T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TORSİYON İLE MODİFİYE EDİLMİŞ ORTOGONAL ÇATIDA EĞRİLER VE REGLE YÜZEYLER

Hazırlayan
Tuğba DEMİRKIRAN

Danışman
Doç. Dr. Nural YÜKSEL
Prof. Dr. Murat Kemal KARACAN

Doktora Tezi

Eylül 2022
KAYSERİ

T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TORSİYON İLE MODİFİYE EDİLMİŞ ORTOGONAL ÇATIDA EĞRİLER VE REGLE YÜZEYLER

(Doktora Tezi)

Hazırlayan
Tuğba DEMİRKIRAN

Danışman
Doç. Dr. Nural YÜKSEL
Prof. Dr. Murat Kemal KARACAN

Bu çalışma TÜBİTAK 2211-E Doğrudan Yurt İçi Doktora Burs Programı tarafından desteklenmektedir.

Eylül 2022
KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Tuğba Demirkıran

“Torsiyon ile Modifiye Edilmiş Ortogonal Çatıda Eğriler ve Regle Yüzeyler” adlı Doktora tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi’ ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Hazırlayan	**Danışman**
Tuğba DEMİRKIRAN	Doç. Dr. Nural YÜKSEL

Matematik ABD Başkanı

Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

TEŞEKKÜR

Doktora tezim boyunca danışmanlığımı büyük bir sabır ile yapan, her konuda yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen, anlayış ve hoşgörü ile yaklaşan, görüş ve önerileriyle yol gösteren, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım sayın hocam Doç. Dr. Nural Yüksel'e, ikinci danışmanım olmayı kabul ederek engin fikirleriyle beni yönlendiren Prof.Dr. Murat Kemal Karacan'a, doktora yaptığım süre boyunca verdiği burs ile beni destekleyen TÜBİTAK'a (2211-E Doğrudan Yurt İçi Doktora Burs Programı**)** teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bugünlere gelmemde maddi ve manevi hiçbir fedakarlıktan çekinmeyen, varlığıyla bana hep güç veren sevgili annem Nuran Canayaz'a ve sevgili babam Mustafa Canayaz'a ve hayatımın her aşamasında bana yardımcı olan sevgili eşim Abdullah Demirkıran'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Tuğba DEMİRKIRAN

Eylül 2022, KAYSERİ

TORSİYON İLE MODİFİYE EDİLMİŞ ORTOGONAL ÇATIDA EĞRİLER VE REGLE YÜZEYLER

Tuğba DEMİRKIRAN

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Doktora Tezi, Eylül 2022
Danışman: Doç. Dr. Nural YÜKSEL

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde bazı önemli tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatı 3-boyutlu Öklid uzayında tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatıya göre küresel eğrilerin geometrik yer denklemi elde edilerek, küresel eğrilerin yarıçaplarıyla ilgili teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca Bertrand eğrileri karakterize edilerek elde edilen sonuçlar teorem olarak verilmiştir. Son olarak helis ve slant helis eğrileri incelenmiş olup Lancret teoremi ve bir eğrinin helis ve slant helis eğrisi olması için gerek ve yeter şartlar teorem olarak ifade ve ispat edilmiştir.

Dördüncü bölümde uzay eğrilerinin gelişimi incelenmiştir. Ayrıca regle yüzeyler 3-boyutlu Öklid uzayında torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatıya göre karakterize edilmiştir. Bu çatıya göre elde edilen tanjant, normal ve binormal regle yüzeylerin birinci ve ikinci temel formunun katsayıları hesaplanarak, Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği elde edilmiştir.

Beşinci bölümde ise tezden elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatı, Küresel eğri, Helis eğrisi, Bertrand eğrisi, Uzay eğrileri, Regle yüzeyler.

CURVES AND RULED SURFACES ON MODIFIED ORTHOGONAL FRAME WITH TORSION

Tuğba DEMİRKIRAN

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
PhD Thesis, September 2022
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Nural YÜKSEL

ABSTRACT

This thesis consists of five chapter.

In the first chapter, some important definitions and theorems are given.

In the second chapter, modified orthogonal frame with Torsion is introduced in 3-dimensional Euclidean space.

In the third chapter, the theorems about the radii of the spherical curves are given by obtaining the equation of geometric locus of the spherical curves according to the modified orthogonal frame with torsion. In addition the results obtained by characterizing Bertrand curves are given as theorems. Finally helix and slant helix curves are examined and Lancret's theorem and the necessary and sufficient conditions for a curve to be a helix and slant helix curve are expressed and proved as theorems.

In the fourth chapter, the evolution of space curves is examined. In addition ruled surfaces are characterized according to the modified orthogonal frame with torsion in 3-dimensional Euclidean space. The coefficients of the first and second fundamental form of the tangent,normal and binormal rules surfaces obtained according to this frame are calculated and Gaussian curvature and mean curvature are obtained.

In the fifth chapter, the results obtained from the thesis are given.

Keywords: Modified orthogonal frame with torsion, Spherical curve, Helix, Bertrand curve, Space curves, Ruled surfaces.

İÇİNDEKİLER

TORSİYON İLE MODİFİYE EDİLMİŞ ORTOGONAL ÇATIDA EĞRİLER VE REGLE YÜZEYLER

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK ii
YÖNERGEYE UYGUNLUK iii
KABUL VE ONAY iv
ÖNSÖZ v
ÖZET vi
ABSTRACT vii
İÇİNDEKİLER viii
KISALTMALAR x
ŞEKİLLER LİSTESİ xi
GİRİŞ 1

1. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

1.1. Temel Tanım ve Teoremler 5

2. BÖLÜM

TORSİYON İLE MODİFİYE EDİLMİŞ ORTOGONAL ÇATI

2.1.Torsiyon İle Modifiye Edilmiş Ortogonal Çatı…….……. 10

3. BÖLÜM

3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA EĞRİLER

3.1 Torsiyon İle Modifiye Edilmiş Ortogonal Çatıda Küresel Eğriler 15
3.2 Torsiyon İle Modifiye Edilmiş Ortogonal Çatıda Bertrand Eğrileri 24
3.3 Torsiyon İle Modifiye Edilmiş Ortogonal Çatıda Helis Eğrisi 31

4. BÖLÜM

4.1 Torsiyon İle Modifiye Edilmiş Ortogonal Çatıda Uzay Eğrileri 35
4.2 Torsiyon İle Modifiye Edilmiş Ortogonal Çatıda Özel Regle Yüzeyler 36

5. BÖLÜM

TARTIŞMA-SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1 Tartışma- Sonuç ve Öneriler……....43

KAYNAKÇA 44

ÖZGEÇMİŞ..... 47

KISALTMALAR

E^3 : 3-boyutlu Öklid uzayı

$\langle , \rangle$: İç çarpım

$\wedge$: Vektörel çarpım

X : Yüzey

U : Yüzeyin normali

E, F, G : Yüzeyin 1.temel form katsayıları

L, M, N : Yüzeyin 2. temel form katsayıları

e, f, g : Yüzeyin 3. temel form katsayıları

K : Yüzeyin Gauss eğriliği

H : Yüzeyin ortalama eğriliği

t, n, b : Frenet-Serret çatısında teğet, asli normal, binormal vektörleri

T, N, B : Torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatıda teğet, asli normal, binormal vektörleri

κ, τ : Eğrilik ve Burulma

d : Uzaklık fonksiyonu

S_b^2 : Merkezi b noktasında olan birim küre

D_T : Kovaryant türev

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1.1. Kobe Liman Kulesi Japonya, Hiperboloid…….....…...2
Şekil 1.1.2. Warszawa Ochota Tren istasyonu, Polonya…….....…...3
Şekil 1.1.3. Nordprak Tren Ġstasyonu, Avusturya…… .....…...3
Şekil 3.1.1. α küresel eğrisi…….....….23

GİRİŞ

Diferansiyel geometride yapılan çalışma alanlarından eğriler ve yüzeyler teorisi oldukça önemlidir. Eğriler teorisi üzerine farklı uzay eğrileri arasındaki benzerlik ilişkileri ve uzay eğrilerinin karakterizasyon problemleri araştırmacılar tarafından oldukça önemli ve ilgi çekici bulunur. 3-boyutlu Öklid uzayı üzerinde bir çok özel eğri vardır. Bunlar; küresel eğriler, Bertrand eğrileri, Mannheim eğrileri, helis ve slant helis eğrileri olarak örneklendirilebilir. Belirli bir çatı üzerine kurulan bu eğriler ile eğrilikleri arasındaki ilişki ve uygulamaları oldukça önemlidir.

Yung Chow Wong 1963 yılında "A global formulation of the condition for a curve to lie in a sphere" adlı kitabında 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı küresel eğriler üzerine yapmış olduğu çalışmadan bahsetmiştir [29]. Küresel eğrilerin karakterizasyonlarını ise yine Yung Chow Wong 1972 yılında "On an explicit characterization of sherical curves" adlı çalışmasında ele almıştır [30].

1850 yılında ilk defa J. Bertrand, Bertrand eğrisi olarak adlandırılan eğrinin asli normal vektörü aynı zamanda Bertrand eşi olarak adlandırılan başka bir eğrinin asli normali olan Bertrand eğrisi kavramını keşfetti. Bu iki eğri Bertrand çifti olarak isimlendirildi [21,26]. Bertrand eğri çiftleri, eğrilik ve torsiyonları arasındaki bir lineer ilişkiyi sağladığından dolayı bu eğriler bazı durumlarda tek boyutlu lineer Weingarten yüzeyler formunda görülmüştür.

Günümüzde de bir çok alanda örneklendirilen ve kullanılan uzay eğrilerinden bir diğer önemli eğri ise helis eğrisidir. Struik 1961 yılında 'Lectures on Classical Differential Geometry' adlı çalışmasında helis eğrisinin tanımını şu şekilde vermiştir: Bir eğrinin sabit vektörü ile yine aynı eğrinin tanjant vektörü arasındaki açı sabit ise bu eğriye helis eğrisi adı verilir [27-28]. 1988 yılında Struik tarafından verilen genel helis eğrisinin karakterizasyonunun ünlü bir teoremi olan Lancret teoremi "Bir eğrinin helis olabilmesi için gerek ve yeter koşul eğrinin torsiyonunun eğriliğine oranı sabit

olmasıdır” şeklinde ifade edilir. İzumiya ve Takeuchi (2004) helisin özel bir sınıfı olan, eğrinin sabit vektörü ile yine aynı eğrinin normal vektörü arasındaki açı sabit olması durumunu slant helis olarak isimlendirmişlerdir. Ayrıca İzumiya ve Takeuchi, slant helis eğrilerinin gerek ve yeter şartını da elde etmişlerdir [5] .

