinde tanımlanan U dönüşümünün bir funktor olduğunu gösterelim:

$U: PROX \to SET$ dönüşümünde $U((X,\delta)) = X$ ve $f:(X,\delta) \to (Y,\delta')$ için $U(f) = f: X \to Y$ olarak tanımlansın. *(i)* ve *(ii)* şartlarının sağlandığını gösterelim:

i) $U(1_{(X,\delta)}) = 1_{U(X,\delta)} = 1_X$

ii) $f: X \to Y$ ve $g: Y \to Z$ için $U(g \circ f) = U(g) \circ U(f)$ dir. Gerçekten;

$U(g \circ f) = g \circ f$ dir. $U(g) = g$ ve $U(f) = f$ olduğundan $U(g) \circ U(f) = g \circ f$ olur. O halde $U(g \circ f) = U(g) \circ U(f)$ dir.

Not 3.3.2:

i) Her $A, B \subset X$ için $\delta = \{(A,B) \mid f_i(A)\,\delta_i\, f_i(B)\ ,\ \forall i \in I\}$ şeklinde tanımlı olduğunda *PROX* kategorisinde $f_i:(X,\delta) \to (X_i,\delta_i)$ kaynağı bir *initial lift (başlangıç kaldırma)* olur.

ii) "Her $A, B \subset X$ için $A\,\delta\,B$ ancak ve ancak $f_i(A_i) = A$, $f_i(B_i) = B$ ve $A_i\,\delta_i\,B_i$ olacak şekilde $\exists i \in I$ ve $A_i, B_i \subset X_i$ vardır" ifadesi sağlandığında *PROX* kategorisinde $f_i:(X_i,\delta_i) \to (X,\delta)$ kavşağı bir *final lift (bitiş kaldırma)* olur.

Tanım 3.3.4: *(Dolgun, Düzenli, Amnestik, Belirli Funktor)*

$F: K \to L$ bir funktor olsun.

1) Her $A, B \in K$ ve her $f: F(A) \to F(B)$ için $F(g) = f$ olacak şekilde en az bir $g: A \to B$ dönüşümü varsa F 'ye *dolgun (full) funktor* denir.

2) Eğer her $A, B \in K$ ve $f, g: A \to B$ dönüşümleri için $F(f) = F(g)$ olduğunda $f = g$ oluyorsa F 'ye *düzenli (faithful) funktor* denir.

3) F 'ye *amnestik* denir ancak ve ancak $f: A \to A$ için eğer $F(f) = 1_{F(A)}$ ve f izomorfizm ise $f = 1_A$ olmalıdır.

4) F hem düzenli hem de amnestik ise F 'ye *belirli (concrete) funktor* denir.

Tanım 3.3.5: *(Topolojik funktor)*

K ve L kategorileri verilsin. Eğer $F : K \to L$ funktoru aşağıdaki şartları sağlıyorsa F 'ye *topolojik funktor* veya K 'ya L kategorisi üzerinde *topolojik kategori* denir.

1) F belirlidir (Düzenli ve amnestiktir).

2) F küçük demetlere sahiptir. Yani her $B \in Ob(L)$ için $F^{-1}(B)$ bir cümledir. Burada $F^{-1}(B) = \{ X \in Ob(K) \mid F(X) = B \}$ şeklinde tanımlanır ve B üzerindeki demet olarak adlandırılır.

3) Her $F-$kaynağı bir başlangıç kaldırmaya sahiptir.

Keyfi bir $F-$kaynağının başlangıç kaldırmasının varlığı, keyfi $F-$kavşağının ($F-$ sink) bitiş kaldırmasına denktir. Yani bitiş kaldırma başlangıç kaldırmanın dualidir.

Örnek 3.3.2:

$U : PROX \to SET$, $U((X,\delta)) = X$ şeklinde tanımlanan U dönüşümünün bir topolojik funktor olduğunu gösterelim:

1) U 'nun belirli olduğunu gösterelim.

i) U 'nun düzenli olduğunu göstermeliyiz. Yani her $(X,\delta),(Y,\delta') \in Ob(PROX)$ ve $f, g : (X,\delta) \xrightarrow{\delta-\text{dönüşüm}} (Y,\delta')$ $\delta-$dönüşümleri için $U(f) = U(g)$ olduğunda $f = g$ olduğunu gösterelim. U 'nun tanımından $U(f) = f$ ve $U(g) = g$ olup $U(f) = U(g)$ olduğunda $f = g$ bulunur. Dolayısıyla U düzenlidir.

ii) U 'nun amnestik olduğunu gösterelim.