Diferansiyel geometride yüzeyler teorisi de geniş ve önemli bir yere sahiptir. Uygulama alanı olarak ise yüzeyler günümüzde mimarlık, mühendislik, bilgisayar destekli tasarım ve modelleme gibi birçok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır. İlk olarak yüzeyler kavramı 18. yüzyılda Monge tarafından açıklanmıştır ve 19. yüzyıldan itibaren de önemli bir çalışma alanı olmuştur. Daha sonraki yıllarda Guggenheimer (1963) ve Hoschek (1971) klasik geometrideki farklı bakış açıları ile regle yüzeylerini incelemişlerdir. Regle yüzeyler uzayda dayanak eğrisi veya taban eğrisi de denilen bir eğri üzerinde düz bir çizginin sürekli hareketi ile elde edilen yüzeylerdir. Düz çizgiler, doğrultman ve teğet yüzeylere dayanır. Diferansiyel geometride regle yüzeyler üzerine birçok çalışmalar yapılmış olsa da halen ilgi çeken konulardan birisi olmaya devam etmektedir [22-25]. Regle yüzeyler özellikle basit bir yapıya sahip olduğu için mimarlık, mühendislik, mekanik, kinematik ve bilgisayar destekli tasarım, vb. gibi bir çok alanda kullanılmasıyla daha da önem kazanmaktadır [6-7]. Regle yüzeyler örnek alınarak yapılmış bazı mimari eserler aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 1.1.1. Kobe Liman Kulesi Japonya, Hiperboloid



Şekil 1.1.2. Warszawa Ochota Tren istasyonu, Polonya



Şekil 1.1.3. Nordprak Tren Ġstasyonu, Avusturya

Diferansiyel geometride Serret-Frenet formülleri, hareket eden parçacığın kinematik özelliklerini, 3-boyutlu Öklid uzayında diferansiyellenebilir sürekli bir eğri boyunca tanımlar. Daha özel bir ifade ile teğet, asli normal ve binormal vektörlerin türevleride diyebiliriz. Regüler eğrilerde de $\kappa > 0$ ve τ, diferansiyellenebilir fonksiyonlar ise birim hızlı eğrinin κ eğriliği ve τ burulması da vardır. Ancak asli normal ve binormal vektörleri genel olarak eğriliğin sıfır noktalarında süreksizdir ve eğri analitik olsa bile her zaman diferansiyellenemez. Bu durumda uzay eğrisinin Serret-Frenet çatısında kurulması eğriliğin kaybolduğu noktada belirsizliğe neden olur. Serret-Frenet çatısında

teğet, asli normal ve binormal vektörleri ayrık sıfır noktalarına sahip olduklarından ve eğrilikleri sıfır noktalarında süreksiz olabildiğinden yetersiz kalmaktadır. Bu sorunun çözümü için Sasai bir ortogonal çatı tanımladı ve Serret- Frenet çatıya karşılık gelen bir formül elde etti. Sasainin bu çalışmasında çatı elemanları sırasıyla Serret-Frenet vektörlerinin eğrilik katsayısı olan κ ile çarpılması ile elde edildi [8]. Sonrasında ise Karacan ve Bükçü bu Sasai'nin çalışmasını daha da genişletip burulma katsayı olan τ ile Serret-Frenet vektörlerinin çarpılmasıyla yeni modifiye çatıyı elde ettiler [10-12].

Bu tez çalışmamızda 3-boyutlu Öklid uzayında torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatıya göre küresel eğriler, helisler ve Bertrand eğrileri ele alınmıştır. Daha sonra uzay eğrilerinin gelişimi incelenerek regle yüzeyler 3-boyutlu Öklid uzayında torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatıya göre karakterize edilmiştir. Bu çatıya göre elde edilen tanjant, normal ve binormal regle yüzeylerin birinci ve ikinci temel form katsayıları hesaplanarak, Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği elde edilmiştir.

1. BÖLÜM

1.TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde temel bilgi niteliğinde olan ve diğer bölümlerde sıkça kullanılan yapılar verilecektir.

Tanım 1.1.1. Bir reel afin uzay A ve A ile bileşen vektör uzayı da V olsun. $x, y \in V$ olmak üzere,

$$\langle , \rangle = V \times V \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

şeklinde iç çarpım tanımlanırsa, A afin uzayına Öklid Uzayı denir ve E^3 ile gösterilir [13].

Tanım 1.1.2. I, $\mathbb{R}$'nin irtibatlı açık alt cümlesi olmak üzere,

$$\alpha: I \to E^3$$

$$s \to \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$$

dönüşümü diferansiyellenebilir ise $\alpha(I)$ cümlesine E^3de (I, α) komşuluğu ile tanımlanmış eğri ve $s \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi adı verilir [14].

Tanım 1.1.3. $\alpha: I \to E^3$ eğrisi verilsin.

$$\|\alpha'\|: I \to \mathbb{R},$$

$$t \to \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\|$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna, α eğrisinin skalar hız fonksiyonu ve $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da α nın $\alpha(t)$ noktasındaki skalar hızı denir. $\|\alpha'\| = 1$ ise α eğrisi birim hızlı eğridir ve bu durumda $s \in I$ parametresine yay parametresi adı verilir [13].

Tanım 1.1.4. E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\alpha: I \to E^3$ eğrisinin teğet, asli normal ve binormal vektörleri sırasıyla,

$$t(s) = \alpha'(s), \qquad n(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}, \qquad b(s) = t(s) \times n(s)$$

şeklinde tanımlanır [14].

Tanım 1.1.5. E^3, 3-boyutlu Öklid uzayındaki birim hızlı $\alpha: I \to E^3$ eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonu sırasıyla,

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|, \qquad \tau(s) = -\langle b'(s), n(s)\rangle$$

şeklinde verilir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir [14].

Teorem 1.1.1. Birim hızlı $\alpha: I \to E^3$, eğrisinin {t, n, b} Serret-Frenet vektörleri olmak üzere ;

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n \\ n' &= -\kappa t + \tau b \\ b' &= -\tau n \end{aligned} \qquad (1.1.1)$$

dir. Bu teoremde elde edilen eşitliklere α eğrisinin Serret-Frenet formülleri denir ve (1.1.1) denkleminden

$$\begin{bmatrix} t'(s) \\ n'(s) \\ b'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir [14].

Tanım 1.1.6. $M \subseteq E^n$ eğrisi ve $S^p \subseteq E^n$ p-hiper küresi verilmiş olsun. $M \subseteq S^p$ ise M'ye E^n'nin bir küresel eğrisi adı verilir. n=3 ve p=1 ise S^1 küresel eğrisi bir çember veya çember yayıdır. Bu eğri küre üzerinde ise eğriye küresel eğri denir [13].

Tanım 1.1.7. $\alpha: I \to E^3$, birim hızlı regüler bir eğri ve $\vec{u}$, α eğrisinin sabit vektörü olsun. Eğer $\vec{u}$ sabit vektörü ile α eğrisinin tanjant vektörü sabit açı yapıyorsa α eğrisine helis eğrisi denir [13].

Teorem 1.1.2 (Lancret teoremi). $\alpha: I \to E^3$, birim hızlı regüler bir eğri olsun. α eğrisinin helis olması için gerek ve yeter şart $\frac{\tau}{\kappa}$ = sabit olmasıdır [16].

Tanım 1.1.8. α_1 ve α_2 iki birim hızlı eğri olsun. Eğer α_1 eğrisinin $s = s_0$ daki n normali ve α_2 eğrisinin $s^* = s_0^*$ daki n^* normali lineer bağımlı ise (α_1 , α_2) ikilisine Bertrand eğri çifti denir. Bu tanıma göre iki eğri Bertrand eğri çifti ise $n = \mp n^*$ dır [13].

Tanım 1.1.9. V, E^2 uzayının irtibatlı bir açık alt kümesi olmak üzere, $X: V \subset E^2 \to E^3$, düzgün ve regüler bir dönüşüm olsun. $X: V \to X(V)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise $X(V)$ kümesine, 3-boyutlu Öklid uzayında bir basit yüzey denir [14].

Tanım 1.1.10. E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında bir X yüzeyi $X = X(u, v)$ şeklinde parametrelendirilmiş olsun. X yüzeyinin bir p noktasındaki T_pX tanjant uzayının baz vektörleri $\{X_u, X_v\}$ olmak üzere, X yüzeyinin p noktasındaki birim normal vektör alanı,

$$U = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}$$

şeklinde tanımlanır [16].

Tanım 1.1.11. X, E^3, Öklid uzayında bir regüler yüzey ve U, X yüzeyinin bir p noktasının komşuluğunda tanımlanan birim normal vektör olmak üzere, p noktasında X yüzeyinin bir X_p tanjant vektörü için,

$$S(X_p) = -D_x U$$

şeklinde tanımlanan S dönüşümüne şekil operatörü denir [16].

Lemma 1.1.1. E^3**,** 3-boyutlu Öklid uzayında $X = X(u, v)$ yüzeyi verilsin. X yüzeyinin bir p noktasındaki T_pX tanjant uzayının bir bazı $\{X_u, X_v\}$ ve U, X yüzeyinin birim normal vektör alanı olmak üzere,

$$S(X_u) = -U_u, \quad S(X_v) = -U_v$$

dir [16].

Tanım 1.1.12. X, E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında bir regüler yüzey, S, X yüzeyinin şekil operatörü ve X_p, Y_p vektörleri X yüzeyinin p noktasındaki tanjant vektörleri olmak üzere, X yüzeyinin,

birinci temel formu I,

$$I(X_p, Y_p) = \langle X_p, Y_p \rangle,$$

ikinci temel formu II,

$$II(X_p, Y_p) = \langle S(X_p), Y_p \rangle,$$

üçüncü temel formu III,

$$III(X_p, Y_p) = \langle S(X_p), S(Y_p) \rangle$$

şeklinde tanımlanır [16].

Tanım 1.1.13. X in birinci temel form katsayıları E, F, G ile ve ikinci temel form katsayıları L, M, N ile gösterilirse bu formlar sırasıyla;

$$E = \|X_u\|^2, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle, \quad G = \|X_v\|^2$$

$$L = \langle -U_u, X_u \rangle = \langle U, X_{uu} \rangle,$$

$$M = \langle -U_v, X_u \rangle = \langle U, X_{uv} \rangle = \langle U, X_{vu} \rangle = \langle -U_u, X_v \rangle,$$

$$N = \langle -U_v, X_v \rangle = \langle U, X_{vv} \rangle$$

şeklinde verilir [16].

Teorem 1.1.3. E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında $X = X(u, v)$ şeklinde parametrelendirilmiş X yüzeyinin, T_pX tanjant uzayının bazı $\{X_u, X_v\}$ ile gösterilsin. Bu baza göre şekil operatörü matrisi,

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{FM - GL}{EG - F^2} & -\frac{FN - GM}{EG - F^2} \\ -\frac{FL - EM}{EG - F^2} & -\frac{FM - EN}{EG - F^2} \end{pmatrix}$$

dir [16].