$f : (X,\delta) \xrightarrow{\delta-\text{dönüşüm}} (X,\delta')$, $U(f) = 1_X$ ve f , $\delta-$izomorfizm olsun. $\delta \cong \delta'$ olduğunu göstermeliyiz.

Her $A,B \subset X$ için $A \delta B$ ise f , $\delta-$dönüşüm olduğundan $f(A) \delta' f(B)$ dir. $U(f) = f = 1_X$ olduğundan $1_X(A) \delta' 1_X(B)$ dir ve $A \delta' B$ bulunur. Dolayısıyla $\delta' < \delta$ elde edilir.

f , $\delta-$izomorfizm olduğundan $f^{-1}:(X,\delta')\xrightarrow{\delta-\text{dönüşüm}}(X,\delta)$ olur. Her $A,B\subset X$ için $A\delta' B$ ise f^{-1}, $\delta-$dönüşüm olduğundan $f^{-1}(A)\delta f^{-1}(B)$ dir. $U(f^{-1})=f^{-1}=1_X$ sürekli olduğundan $1_X(A)\delta 1_X(B)$ dir ve $A\delta B$ bulunur. Dolayısıyla $\delta<\delta'$ elde edilir. $\delta'<\delta$ ve $\delta<\delta'$ olduğundan $\delta\cong\delta'$ bulunur.

O halde U amnestiktir. (i) ve (ii)'den U belirli funktordur.

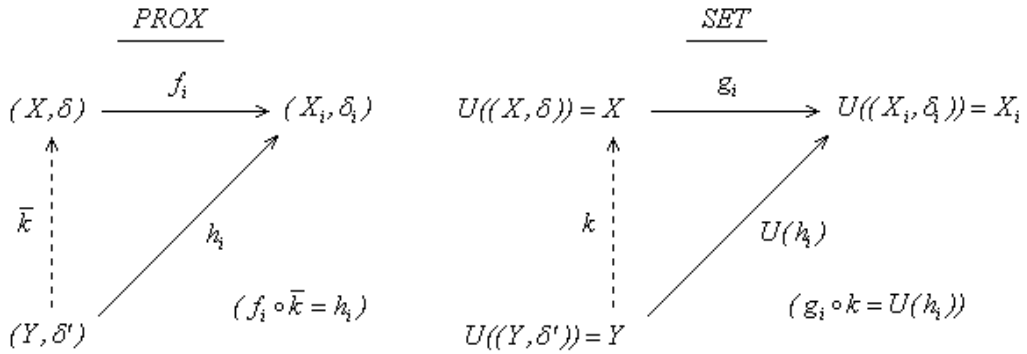
2) U'nun küçük demetlere sahip olduğunu, yani her $X\in Ob(SET)$ için $U^{-1}(X)$'in bir cümle olduğunu gösterelim.

$U^{-1}(X)=\{(X,\delta)\,|\,U(X,\delta)=X$ ve $f:(X,\delta)\xrightarrow{\delta-\text{dönüşüm}}(X,\delta')$ için $U(f)=1_X\}$ şeklinde tanımlansın. $\Delta=\{\delta\,|\,\delta$, X üzerinde bir proximity$\}$ olmak üzere, $V:U^{-1}(X)\to\Delta$, $V((X,\delta))=\delta$ şeklinde tanımlansın. V birebir ve örten olduğundan $U^{-1}(X)\cong\Delta\subset(P(X)\times P(X))$ olur. O halde $U^{-1}(X)$ bir cümledir.

3) Her $U-$kaynağının bir başlangıç kaldırmaya sahip olduğunu gösterelim.

Her $U-$kaynağı için yani *SET*'te $g_i:X\to U((X_i,\delta_i))$ ailesi için, $U(f_i)=g_i$ olacak şekilde *PROX*'da $f_i:(X,\delta)\to(X_i,\delta_i)$ ailesi vardır.