Tanım 1.1.14. E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında X regüler yüzeyinin K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği sırasıyla,

$$K(p) = \det\big(S(p)\big), \qquad H(p) = \frac{1}{2} iz(S(p))$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımın bir sonucu olarak Gauss ve ortalama eğrilikler,

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

$$H = \frac{GL + EN - 2FM}{2(EG - F^2)} \tag{1.1.2}$$

şeklinde formüle edilir [16].

Tanım 1.1.15. E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında ortalama eğriliği sıfır (H =0) olan yüzeye minimal yüzey, Gauss eğriliği sıfır (K = 0) olan yüzeye ise flat(düz) yüzey adı verilir [16].

Tanım 1.1.16. $M \subseteq E^3$ yüzeyi verilsin. $\forall P \in M$ noktasında E^3 ün M de kalan bir doğrusu var ise M ye bir regle yüzey ve $P \in M$ noktasından geçen ve M regle yüzeyinde kalan doğruya da M regle yüzeyinin doğrultmanı denir. Doğrunun üzerinde sürekli hareket ettiği eğriye ise regle yüzeyin dayanak eğrisi denir.Yani

$X(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{l}(s)$ bir regle yüzey olmak üzere burada $\vec{\alpha}(s)$ eğrisi regle yüzeyin dayanak eğrisi, $\vec{l}(s)$ ise regle yüzeyin doğrultmanıdır [17].

2. BÖLÜM

TORSİYON İLE MODİFİYE EDİLMİŞ ORTOGONAL ÇATI

Bu bölümde torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatı 3-boyutlu Öklid uzayında tanıtılmıştır.

Tanım 2.1.1. $\alpha: I \to E^3$ eğrisi analitik bir eğri olsun. Bu eğrinin Serret- Frenet vektörleri {t, n, b} olmak üzere $\{T, N, B\}$ torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatısı,

$$\begin{aligned} T &= t \\ N &= \tau n \\ B &= \tau b \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$\langle T,T\rangle = 1$, $\langle N,N\rangle = \langle B,B\rangle = \tau^2$, $\langle T,N\rangle = \langle N,B\rangle = \langle T,B\rangle = 0$ dır [10].

Teorem 2.1.1. Torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatı ile onun türev vektörleri arasında

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\kappa}{\tau} & 0 \\ -\kappa\tau & \frac{\tau'}{\tau} & \tau \\ 0 & -\tau & \frac{\tau'}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} \tag{2.1.2}$$

bağıntısı vardır. Burada τ burulması,

$$\tau(s) = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\kappa^2}$$

dir [10].

İspat. T', N', B' vektörleri $\{T, N, B\}$ çatısı cinsinden,

$$T' = a_{11}T + a_{12}N + a_{13}B$$

$$N' = a_{21}T + a_{22}N + a_{23}B \qquad (2.1.3)$$

$$B' = a_{31}T + a_{32}N + a_{33}B$$

yazılır. $\{T, N, B\}$ ortogonal sistemini kullanarak a_{ij} katsayıları,

$$\langle T', T\rangle = a_{11}\langle T, T\rangle + a_{12}\langle N, T\rangle + a_{13}\langle B, T\rangle$$

$$a_{11} = 0$$

$$\langle T', N\rangle = a_{11}\langle T, N\rangle + a_{12}\langle N, N\rangle + a_{13}\langle B, N\rangle$$

$$a_{12} = \frac{\kappa}{\tau}$$

$$\langle T', B\rangle = a_{11}\langle T, B\rangle + a_{12}\langle N, B\rangle + a_{13}\langle B, B\rangle$$

$$a_{13} = 0$$

$$\langle N', T\rangle = a_{21}\langle T, T\rangle + a_{22}\langle T, N\rangle + a_{23}\langle B, T\rangle$$

$$a_{21} = -\kappa\tau$$

$$\langle N', N\rangle = a_{21}\langle T, N\rangle + a_{22}\langle N, N\rangle + a_{23}\langle B, N\rangle$$

$$a_{22} = \frac{\tau'}{\tau}$$

$$\langle N', B\rangle = a_{21}\langle T, B\rangle + a_{22}\langle N, B\rangle + a_{23}\langle B, B\rangle$$

$$a_{23} = \tau$$

$$\langle B', T\rangle = a_{31}\langle T, T\rangle + a_{32}\langle T, N\rangle + a_{33}\langle B, T\rangle$$

$$a_{31} = 0$$

$$\langle B', N\rangle = a_{31}\langle T, N\rangle + a_{32}\langle N, N\rangle + a_{33}\langle B, N\rangle$$

$$a_{32} = -\tau$$

$$\langle B', B\rangle = a_{31}\langle T, B\rangle + a_{32}\langle N, B\rangle + a_{33}\langle B, B\rangle$$

$$a_{33} = \frac{\tau'}{\tau}$$

şeklinde bulunur. Bu katsayılar (2.1.3) denkleminde yerine konulursa ispat tamamlanır.

Teorem 2.1.2. $\mathbb{E}^{3'}$ de $\{T, N, B\}$ torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatı olmak üzere

$$T \wedge N = B,$$

$$N \wedge B = \tau^2 T,$$

$$B \wedge T = N$$

dir [10].

İspat. $\mathbb{E}^{3'}$ de $\{t, n, b\}$ Serret-Frenet vektörleri ve $\{T, N, B\}$ torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatı vektörleri olsun. Serret-Frenet vektörlerininin vektörel çarpımı

$$t \wedge n = b \quad , \quad n \wedge b = t \quad , \quad b \wedge t = n$$

şeklindedir ve Serret-Frenet çatı vektörleri ile torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatı vektörleri arasındaki ilişki

$$T = t \ , \ N = \tau n \ , \ B = \tau b$$

olduğundan, buradan torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatıdaki vektörel çarpımlara bakılacaktır.

$$t \wedge n = b$$

$$T \wedge \frac{N}{\tau} = \frac{B}{\tau}$$

$$T \wedge N = B$$

bulunur. Benzer şekilde

$$n \wedge b = t$$

$$\frac{N}{\tau} \wedge \frac{B}{\tau} = T$$

$$N \wedge B = \tau^2 T$$

ve

$$b \wedge t = n$$

$$\frac{B}{\tau} \wedge T = \frac{N}{\tau}$$

$$B \wedge T = N$$

şeklinde elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 2.1.1. $\alpha: I \to \mathbb{E}^3$

$$\alpha(s) = \left(\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}, \cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

birim hızlı eğrisini ele alalım. $\{t, n, b\}$ Serret-Frenet çatı ile $\{T, N, B\}$ torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatı elemanları aşağıdaki gibi bulunur.

Şimdi $\{t, n, b\}$ Serret-Frenet çatı elemanlarını bulalım.

$$t = \alpha'(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

$$n = \left(-\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 0, -\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

$$b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{2}} \\ -\sin\frac{s}{\sqrt{2}} & 0 & -\cos\frac{s}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

vektörleri bulunur.

$\alpha(s)$ eğrisinin eğriliği için;

$$\kappa = \|t'\| = \sqrt{\frac{1}{4}\sin^2\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\cos^2\frac{s}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}$$

bulunur.

$\alpha(s)$ eğrisinin torsiyonu için;

$$\tau = \frac{det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\kappa^2} = \frac{1}{2}$$

bulunur. Buradan hareketle (2.1.1) denkleminden

$$T = \alpha'(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

$$N = \tau n = \left(\frac{-1}{2} sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{2} cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

$$B = \tau b = \left(\frac{-1}{2\sqrt{2}} cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}} sin\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatı vektörleri bulunur.

3. BÖLÜM

ÜÇ BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA EĞRİLER

Bu bölümde torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatıda küresel eğriler, Bertrand ve helis eğrileri incelenmiştir.

3.1. Torsiyon İle Modifiye Edilmiş Ortogonal Çatıda Küresel Eğriler

Tanım 3.1.1. α eğrisi, E^3 'de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Eğer $\alpha \subset E^3$ ise α eğrisine E^3'ün küresel eğrisi adı verilir.

Tanım 3.1.2. $\alpha \subset E^3$ eğrisi ile $m \in \alpha$ noktasında sonsuz yakın dört ortak noktası olan küreye α eğrisinin oskülatör küresi veya eğrilik küresi denir.

Teorem 3.1.1. $\alpha \subset E^3$ eğrisinin $\alpha(s)$, $s \in I$ noktasındaki torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatı vektörleri {T, N, B} olsun. α eğrisi ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerin merkezlerinin geometrik yeri

$$a(s) = \alpha(s) + m_2(s)N(s) + m_3(s)B(s)$$

dir. Burada

$$m_2 : I \to R \, , m_2(s) = \frac{1}{\kappa\tau} \text{ ve } m_3(s) = \mp \frac{1}{\kappa\tau} \sqrt{r^2\kappa^2 - 1}$$

dir.

İspat . α eğrisi ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürenin merkezi a, yarıçapı r ile gösterilsin. Burada

$$f : I \to R$$

$$s \to f(s) = \langle a - \alpha(s), a - \alpha(s) \rangle - r^2$$

fonksiyonu tanımlansın.

Küre ile eğrinin sonsuz yakın üç ortak noktası olması için $f(s) = f'(s) = f''(s) = 0$ olmalıdır. Buradan

$$f(s) = \langle a - \alpha(s), a - \alpha(s)\rangle - r^2 = 0,$$

$$f'(s) = 0 \quad \Longrightarrow \langle T, a - \alpha(s)\rangle = 0,$$

$$f''(s) = 0 \quad \Longrightarrow \langle T', a - \alpha(s)\rangle + \langle T, -\alpha'(s)\rangle = 0 \tag{3.1.1}$$

bulunur. (3.1.1) denkleminde $T' = \frac{\kappa N}{\tau}$ ve $\alpha'(s) = T$ yazılıp düzenlenirse,

$$\langle N, a - \alpha(s)\rangle = \frac{\tau}{\kappa}$$

bulunur. Diğer yandan {T,N,B} bazı için

$$a - \alpha(s) = m_1(s)T(s) + m_2(s)N(s) + m_3(s)B(s) \tag{3.1.2}$$

yazılır. (3.1.2) eşitliğinin her tarafı T ile çarpılırsa,

$$m_1(s) = \langle a - \alpha(s), T(s)\rangle = 0$$

bulunur ve N ile çarpılırsa,

$$\langle a - \alpha(s), N(s)\rangle = m_2(s)\tau^2 \Longrightarrow m_2 = \frac{1}{\kappa\tau}$$

bulunur. $f(s) = 0$ eşitliği kullanılarak

$$\langle a - \alpha(s), a - \alpha(s)\rangle = r^2 \Longrightarrow m_1^2(s) + m_2^2(s)\tau^2 + m_3^2(s)\tau^2 = r^2 \tag{3.1.3}$$

bulunur. m_1 ve m_2 değerleri (3.1.3) denkleminde yazılıp düzenlenirse,

$$m_3(s) = \mp\frac{1}{\kappa\tau}\sqrt{r^2\kappa^2 - 1} = \lambda \in R$$

elde edilir. Böylece

$$a(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa\tau}N(s) \mp \frac{1}{\kappa\tau}\sqrt{r^2\kappa^2 - 1}\,B(s)$$

olup ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.1. α eğrisi, E^3 'de (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha(s)$ noktasında α ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerin merkezleri düz bir doğru üzerindedir.