Her $A,\,B\subset X$ için $\delta=\{(A,B)\,|\,f_i(A)\delta_i f_i(B)\,,\,\forall i\in I\}$ şeklinde tanımlansın. Buna göre $f_i:(X,\delta)\to(X_i,\delta_i)$, $g_i:X\to X_i$ nin başlangıç kaldırmasıdır. Yani her $(X,\delta),(X_i,\delta_i)\in Ob(PROX)$ ve *PROX*'da $h_i:(Y,\delta')\to(X_i,\delta_i)$ dönüşümler ailesi



Şekil 3.1. $U-$kaynağı için başlangıç kaldırma

için $f_i \circ \overline{k} = h_i$ ve $g_i \circ k = U(h_i)$ olacak şekilde $\exists \overline{k} : (Y, \delta') \to (X, \delta)$ vardır.

$\overline{k}$ 'nın bir $\delta -$dönüşüm olduğunu göstermeliyiz.

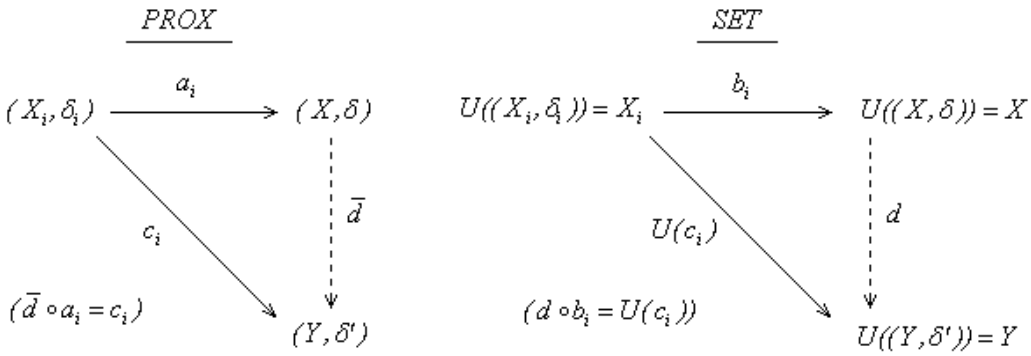
Bunun için her $G, H \subset Y$ için $G \delta' H$ ise $\overline{k}(G) \delta \overline{k}(H)$ olduğunu göstermeliyiz. Her $G, H \subset Y$ için $G \delta' H$ ise h_i'ler $\delta -$dönüşüm olduğundan $h_i(G) \delta_i h_i(H)$ bulunur. $f_i \circ \overline{k} = h_i$ olduğundan $(f_i \circ \overline{k})(G) \delta_i (f_i \circ \overline{k})(H)$ yazılabilir. $f_i(\overline{k}(G)) \delta_i f_i(\overline{k}(H))$ olup δ 'nın tanımından $\overline{k}(G) \delta \overline{k}(H)$ bulunur. O halde $\overline{k}$ bir $\delta -$dönüşümdür.

O halde U dönüşümü bir topolojik funktordur.

Başlangıç kaldırmaya benzer olarak bitiş kaldırmayı da gösterebiliriz.

Her $U -$kavşağı için yani *SET*'te $b_i : X_i \to U((X, \delta))$ ailesi için, $U(a_i) = b_i$ olacak şekilde *PROX*'da $a_i : (X_i, \delta_i) \to (X, \delta)$ ailesi vardır.

Her $A, B \subset X$ için $\delta = \{(A, B) \mid a_i(A_i) = A$, $a_i(B_i) = B$ ve $A_i \delta_i B_i$ olacak şekilde $\exists i \in I$ ve $A_i, B_i \subset X_i$ vardır $\}$ şeklinde tanımlandığında $a_i : (X_i, \delta_i) \to (X, \delta)$, $b_i : X_i \to X$ nin bitiş kaldırmasıdır. Yani her $(X, \delta), (X_i, \delta_i) \in Ob(PROX)$ ve



Şekil 3.2. U – kavşağı için bitiş kaldırma

PROX'da $c_i : (X_i, \delta_i) \to (Y, \delta')$ dönüşümler ailesi için $\overline{d} \circ a_i = c_i$ olacak şekilde $\exists \overline{d} : (X, \delta) \to (Y, \delta')$ vardır.

$\overline{d}$ 'nin bir $\delta -$dönüşüm olduğunu göstermeliyiz.

Bunun için her $G, H \subset X$ için $G \delta H$ ise $\overline{d}(G) \delta' \overline{d}(H)$ olduğunu göstermeliyiz. Her $G, H \subset X$ için $G \delta H$ ise δ'nın tanımından $a_i(A_i) = G$, $a_i(B_i) = H$ ve $A_i \delta_i B_i$ olacak şekilde $\exists i \in I$ ve $A_i, B_i \subset X_i$ vardır. $A_i \delta_i B_i$ ve c_i'ler $\delta -$ dönüşüm olduğundan $c_i(A_i) \delta' c_i(B_i)$ bulunur. $\overline{d} \circ a_i = c_i$ olduğundan $(\overline{d} \circ a_i)(A_i) \delta' (\overline{d} \circ a_i)(B_i)$ yazılabilir. Buradan $\overline{d}(a_i(A_i)) \delta' \overline{d}(a_i(B_i))$ olup $\overline{d}(G) \delta' \overline{d}(H)$ bulunur. O halde $\overline{d}$ bir $\delta -$ dönüşümdür.

4. BÖLÜM

4.1. Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada, 1908'de Roma matematik kongresinde ortaya çıkan ve Efremovič tarafından 1950'lerin başlarında yeniden keşfedilen proximity uzaylar teorisi incelendi.

İlk olarak gerekli temel tanımlar ve çeşitli proximity uzay örnekleri verildi. Ardından Efremovič'in, kapanış operatörü yardımıyla bir proximity uzayda topoloji üretilebileceğini ve tersine tamamen regüler her uzayın Urysohn fonksiyonu yardımıyla bir proximity uzaya dönüştürülebileceğini gösteren teoremleri ve ispatları aktarıldı.

Bir proximity uzaydan diğerine olan dönüşümleri incelemek için proximity dönüşüm ($\delta-$dönüşüm) tanımı verildi ve iki proximity uzay arasındaki bir proximity dönüşümün üretilen topolojilere göre sürekli olduğu gösterildi.

Daha sonra alt uzay proximity'si tanımı verilip proximity uzayların $\{(X_\alpha,\delta_\alpha)\,|\,\alpha\in\Lambda\}$ ailesinin çarpımı ve bu çarpım üzerindeki proximity bağıntısı üzerinde duruldu. Ayrıca proximity uzayların çarpımının daha iyi anlaşılabilmesi için çarpımla ilgili ayrıntılı örnekler verildi.

Smirnov kompaktlaştırması için gerekli olan cluster kavramı verilerek ultrasüzgeçler ile ilişkisi gösterildi. Ardından proximity uzayda tanımlanan $\delta-$komşuluk kavramı ve bu kavram yardımıyla proximity uzayın alternatif tanımı verildi.

Literatürde yer alan birçok genelleştirilmiş proximity tanımı tek bir tanımda (Tanım 3.2.7) toplandı. Bu şekilde aralarındaki ilişkilerin daha açık görülmesi sağlandı. Ardından bu ilişkiler teoremlerle verildi.

Bu çalışmanın son kısmında da proximity uzayların kategorisi olan PROX kategorisi tanımı verilerek $U: PROX \rightarrow SET$, $U((X,\delta)) = X$ şeklinde tanımlanan U dönüşümünün bir topolojik funktor olduğu gösterildi.

Bundan sonraki çalışmalarda ise PROX topolojik kategorisinde ayırma aksiyomları, kapalı objeler, kuvvetli kapalı objeler, bağlantılı objeler ve kompakt objeler araştırılabilir. Ayrıca bu topolojik kategoride yapılan diğer çalışmalar ile yukarıdaki kavramlarla ilgili yapılacak çalışmalar arasındaki ilişkiler incelenebilir.

KAYNAKLAR

1. Riesz, F., 1908. Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre, pp. 18-24. *Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici (Rome, 1908), Vol. II.*

2. Efremovič, V. A., 1951. Infinitesimal spaces (Rusça). **Doklady Akademii Nauk SSSR, 76**: 341-343; *MR* **12**, 744.

3. Efremovič, V. A., 1952. The geometry of proximity I (Rusça). **Matematicheskii Sbornik, 31** (73): 189-200; *MR* **14,** 1106.

4. Krishna Murti, S. B., 1940. A set of axioms for topological algebra. **Journal of the Indian Mathematical Society, 4**: 116-119; *MR* **2**, 69.

5. Wallace, A. D., 1941. Seperatıon Spaces. **Annals of Mathematics, 42**: 687-697; *MR* **3**, 57.

6. Wallace, A. D., 1942. Seperatıon Spaces II. **Anais da Academia Brasileira de Ciencias, 14**: 203-206; *MR* **4**, 87.

7. Szymanski, P., 1941. La notion des ensembles separes comme terme primitif de la topologie. **Math. Timisoara, 17**: 65-84; *MR* **4**, 87.