İspat. Teorem 3.1.1 deki $a(s)=\alpha(s)+\frac{1}{\kappa\tau}N(s)+\lambda B(s)$ denklemi C(s)= $\alpha(s)+\frac{1}{\kappa\tau}N(s)$ noktasından geçen B'ye paralel bir doğru gösterir. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım 3.1.3. α eğrisi ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerin merkezlerinin geometrik yeri $\alpha(s)$ noktasındaki eğrilik ekseni olup, denklemi

$$a(s)=\alpha(s)+\frac{1}{\kappa\tau}N(s)+\lambda B(s)$$

dir. Burada

$$\text{C(s)}=\alpha(s)+\frac{1}{\kappa\tau}N(s)$$

noktası da eğrilik merkezi olarak adlandırılır.

Teorem 3.1.2. α eğrisi, E^3 'de (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Eğer

$$a(s)=\alpha(s)+m_2(s)N(s)+m_3(s)B(s)$$

oskülatör kürenin merkezi ise o zaman

$$m_2(s)=\frac{1}{\kappa\tau}\ \ , m_3(s)=-\frac{K'}{K^2\tau^2}$$

dir.

İspat . Bu teoremin ispatı Teorem 3.1.1 in ispatı ile benzerdir. α eğrisi ile oskülatör kürenin sonsuz yakın dört ortak noktası vardı. Yani $f(s)=f'(s)=f''(s)=f'''(s)=0$ dır. $f''(s)=0$ eşitliğinden bir daha türev alınırsa ;

$$\frac{\kappa'}{\kappa}-\frac{\tau'}{\tau}+\left(\frac{\kappa}{\tau}\left(-\kappa\tau\langle T,a-\alpha(s)\rangle+\frac{\tau'}{\tau}\langle N,a-\alpha(s)\rangle+\tau\langle B,a-\alpha(s)\rangle\right)\right)=0$$

olup gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\langle B,a-\alpha(s)\rangle=-\frac{\kappa'}{K^2}\ \ \Longrightarrow\ \ m_3(s)=-\frac{K'}{K^2\tau^2}$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.2. α eğrisi , E^3 'de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha(s)$ noktasında oskülatör kürenin yarıçapı r ise o zaman

$$r = \sqrt{[m_2^2(s) + m_3^2(s)]\tau^2} = \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} + \left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)^2}$$

dir.

İspat. $\alpha(s)$ noktasında oskülatör kürenin merkezi

$$a(s) = \alpha(s) + m_2(s)N(s) + m_3(s)B(s)$$

idi. Buradan

$$r = \|a - \alpha(s)\| = \sqrt{m_2^2\langle N, N\rangle + m_3^2\langle B, B\rangle} = \sqrt{[m_2^2(s) + m_3^2(s)]\tau^2} = \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} + \left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)^2}$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.1.3. S_0^2, 0 merkezli küresi ve $\alpha \subset S_0^2$ küresel eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ için

$$-m_1(s) = \langle \alpha(s), T\rangle\,,\ -m_2(s) = \frac{\langle \alpha(s), N\rangle}{\tau^2}\,,\ -m_3(s) = \frac{\langle \alpha(s), B\rangle}{\tau^2}$$

dir.

İspat. $\alpha \subset S_0^2$ olduğundan

$$\vec{0} = \alpha(s) + m_1 T + m_2 N + m_3 B$$

olarak yazılır. $\langle \alpha(s), \alpha(s)\rangle = r^2$ eşitliğinin s 'ye göre türevi alınıp düzenlenirse,

$$-m_1 = \langle \alpha(s), T\rangle = 0$$

dır. Bu eşitliğin türevi alınıp düzenlenirse,

$$\langle \alpha(s), N\rangle = -\frac{\tau}{\kappa}$$

elde edilir. $-m_2 = -\frac{1}{\kappa\tau}$ olduğundan

$$-m_2(s) = \frac{\langle \alpha(s), N\rangle}{\tau^2}$$

dir. Bu son eşitliğin tekrar türevi alınıp düzenlenirse,

$$\langle \alpha(s), B\rangle = \frac{\kappa'}{K^2}$$

bulunur.

$-m_3(s) = -\frac{K'}{K^2\tau^2}$ olduğundan

$$-m_3(s) = \frac{\langle \alpha(s), B\rangle}{\tau^2}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.4. S_0^2, 0 merkezli küre olsun. Eğer $\alpha \subset S_0^2$ ise α eğrisinin her noktasındaki oskülatör küresi S_0^2 dir.

İspat. α eğrisi , (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Teorem 3.1.2'den

$$a(s) = \alpha(s) + m_2(s)N(s) + m_3(s)B(s)$$

idi. Ayrıca Teorem 3.1.3'den bu eşitlik

$$a(s) = \alpha(s) - \frac{\langle \alpha(s), N\rangle}{\tau^2}N(s) - \frac{\langle \alpha(s), B\rangle}{\tau^2}B(s)$$

olarak yazılır. $\langle \alpha(s), T\rangle = 0$ olduğundan,

$$\alpha(s) = \frac{\langle \alpha(s), N\rangle}{\tau^2}N(s) + \frac{\langle \alpha(s), B\rangle}{\tau^2}B(s)$$

elde edilir. Böylece $a = \alpha(s) - \alpha(s) = 0$ olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.5. α eğrisi, E^3 'de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $m_3(s) \neq 0$ ve $\tau \neq 0$ olacak şekilde $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasında oskülatör kürenin yarıçapı sabittir⇔ Oskülatör kürenin merkezi de sabittir.

İspat. ⇒: r sabit olsun. Sonuç 3.1.2 den

$$r^2 = \tau^2(m_2^2(s) + m_3^2(s))$$

yazılır. Bu eşitliğin s'ye göre türevi alınıp düzenlenirse,

$$(2m_2m_2' + 2m_3m_3')\tau^2 + 2\tau\tau'(m_2^2 + m_3^2) = 0$$

veya

$$m_3' + \frac{\tau'}{\tau}m_3 = -\frac{\tau'}{\tau}\frac{m_2}{m_3}m_2 - \frac{m_2}{m_3}m_2' \qquad (3.1.4)$$

bulunur. (3.1.4) denkleminde $m_2 = \frac{1}{\kappa\tau}$, $m_3 = -\frac{K'}{K^2\tau^2}$ ve $m_2' = -\frac{\kappa'\tau+\tau'\kappa}{K^2\tau^2}$ değerleri yerine yazılıp düzenlenirse,

$$m_3' + \frac{\tau'}{\tau}m_3 = -\frac{1}{\kappa} = -\tau m_2$$

yani

$$m_3' + \frac{\tau'}{\tau}m_3 + \tau m_2 = 0 \qquad (3.1.5)$$

bulunur. Diğer yandan, {T, N, B} bazı için

$$a(s) = \alpha(s) + m_1(s)T(s) + m_2(s)N(s) + m_3(s)B(s)$$

idi. s'ye göre türevi alınıp düzenlenirse,

$$a'(s) = (1 - \kappa\tau m_2)T + \left(m_2' + m_2\frac{\tau'}{\tau} - \tau m_3\right)N + \left(\tau m_2 + m_3' + \frac{\tau'}{\tau}m_3\right)B \qquad (3.1.6)$$

bulunur. $m_2 = \frac{1}{\kappa\tau}$, $m_3 = -\frac{K'}{K^2\tau^2}$ ve $m_2' = -\frac{\kappa'\tau+\tau'\kappa}{K^2\tau^2}$ değerleri (3.1.6) denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse,

$$a'(s) = \left(\tau m_2 + m_3' + \frac{\tau'}{\tau}m_3\right)B$$

bulunur. (3.1.5) 'den $a'(s) = 0$ olarak elde edilir. Yani $a(s)$ =sabittir.

$\Leftarrow$: Tersine $a(s)$ sabit olsun. $\langle a(s) - \alpha(s), a(s) - \alpha(s)\rangle = r^2(s)$ denkleminin s'ye göre türevi alınırsa

$$r(s)r'(s) = 0$$

bulunur. Burada ya $r(s) = 0$ yada $r'(s) = 0$ dır.

$\boldsymbol{i}$) $r(s) = 0$ ise, Sonuç 3.1.2 den $[m_2^2(s) + m_3^2(s)]\tau^2 = 0, \tau \neq 0$ olur. Yani

$m_2^2(s) = -m_3^2(s) = 0$ gelir ki bu da teorem ile çelişir.

$\boldsymbol{ii}$) i den dolayı $r'(s) = 0$ olup $r(s)$ sabittir.

Teorem 3.1.6. α eğrisi, E^3 'de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin ve $\forall s \in I$ için $m_3(s) \neq 0$ ve $\tau \neq 0$ olsun. Bu takdirde α küresel eğridir $\Leftrightarrow$ $\alpha(s)$ noktasında oskülatör kürelerin merkezleri de aynı noktada yer alır.

İspat. α, r yarıçaplı herhangi b noktası merkezli S_b^2 üzerinde bir eğri olsun. Teorem 3.1.4 den ispat açıktır. Tersine oskülatör kürelerin merkezleri b noktası olsun. Teorem 3.1.5 den tüm oskülatör küreler aynı r yarıçaplıdır. Böylece $d(\alpha(s), b) = r$ olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.7. α eğrisi , E^3 'de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $m_3(s) \neq 0$, $\tau \neq 0$ ve s yay parametresi olmak üzere

α küresel eğridir $\Leftrightarrow \left[\left(\frac{-\kappa'}{\kappa^2\tau^2}\right)' - \frac{\tau'\kappa'}{\kappa^2\tau^3} + \frac{1}{\kappa} = 0\right]$ dır.

İspat. $\Rightarrow$: α küresel bir eğri olsun. Teorem 3.1.6 dan oskülatör kürelerin merkezi olan $a(s)$ sabittir. Ayrıca denklem (3.1.5) den

$$m_3' + \frac{\tau'}{\tau} m_3 + \tau m_2 = 0 \qquad \text{yada} \qquad \left[\left(\frac{-\kappa'}{\kappa^2\tau^2}\right)' - \frac{\tau'\kappa'}{\kappa^2\tau^3} + \frac{1}{\kappa} = 0\right]$$

dır.

$\Leftarrow$: Tersine $m_3' + \frac{\tau'}{\tau} m_3 + \tau m_2 = 0$ olsun. Teorem 3.1.5 den $a'(s) = 0$ olup $a(s)$ sabit gelir. Böylece Teorem 3.1.6 dan α küresel bir eğridir.

Örnek 3.1.1. E^3 'de bir α eğrisi, $c = 2\sqrt{ab}$ ve $r = a + b$ olmak üzere

$$\alpha(t) = (acost + bcos3t,\ asint - bsin3t, csin2t)$$

şeklinde verilsin. $t = 0$ noktasındaki oskülatör kürenin yarıçapını ve merkezinin koordinatlarını bulalım. Burada,

$$\alpha'(t) = (-asint - 3bsin3t, acost - 3bcos3t, 2ccos2t)$$

$$\alpha''(t) = (-acost - 9bcos3t, -asint + 9bsin3t, -4csin2t)$$

$$\alpha'''(t) = (asint + 27bsin3t, -acost + 27bcos3t, -8ccos2t)$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(a + 3b)^2 + (ccos2t)^2}$$

dir. Şimdi $t = 0$, $a = 1,\ b = 1, c = 2, r = 2$ için

$\alpha(0) = (2,0,0)$, $\alpha'(0) = (0,-2,4)$, $\alpha''(0) = (-10,0,0)$, $\alpha'''(0) = (0,26,-16)$ dır.

$\|\alpha'(0)\| = 2\sqrt{5}$ olup buna göre t,n,b ler hesaplanırsa ;

$$t = \frac{\alpha'(0)}{\|\alpha'(0)\|} = \frac{(0,-2,4)}{2\sqrt{5}} = (0, \frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$$

$$b = \frac{\alpha'(0) \wedge \alpha''(0)}{\|\alpha'(0) \wedge \alpha''(0)\|} = \frac{(0,-40,-20)}{20\sqrt{5}} = (0, \frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}})$$

$$n = b * t = (-1,0,0)$$

bulunur. α eğrisinin eğrilik ve torsiyonu da

$$\kappa = \frac{\|\alpha'(0) \wedge \alpha''(0)\|}{\|\alpha'(0)\|^3} = \frac{1}{2}$$

$$\tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha'(0) \wedge \alpha''(0)\|^2} = \frac{-9}{25}$$

dır. Torsiyon ile modifiye edilmiş T, N, B ortogonal çatı elemanları;

$$T = t = (0, \frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$$

$$N = \tau n = (\frac{-9}{25}, 0,0)$$

$$B = \tau b = (0, \frac{18}{25\sqrt{5}}, \frac{9}{25\sqrt{5}})$$

olarak bulunur. $\alpha(0)$ noktasındaki oskülatör kürenin merkezinin koordinatları

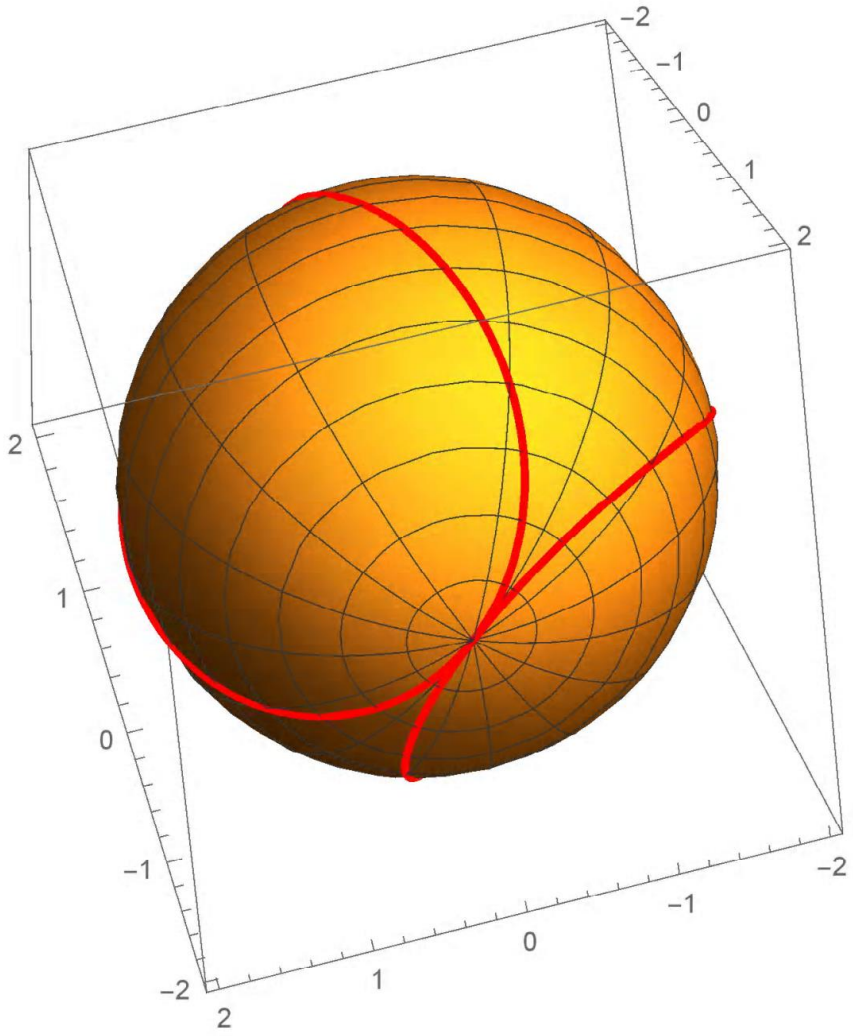
$$a(t) = \alpha(t) + m_2(t)N(t) \Rightarrow m_2 = \frac{1}{\kappa\tau} = \frac{-50}{9}$$

$$a(0) = (4,0,0)$$

olup $\alpha(0)$ noktasındaki oskülatör kürenin yarıçapı

$$r = \sqrt{(m_2^2(t) + m_3^2(t))\tau^2} = 2$$

dir.



Şekil 3.1.1. α, küresel eğrisi

3.2. Torsiyon İle Modifiye Edilmiş Ortogonal Çatıda Bertrand Eğrileri

Teorem 3.2.1. Torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatıya göre $(\alpha(s), \beta(s))$ Bertrand eğri çiftinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık sabittir.

İspat. $(\alpha(s), \beta(s))$ Bertrand eğri çifti olduğundan N_α ve N_β paralel olup

$$\beta(s) = \alpha(s) + \delta(s)N_\alpha(s) \tag{3.2.1}$$

şeklinde yazılır. (3.2.1) denkleminin s'e göre türevi alınıp düzenlenirse,

$$\beta'(s) = (1 - \delta\kappa_\alpha\tau_\alpha)T_\alpha + \left(\delta' + \delta\frac{\tau_\alpha'}{\tau_\alpha}\right)N_\alpha + \delta\tau B_\alpha \tag{3.2.2}$$

bulunur. Şimdi (3.2.2) eşitliğinin her tarafı N_α ile iç çarpılırsa,

$$\langle \beta'(s), N_\alpha \rangle = \delta' + \delta\frac{\tau_\alpha'}{\tau_\alpha} = 0$$

bulunur. Bu son eşitliğin integrali alınırsa;

$$\delta(s) = \frac{c}{\tau_\alpha}, \quad .\, c \neq 0, c \in \mathbb{R}$$

bulunur. Böylece,

$$\|\beta(s) - \alpha(s)\| = \left\|\frac{c}{\tau_\alpha}N_\alpha(s)\right\| = |c|\left|\frac{1}{\tau_\alpha}\right||\tau_\alpha| = |c| = \text{sabit}$$

elde edilir.

Lemma 3.2.1. $(\alpha(s), \beta(s))$ Bertrand eğri çiftinin teğetleri arasındaki açı sabittir.

İspat. $\langle T_\alpha, T_\beta \rangle$ ifadesinin diferansiyeli alınır ve $\frac{N_\alpha}{\tau_\alpha} = \pm\frac{N_\beta}{\tau_\beta}$ eşitliği kullanılırsa,

$$\frac{d}{ds}\langle T_\alpha, T_\beta \rangle = \langle T_\alpha', T_\beta \rangle + \langle T_\alpha, T_\beta' \rangle$$

$$= \langle N_\alpha, T_\beta \rangle + \langle T_\alpha, N_\beta \rangle = 0$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2. $\tau_\alpha \neq 0$ olmak üzere $(\alpha(s), \beta(s))$ Bertrand eğri çiftidir $\Leftrightarrow$

$c\kappa_\alpha + ac\tau_\alpha = 1$ dir. Burada $a = cot\theta$ ve c=sabittir.

İspat. ⇒: Torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatıda

$$T_\alpha = t_\alpha,\ \ N_\alpha = \tau_\alpha n_\alpha,\ \ B_\alpha = \tau_\alpha b_\alpha$$

$$T_\beta = t_\beta,\ \ N_\beta = \tau_\beta n_\beta,\ \ B_\beta = \tau_\beta b_\beta$$

dır. Lemma 3.2.1 den $T_\alpha\ ile\ T_\beta$ arasındaki θ açısının sabit olduğundan

$$T_\beta = cos\theta T_\alpha + \frac{sin\theta}{\tau_\alpha} B_\alpha$$

yazılır. (3.2.2) denkleminde $\frac{\delta'}{\delta} = -\frac{\tau_\alpha'}{\tau_\alpha}$ ve $\delta(s) = \frac{c}{\tau_\alpha}$ yazılıp düzenlenirse,

$$\beta'(s) = (1 - c\kappa_\alpha)T_\alpha + cB_\alpha$$

bulunur. Buradan

$$\frac{1-c\kappa_\alpha}{cos\theta} = \frac{c}{\frac{sin\theta}{\tau_\alpha}}$$

yada

$$c\kappa_\alpha + ac\tau_\alpha = 1 \quad a = cot\theta$$

bulunur.