8. Smirnov, Y. M., 1964. On proximity spaces. **American Mathematical Society Translation, 2** (38): 5-35.

9. Mrówka, S. G., 1957. On the uniform convergences in proximity spaces (Rusça). **Bulletin Academic Polonaise des Sciences, Cl. III, 5**: 255-257; *MR* **19**, 669.

10. Goetz, A., 1962. On a notion of uniformity for *L*-spaces of Fréchet. **Colloquium Mathematicum, 9**: 223-231; *MR* **25**, 5491.

11. Poljakov, V. Z., 1965. On uniform convergence spaces (Rusça). **Colloquium Mathematicum, 13**: 167-179.

12. Goetz, A., 1967. Proximity-like structures in convergence spaces (Presented at conference on General Topology at Arizona State University). Preprint, University of Notre Dame.

13. Efremovič, V. A., Švarc, A. S., 1953. A new definition of uniform spaces. Metrization of proximity spaces (Rusça). **Doklady Akademii Nauk SSSR, 89**: 393-396; *MR* **15**, 815.

14. Pervin, W. J., 1964. Equinormal proximity spaces. **Indagationes Mathematicae, 26** (2): 152-154; *MR* **28**, 4514.

15. Leader, S., 1959. On clusters in proximity spaces. **Fundamenta Mathematicae, 47**: 205-213; *MR* **22**, 2978.

16. Pervin, W. J., 1963. Quasi-proximities for topological spaces. **Mathematische Annalen, 150**: 325-326; *MR* **27**, 1917.

17. Leader, S., 1964. On products of proximity spaces. **Mathematische Annalen, 154**: 185-194; *MR* **28**, 5420.

18. Lodato, M. W., 1964. On topologically induced generalized proximity relations. **Proceedings of the American Mathematical Society, 15**: 417-422; *MR* **28**, 4513.

19. Hayashi, E., 1964. On some properties of a proximity. **Journal of the Mathematical Society of Japan, 16**: 375-378; *MR* **31**, 2708.

20. Hayashi, E., 1965. A note on proximity spaces. **Bulletin of the Aichi Gakugei University, 14**: 1-4.

21. Leader, S., 1967. Local proximity spaces. **Mathematische Annalen, 169**: 275-281.

22. Eilenberg, S., Mac Lane, S., 1945. Relation between homology and homotopy groups of spaces. **Annals of Mathematics, 46**: 480-509.

23. Eilenberg, S., Mac Lane, S., 1945. General Theory of Natural Equivalences. **Transactions of the American Mathematical Society, 58** (2): 231-294.

24. Naimpally, S. A., Warrack, B. D., 1970. Proximity Spaces. Cambridge University Press, Cambridge, pp. 128.

25. Friedler, L. Michael, 1972. Mappings of Proximity Spaces. University of Alberta, Ph. D. Thesis, Alberta, pp. 54.

26. Isbell, J. R., 1964. Uniform Spaces. American Mathematical Society, Math. Surveys 12.

27. Alfsen, E.M., Fenstad, J. E., 1959. On the equivalence between proximity structures and totally bounded uniform structures. **Mathematica Scandinavica, 7**: 353-360.

28. Gagrat, M., Naimpally, S. A., 1973. Proximity approach to semi-metric and developable spaces. **Pacific Journal of Mathematics, 44** (1): 93-105.

29. Sharma, P. L., 1975. Two examples in proximity spaces. **Proceedings of the American Mathematical Society, 53** (1): 202-204.

30. Adámek, J., Herrlich, H., Strecker, G. E., 1990. Abstract and Concrete Categories: The Joy of Cats. John Wiley & Sons Inc., New York.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Samed ÖZKAN
Baba Adı : Rahmi
Anne Adı : Adile
Doğum Yeri : Salihli / MANİSA
Doğum Tarihi : 28.12.1988
Medeni Hâli : Evli

EĞİTİM

Derece	**Kurum**	**Mezuniyet Tarihi**
Ortaöğrenim	Nilüfer Milli Piyango Anadolu Lisesi, BURSA	2006
Lisans	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	2011
Yüksek Lisans	Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü	2013

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görev**
2012 – 2013	Nevşehir Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2013 –	Erciyes Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

İLETİŞİM

Adres : Mimarsinan Mah. Zap Sokak Çağrı Apt. No: 4/7
Kocasinan / KAYSERİ

E-posta : samedozkan@erciyes.edu.tr