⇐: Tersine $c\kappa_\alpha + ac\tau_\alpha = 1$ olsun. $\beta(s)$ eğrisi Bertrand eğri tanımından

$$\beta(s) = \alpha(s) + \delta(s)N_\alpha(s)$$

yazılır.

$$\beta'(s) = (1 - c\kappa_\alpha)T_\alpha + cB_\alpha$$

olduğu bilinmektedir.

$$\beta'(s) = (ac\tau_\alpha)T_\alpha + cB_\alpha$$

olur. Buradan

$$T_\beta = \frac{\beta'(s)}{|\beta'(s)|} = \frac{(ac\tau_\alpha)T_\alpha + cB_\alpha}{|c\tau_\alpha|\sqrt{a^2+1}} = \pm\frac{(a\tau_\alpha)T_\alpha + B_\alpha}{\tau_\alpha\sqrt{a^2+1}}$$

bulunur. Bu son eşitliğin s^* a göre diferansiyeli alınırsa,

$$\frac{dT_\beta}{ds^*} = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\left\{aT_\alpha' + \frac{B_\alpha'\tau_\alpha - \tau_\alpha' B_\alpha}{\tau_\alpha^2}\right\}\frac{ds}{ds^*} \qquad (3.2.3)$$

bulunur. Gerekli ifadeler (3.2.3) denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse,

$$N_\beta = \pm \frac{a\frac{\kappa_\alpha}{\tau_\alpha}-1}{\sqrt{a^2+1}} \frac{ds}{ds^*} N_\alpha$$

yada

$$\frac{N_\beta}{\tau_\beta} = \pm \frac{a\frac{\kappa_\alpha}{\tau_\alpha}-1}{\sqrt{a^2+1}} \frac{ds}{ds^*} \frac{\tau_\alpha}{\tau_\beta} \frac{N_\alpha}{\tau_\alpha}$$

olur. $\frac{N_\beta}{\tau_\beta}$ ve $\pm\frac{N_\alpha}{\tau_\alpha}$ birim vektörler olduğundan

$$\frac{ds^*}{ds} = \pm \frac{a\frac{\kappa_\alpha}{\tau_\alpha}-1}{\sqrt{a^2+1}} \frac{\tau_\alpha}{\tau_\beta}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{N_\alpha}{\tau_\alpha} = \pm \frac{N_\beta}{\tau_\beta}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.3. α eğrisi üzerinde P_α, β eğrisi üzerinde P_β ilgili noktalarında

(a) κ_α sabittir.

(b) τ_β sabittir.

(c) T_α, T_β 'ye paraleldir.

olacak şekilde α ve β eğrilerinin noktaları arasında birebir eşleme olduğunu kabul edelim. Bu takdirde h:1 oranında $P_\alpha P_\beta$ segmentini bölen P tarafından üretilen γ eğrisi Bertrand eğrisidir.

İspat. Sırasıyla γ , α , β eğrileri üzerinde P, P_α, P_β noktalarında koordinat vektörleri $\phi(s)$, $\phi_\alpha(s)$, $\phi_\beta(s)$ olsun. P noktasının denklemi

$$\phi(s) = h\phi_\alpha(s) + (1-h)\phi_\beta(s) \ , h \in R, h \in [0,1] \qquad (3.2.4)$$

dır. (3.2.4) denkleminin s'e göre türevi alınır ve $T_\alpha = T_\beta$ hipotezi kullanılırsa,

$$Tds = hT_\alpha ds_\alpha + (1-h)T_\beta\, ds_\beta = [hds_\alpha + (1-h)ds_\beta]T_\alpha \tag{3.2.5}$$

$$T = T_\alpha = T_\beta \tag{3.2.6}$$

$$h\frac{ds_\alpha}{ds} + (1-h)\frac{ds_\beta}{ds} = 1 \tag{3.2.7}$$

bulunur. Benzer olarak (3.2.6) 'nın diferansiyeli alınırsa

$$\frac{\kappa}{\tau}Nds = \frac{\kappa_\alpha}{\tau_\alpha}N_\alpha ds_\alpha = \frac{\kappa_\beta}{\tau_\beta}N_\beta\, ds_\beta \tag{3.2.8}$$

bulunur. Buradan

$$\kappa ds = \kappa_\alpha ds_\alpha = \kappa_\beta\, ds_\beta \tag{3.2.9}$$

dir. Ayrıca

$$\frac{ds_\alpha}{ds} = \frac{\kappa}{\kappa_\alpha} \tag{3.2.10}$$

$$\frac{N}{\tau} = \frac{N_\alpha}{\tau_\alpha} = \frac{N_\beta}{\tau_\beta} \tag{3.2.11}$$

dir. (3.2.6) ve (3.2.11) denklemlerinin vektörel çarpımından

$$\frac{B}{\tau} = \frac{B_\alpha}{\tau_\alpha} = \frac{B_\beta}{\tau_\beta} \tag{3.2.12}$$

bulunur. (3.2.12) denkleminin diferansiyeli alınırsa,

$$Nds = N_\alpha ds_\alpha = N_\beta\, ds_\beta \tag{3.2.13}$$

dir. Ayrıca

$$\frac{ds_\beta}{ds} = \frac{\tau}{\tau_\beta} \tag{3.2.14}$$

dir. (3.2.7) denkleminde (3.2.10) ve (3.2.14) ifadeleri yerine yazılırsa

$$\left(\frac{h}{\kappa_\alpha}\right)\kappa + \left(\frac{1-h}{\tau_\beta}\right)\tau = 1$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.4. Teorem (3.2.3) de (c) şartı B_α ve B_β binormalleri paralel olacak şekilde değiştirilirse, γ eğrisi Bertrand eğrisidir.

İspat. $\frac{B_\alpha}{\tau_\alpha} = \frac{B_\beta}{\tau_\beta}$ olduğundan (3.2.13) ve (3.2.14) denklemlerindeki gibi

$$N_\alpha ds_\alpha = N_\beta ds_\beta \tag{3.2.15}$$

ve

$$\frac{ds_\beta}{ds_\alpha} = \frac{\tau_\alpha}{\tau_\beta} \tag{3.2.16}$$

bulunur. (3.2.16) denklemi kullanılarak (3.2.15) denklemi yeniden yazılırsa,

$$N_\alpha = N_\beta \frac{\tau_\alpha}{\tau_\beta}$$

bulunur. Buradan

$$T_\alpha = \frac{N_\alpha}{\tau_\alpha} * \frac{B_\alpha}{\tau_\alpha} = \frac{1}{{\tau_\alpha}^2}\left(N_\beta \frac{\tau_\alpha}{\tau_\beta} * B_\beta \frac{\tau_\alpha}{\tau_\beta}\right) = \frac{N_\beta}{\tau_\beta} * \frac{B_\beta}{\tau_\beta} = T_\beta$$

elde edilir. Böylece T_α, T_β 'ye paralel olup Teorem 3.2.3 den γ eğrisi Bertrand eğrisidir.

Teorem 3.2.5. Teorem (3.2.3) de (c) şartı T_α tanjantı B_β binormaline paralel olacak şekilde değiştirilirse, γ eğrisi Bertrand eğrisidir.

İspat. $T_\alpha = \frac{B_\beta}{\tau_\beta}$ olduğundan türevi alınırsa,

$$-N_\beta ds_\beta = \frac{\kappa_\alpha}{\tau_\alpha} N_\alpha ds_\alpha \tag{3.2.17}$$

bulunur. N_α ve N_β paralel ve $\frac{N_\alpha}{\tau_\alpha}$ ve $\frac{N_\beta}{\tau_\beta}$ birim vektörler olduğundan

$$\frac{N_\alpha}{\tau_\alpha} = \pm \frac{N_\beta}{\tau_\beta} \tag{3.2.18}$$

bulunur. (3.2.17) ve (3.2.18) denklemlerinden,

$$\frac{ds_\beta}{ds_\alpha} = -\frac{\kappa_\alpha}{\tau_\beta} \tag{3.2.19}$$

bulunur. Ayrıca

$$B_\alpha = T_\alpha * N_\alpha = \frac{B_\beta}{\tau_\beta} * \frac{\tau_\alpha}{\tau_\beta} N_\beta = \frac{\tau_\alpha}{{\tau_\beta}^2}\left(B_\beta * N_\beta\right) = -\tau_\alpha T_\beta$$

olup buradan

$$T_\beta = -\frac{B_\alpha}{\tau_\alpha} \tag{3.2.20}$$

bulunur. Şimdi sırasıyla γ , α , β eğrileri üzerinde P, P_α, P_β noktalarında koordinat vektörleri R, R_α, R_β olsun. O halde

$$R = hR_\alpha + (1-h)R_\beta \tag{3.2.21}$$

dır. (3.2.21) denkleminin s'e göre türevi alınır ve (3.2.17) denklemi kullanılırsa,

$$T = [hT_\alpha - (1-h)T_\beta \frac{\kappa_\alpha}{\tau_\beta}] \frac{ds_\alpha}{ds} \tag{3.2.22}$$

bulunur. (3.2.22) denkleminin normu alınırsa,

$$\frac{ds_\alpha}{ds} = \frac{\tau_\beta}{\sqrt{h^2\tau_\beta^2 + \kappa_\alpha^2(1-h)^2}} \tag{3.2.23}$$

bulunur. (3.2.23) denkleminin yardımıyla (3.2.22) denklemi yeniden yazılırsa,

$$T = [\frac{h\tau_\beta}{\sqrt{h^2\tau_\beta^2 + \kappa_\alpha^2(1-h)^2}}]T_\varphi + [\frac{-(1-h)\kappa_\alpha}{\sqrt{h^2\tau_\beta^2 + \kappa_\alpha^2(1-h)^2}}]T_\beta$$

ya da

$$T = h_\alpha T_\alpha + h_\beta T_\beta \tag{3.2.24}$$

bulunur. Burada

$$h\frac{ds_\alpha}{ds} = \frac{h\tau_\beta}{\sqrt{h^2\tau_\beta^2 + \kappa_\alpha^2(1-h)^2}} = h_\alpha, \qquad h_\alpha = sabit$$

$$\frac{-(1-h)\kappa_\alpha}{\sqrt{h^2\tau_\beta^2 + \kappa_\alpha^2(1-h)^2}} = h_\beta\,, \qquad h_\beta = sabit$$

dir. (3.2.24) denkleminin diferansiyeli alınırsa,

$$\frac{\kappa}{\tau} N ds = h_\alpha \frac{\kappa_\alpha}{\tau_\alpha} N_\alpha ds_\alpha + h_\beta \frac{\kappa_\beta}{\tau_\beta} N_\beta\, ds_\beta \tag{3.2.25}$$

bulunur. (3.2.25) denkleminin normu alınırsa,

$$\kappa ds = h_\alpha \kappa_\alpha ds_\alpha + h_\beta \, \kappa_\beta \, ds_\beta \tag{3.2.26}$$

dır. Buradan

$$\frac{N}{\tau} = \frac{N_\alpha}{\tau_\alpha} = \frac{N_\beta}{\tau_\beta} \tag{3.2.27}$$

olur. (3.2.24) ve (3.2.27) denklemlerinin vektörel çarpımından

$$\frac{B}{\tau} = h_\alpha \frac{B_\alpha}{\tau_\alpha} + h_\beta \, \frac{B_\beta}{\tau_\beta} \tag{3.2.28}$$

dır. (3.2.28) denkleminin diferansiyeli alınırsa,

$$Nds = N_\alpha h_\alpha ds_\alpha + N_\beta \, h_\beta \, ds_\beta \tag{3.2.29}$$

bulunur. (3.2.27) ve (3.2.29) denklemlerinden

$$\tau = \tau_\alpha h_\alpha \frac{ds_\alpha}{ds} + \tau_\beta \, h_\beta \, \frac{ds_\beta}{ds} \tag{3.2.30}$$

bulunur. (3.2.19) ve (3.2.20) denklemleri kullanılırsa,

$$\frac{ds_\beta}{ds_\alpha} = -\frac{\kappa_\alpha}{\tau_\beta} = \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\beta}$$

ve

$$\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = -\frac{\kappa_\beta}{\tau_\beta} \tag{3.2.31}$$

bulunur. Kabul edelim ki,

$$M_\alpha = h_\alpha \frac{ds_\alpha}{ds}, \qquad M_\beta \, = h_\beta \, \frac{ds_\beta}{ds}$$

olsun. Bu takdirde (3.2.26), (3.2.30) ve (3.2.31) denklemlerinden

$$\frac{\kappa}{\tau_\beta \, M_\beta} + \frac{\tau}{\kappa_\alpha M_\alpha} = \frac{\kappa_\alpha M_\alpha + \kappa_\beta \, M_\beta}{\tau_\beta \, M_\beta} + \frac{\tau_\alpha M_\alpha + \tau_\beta \, M_\beta}{\kappa_\alpha M_\alpha}$$

$$= \frac{\kappa_\alpha}{\tau_\beta} \frac{M_\alpha}{M_\beta} + \left(\frac{\kappa_\beta}{\tau_\beta} + \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right) + \frac{\tau_\beta}{\kappa_\alpha} \frac{M_\beta}{M_\alpha}$$

$$= \frac{\kappa_\alpha}{\tau_\beta} \frac{M_\alpha}{M_\beta} + \frac{\tau_\beta}{\kappa_\alpha} \frac{M_\beta}{M_\alpha} = \text{sabit}$$

elde edilir ve bu da Bertrand eğrisinin temel denklemidir.

3.3.Torsiyon ile Modifiye Edilmiş Ortogonal Çatıda Helis Eğrisi

Torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatı elemanları için

$$\alpha'(s) = t = T$$

$$D_T T = \frac{\kappa}{\tau} N$$

$$D_T N = -\kappa\tau T + \frac{\tau'}{\tau} N + \tau B$$

$$D_T B = -\tau N + \frac{\tau'}{\tau} B$$

eşitliklerinin sağlandığı bilinmektedir.

Teorem 3.3.1. α torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatıya göre genel helistir $\Leftrightarrow$ $D_T D_T D_T T = \mu N + \frac{3\kappa'}{\tau} D_T N$ dir. Burada $\mu = \frac{\kappa''}{\tau} - \frac{\kappa^3}{\tau} - \kappa\tau - \frac{3\kappa'\tau'}{\tau^2}$ dir.

İspat. $\Rightarrow$: α genel helis olsun.

$$D_T D_T T = D_T\left(\frac{\kappa}{\tau} N\right) = \frac{(\kappa' N + N'\kappa)\tau - \tau'\kappa N}{\tau^2}$$

olup N' yerine yazılıp düzenlenirse,

$$D_T D_T T = -\kappa^2 T + \frac{\kappa'}{\tau} N + \kappa B$$

bulunur. Bu son eşitliğin bir kez daha türev alınır ve düzenlenirse,

$$D_T D_T D_T T = D_T\left(-\kappa^2 T + \frac{\kappa'}{\tau} N + \kappa B\right) = -3\kappa\kappa' T + \left(\frac{\kappa''}{\tau} - \frac{\kappa^3}{\tau} - \kappa\tau\right) N + \left(2\kappa' + \frac{\kappa\tau'}{\tau}\right) B$$

$$= -3\kappa\kappa' T + \left(\frac{\kappa''}{\tau} - \frac{\kappa^3}{\tau} - \kappa\tau\right) N + \frac{1}{\tau}\left(2\kappa' + \frac{\kappa\tau'}{\tau}\right)\left(D_T N + \kappa\tau T - \frac{\tau'}{\tau} N\right) \quad (3.3.1)$$

bulunur. α genel helis olduğundan $\frac{\tau}{\kappa}$ =sabittir. Buradan $\tau'\kappa = \kappa'\tau$ yada $\frac{\kappa'}{\kappa} = \frac{\tau'}{\tau}$ dur. Bu ifade (3.3.1) denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse,

$$D_T D_T D_T T = \left(\frac{\kappa''}{\tau} - \frac{\kappa^3}{\tau} - \kappa\tau - \frac{3\kappa'\tau'}{\tau^2}\right) N + \frac{3\kappa'}{\tau} D_T N$$

bulunur.

⇐: Tersine $D_T D_T D_T T = \mu N + \frac{3\kappa'}{\tau} D_T N$ olsun.

$$D_T D_T N = \mu N + \frac{3\kappa'}{\tau}(-\kappa\tau T + \frac{\tau'}{\tau} N + \tau B)$$

$$= -3\kappa\kappa' T + \left(\mu + \frac{3\kappa'\tau'}{\tau^2}\right) \mathrm{N} + 3\kappa' B$$

bulunur. (3.3.1) eşitliğinden katsayılar eşitlenirse,

$$2\kappa' + \frac{\kappa\tau'}{\tau} = 3\kappa'$$

bulunur ki buradan $\frac{\kappa'}{\kappa} = \frac{\tau'}{\tau}$ olup $\frac{\tau}{\kappa} =$ sabittir ve α genel helistir.

Teorem 3.3.2. α torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatıya göre genel helis ise $\det(T', T'', T''') = 0$ dır.

İspat. α genel helis yani $\frac{\tau}{\kappa} =$ sabit olsun. α nın türevleri alınırsa,

$$\alpha' = T$$

$$\alpha'' = T' = \frac{\kappa}{\tau} N$$

$$\alpha''' = T'' = -\kappa^2 T + \frac{\kappa'}{\tau} N + \kappa B$$

$$\alpha'''' = T''' = -3\kappa\kappa' T + \left(\frac{\kappa''}{\tau} - \frac{\kappa^3}{\tau} - \kappa\tau\right) N + \left(2\kappa' + \frac{\kappa\tau'}{\tau}\right) B$$

bulunur.α genel helis olduğundan

$$2\kappa' + \frac{\kappa\tau'}{\tau} = 3\kappa'$$

yazılır. Böylelikle $\det(T', T'', T''') = 0$ elde edilir.

Teorem 3.3.3. $\tau \neq 0$ sabit ve κ sabit olmayacak şekilde α birim hızlı eğrisi verilsin.

α slant helistir $\Leftrightarrow \frac{\kappa'}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}}$ = sabittir.

İspat. ⇒: $\langle N(s), U\rangle = c$ sabit olacak şekilde U vektör alanı vardır. a ve b s 'e bağlı fonksiyonlar olmak üzere,

$$U = a(s)T(s) + cN(s) + b(s)B(s) \tag{3.3.2}$$

dir. U sabit olduğundan (3.3.2) denkleminin türevi alınıp düzenlenirse,

$$a' - c\kappa\tau = 0$$

$$a\kappa - b\tau^2 = 0$$

$$c\tau + b' = 0 \tag{3.3.3}$$

bulunur. Buradan $a = \frac{b\tau^2}{\kappa}$ dır. Ayrıca U sabit vektör olduğundan,

$$\langle U, U\rangle = a^2 + \tau^2 b^2 + \tau^2 c^2 = sabit$$

dir. a yerine yazılıp düzenlenirse,

$$b^2\left(\frac{\tau^4+\kappa^2\tau^2}{\kappa^2}\right) = m^2 = sabit \qquad , \qquad \tau^2 c^2 = sabit$$

olur. Buradan

$$b = \pm\frac{\kappa m}{\tau(\sqrt{\tau^2+\kappa^2})} \tag{3.3.4}$$

bulunur. (3.3.4) denkleminin türevi ile (3.3.3) denklemi göz önüne alınırsa,

$$\frac{d}{ds}\left(\pm\frac{\kappa m}{\tau(\sqrt{\tau^2+\kappa^2})}\right) = c\tau$$

dır. Buradan

$$\pm\frac{c}{m} = \frac{\kappa'}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}}$$

olup ispat tamamlanır.

$\Leftarrow$: Tersine $b = \frac{\kappa m}{\tau(\sqrt{\tau^2+\kappa^2})}$ ve $a = \frac{\tau m}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}$ olarak alınsın.

$$U = \frac{\tau m}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}T + \frac{\kappa m}{\tau(\sqrt{\tau^2+\kappa^2})}B + cN$$

şeklinde tanımlansın.

$$U' = \frac{-\kappa\kappa'\tau m}{(\tau^2+\kappa^2)^{3/2}}T + \frac{\kappa m}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}N + \frac{\kappa' m}{\tau\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}B - \frac{\kappa^2\kappa' m}{\tau(\tau^2+\kappa^2)^{3/2}}B$$
$$- \frac{\kappa m\tau}{\tau\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}N + \frac{\kappa\tau' m}{\tau^2\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}B$$
$$+\left(-\kappa\tau T + \frac{\tau'}{\tau}N + \tau B\right)\left(\frac{-\kappa' m}{(\tau^2+\kappa^2)^{3/2}}\right)$$

U'nun türevi alınıp düzenlendiğinde $U' = 0$ elde edilir. Diğer taraftan $\langle N(s), U\rangle = c$ olup α slant helistir.

4. BÖLÜM

TORSİYON İLE MODİFİYE EDİLMİŞ ORTOGONAL ÇATIDA ÖZEL REGLE YÜZEYLER

Bu bölümde Torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatıda uzay eğrilerinin gelişimi ve tanjant, normal ve binormal regle yüzeyler Gauss ve ortalama eğriliğine göre karakterize edilmiştir.

4.1. Torsiyon İle Modifiye Edilmiş Ortogonal Çatıda Uzay Eğrilerinin Gelişimi

Öklit uzayında bir α eğrisi $\alpha(s,t)$ vektör değerli fonksiyon olsun. Burada s yay parametresi ve t ise zaman parametresidir. Bu takdirde α eğrisinin binormal denklemi

$$\alpha_t = \alpha_s \Lambda \alpha_{ss}$$

şeklindedir. Torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal $\{T, N, B\}$ çatısının zaman gelişimi

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}_{\boldsymbol{t}} = \begin{bmatrix} 0 & \eta & \beta \\ -\eta & \tau\tau_t & \gamma \\ -\beta & -\gamma & \tau\tau_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

dir. $\tau \neq 0$ olduğu göz önüne alınır ve $T_{st} = T_{ts}$, $N_{st} = N_{ts}$, $B_{st} = B_{ts}$ denklemleri kullanılırsa,

$$\eta_s = \frac{\kappa_t}{\tau} + \frac{\kappa\tau_t}{\tau^2} + \kappa\tau_t - \eta\frac{\tau_s}{\tau} + \beta\tau$$

$$\beta_s = \frac{\kappa}{\tau}\gamma - \eta\tau - \beta\frac{\tau_s}{\tau}$$

$$\gamma_s = -\kappa\tau\beta + \tau_t$$

bulunur.

$$\alpha_t = aT + bN + cB$$

olup $\alpha_{st} = \alpha_{ts}$ denkleminden

$$0 = a_s - b\kappa\tau$$

$$\eta = a\frac{\kappa}{\tau} + b_s + b\frac{\tau_s}{\tau} - c\tau \qquad (4.1.1)$$

$$\beta = \tau b + c_s + c\frac{\tau_s}{\tau}$$

bulunur. Ayrıca

$$\alpha_t = \alpha_s \Lambda \alpha_{ss} = \frac{\kappa}{\tau} B$$

dır. Böylece $a = 0,\ b = 0\ ,\ c = \frac{\kappa}{\tau}$ dir. Bulunan bu değerler (4.1.1) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\eta = -\kappa$$

$$\beta = \tau\kappa_s$$

$$\gamma = \frac{-\kappa\kappa_s}{\kappa} + 1$$

bulunur ve bu denklem de eğrinin hareketini ve zaman gelişimini temsil eder.

4.2.Torsiyon ile Modifiye Edilmiş Ortogonal Çatıda Özel Regle Yüzeyler ve Özellikleri

Regle yüzeyin parametrik denklemi

$$X(s, v) = \alpha(s) + vl(s)$$

olarak verilsin. Burada $\alpha(s)$ dayanak eğrisi ve $l(s)$ de doğrultman eğrisidir. $\alpha(s)$ ve $l(s)$ eğrileri t zamanı ile hareket ederse o zaman regle yüzeyin denklemi

$$X(s, v, t) = \alpha(s, t) + vl(s, t)$$

şeklinde olur [20].

4.2.1. Tanjant Regle Yüzeyler

α eğrisinin T tanjant vektörünün hareketiyle oluşan regle yüzeylerdir ve yüzeyin denklemi

$$X(s,v,t) = \alpha(s,t) + vT(s,t)$$

şeklindedir. Tanjant regle yüzeyin kısmi türevleri alınırsa,

$$X_s(s,v,t) = T + v\frac{\kappa}{\tau}N$$

$$X_v(s,v,t) = T \tag{4.2.1.1}$$

bulunur. (4.2.1.1) denklemi kullanılarak bu yüzeyin birim normal vektör alanı

$$U = \frac{X_s \wedge X_v}{\|X_s \wedge X_v\|} = \frac{-B}{\tau} \tag{4.2.1.2}$$

olarak bulunur. Tanjant regle yüzeyin birinci temel form katsayıları,

$$E = \langle X_s, X_s \rangle = 1 + v^2\kappa^2$$

$$F = \langle X_s, X_v \rangle = 1 \tag{4.2.1.3}$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = 1$$

şeklinde bulunur. (4.2.1.1) denkleminin ikinci türevleri alınırsa,

$$X_{ss}(s,v,t) = -v\kappa^2 T + \left(\frac{\kappa + v\kappa_s}{\tau}\right)N + v\kappa B$$

$$X_{sv}(s,v,t) = \frac{\kappa}{\tau}N \tag{4.2.1.4}$$

$$X_{vv}(s,v,t) = 0$$

bulunur. Bu yüzeyin ikinci temel form katsayıları,

$$e = \langle X_{ss}, U \rangle = -v\tau\kappa$$

$$f = \langle X_{sv}, U \rangle = 0 \tag{4.2.1.5}$$

$$g = \langle X_{vv}, U \rangle = 0$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.2.1.1. Tanjant regle yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliği sırasıyla

$$K = 0$$

$$H = \frac{-\tau}{2v\kappa}$$

dir.

İspat. (4.2.1.3) ve (4.2.1.5) denklemlerinden Gauss ve ortalama eğrilik sırasıyla

$$K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = 0$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{Eg-2Ff+Ge}{EG-F^2} = \frac{-\tau}{2v\kappa}$$

olarak bulunur.

Sonuç 4.2.1.1. Torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatıda tanjant regle yüzey açılabilirdir.

İspat. Teorem (4.2.1.1) den ispat açıktır.

Sonuç 4.2.1.2. Torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatıda tanjant regle yüzey minimal değildir.

İspat. Teorem (4.2.1.1) den torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatıda $\tau = 0$ olamayacağından ortalama eğrilik hiçbir zaman sıfır olamaz. Buradan tanjant regle yüzey minimal değildir.

4.2.2. Normal Regle Yüzeyler

α eğrisinin N normal vektörünün hareketiyle oluşan regle yüzeylerdir ve yüzeyin denklemi

$$X(s,v,t) = \alpha(s,t) + vN(s,t)$$

şeklindedir. Normal regle yüzeyin kısmi türevleri alınırsa,

$$X_s(s,v,t) = (1 - v\kappa\tau)T + v\frac{\tau_s}{\tau}N + v\tau B$$

$$X_v(s,v,t) = N \qquad (4.2.2.1)$$

bulunur. (4.2.2.1) denklemi kullanılarak bu yüzeyin birim normal vektör alanı

$$U = \frac{X_s \wedge X_v}{\|X_s \wedge X_v\|} = \frac{-v\tau T + (1 - v\kappa\tau)B}{\sqrt{v^2\tau^2 + (1 - v\kappa\tau)^2\tau^2}} \tag{4.2.2.2}$$

olarak bulunur. Normal regle yüzeyin birinci temel form katsayıları,

$$\begin{aligned} E &= \langle X_s, X_s \rangle = (1 - v\kappa\tau)^2 + v\tau^3 + v^2{\tau_s}^2 \\ F &= \langle X_s, X_v \rangle = v\tau\tau_s \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = \tau^2 \end{aligned} \tag{4.2.2.3}$$

olarak bulunur. (4.2.2.1) denkleminin ikinci türevleri alınırsa,

$$\begin{aligned} X_{ss}(s, v, t) &= v\tau\kappa_s T + \left(\frac{\kappa}{\tau} - v\kappa^2 - v\tau^2 + v\frac{\tau_{ss}}{\tau}\right)N + 3v\tau_s B \\ X_{sv}(s, v, t) &= -\kappa\tau T + \frac{\tau_s}{\tau}N + \tau B \\ X_{vv}(s, v, t) &= 0 \end{aligned} \tag{4.2.2.4}$$

bulunur. Bu yüzeyin ikinci temel form katsayıları,

$$\begin{aligned} e &= \langle X_{ss}, U \rangle = \frac{-v^2\tau^2\kappa_s + 3v\tau_s\tau^2(1 - v\kappa\tau)}{\sqrt{v^2\tau^2 + (1 - v\kappa\tau)^2\tau^2}} \\ f &= \langle X_{sv}, U \rangle = \frac{v\kappa\tau^2 + \tau^3(1 - v\kappa\tau)}{\sqrt{v^2\tau^2 + (1 - v\kappa\tau)^2\tau^2}} \\ g &= \langle X_{vv}, U \rangle = 0 \end{aligned} \tag{4.2.2.5}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.2.2.1 Normal regle yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliği sırasıyla

$$K = \frac{-(v\kappa\tau^2 + \tau^3(1 - v\kappa\tau))^2}{v^2\tau^2 + (1 - v\kappa\tau)^2\tau^2[\tau^2[(1 - v\kappa\tau)^2 + v^2\tau_s^2 + v\tau^3] - v^2\tau_s^2\tau^2]}$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{-2v\tau\tau_s(v\kappa\tau^2 + \tau^3(1 - v\kappa\tau) + \tau^2(-v^2\tau^2\kappa_s + 3v\tau_s\tau^2(1 - v\kappa\tau))}{v^2\tau^2 + (1 - v\kappa\tau)^2\tau^2[\tau^2[(1 - v\kappa\tau)^2 + v^2\tau_s^2 + v\tau^3] - v^2\tau_s^2\tau^2]}$$

dir.

İspat. (4.2.2.3) ve (4.2.2.5) denklemlerinden Gauss ve ortalama eğrilik sırasıyla

$$K = \frac{-(v\kappa\tau^2 + \tau^3(1 - v\kappa\tau))^2}{v^2\tau^2 + (1 - v\kappa\tau)^2\tau^2[\tau^2[(1 - v\kappa\tau)^2 + v^2\tau_s^2 + v\tau^3] - v^2\tau_s^2\tau^2]}$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{-2v\tau\tau_s(v\kappa\tau^2 + \tau^3(1 - v\kappa\tau) + \tau^2(-v^2\tau^2\kappa_s + 3v\tau_s\tau^2(1 - v\kappa\tau))}{v^2\tau^2 + (1 - v\kappa\tau)^2\tau^2[\tau^2[(1 - v\kappa\tau)^2 + v^2\tau_s^2 + v\tau^3] - v^2\tau_s^2\tau^2]}$$

olarak bulunur.

4.2.3. Binormal Regle Yüzeyler

α eğrisinin B binormal vektörünün hareketiyle oluşan regle yüzeylerdir ve yüzeyin denklemi

$$X(s, v, t) = \alpha(s, t) + vB(s, t)$$

şeklindedir. Binormal regle yüzeyin kısmi türevleri alınırsa,

$$X_s(s, v, t) = T - v\tau N + v\frac{\tau_s}{\tau}B$$

$$X_v(s, v, t) = B \qquad (4.2.3.1)$$

bulunur. (4.2.3.1) denklemi kullanılarak bu yüzeyin birim normal vektör alanı

$$U = \frac{X_s \wedge X_v}{\|X_s \wedge X_v\|} = \frac{-v\tau T - N}{\sqrt{v^2\tau^2 + \tau^2}} \qquad (4.2.3.2)$$

olarak bulunur. Binormal regle yüzeyin birinci temel form katsayıları,

$$E = \langle X_s, X_s \rangle = 1 + v^2\tau^4 + v^2{\tau_s}^2$$

$$F = \langle X_s, X_v \rangle = v\tau\tau_s$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = \tau^2 \qquad (4.2.3.3)$$

dır. (4.2.3.1) denkleminin ikinci türevleri alınırsa,

$$X_{ss}(s,v,t) = v\kappa\tau^2 T + \left(\frac{\kappa}{\tau} - 3v\tau_s\right)N + \left(-v\tau^2 + v\frac{\tau_{ss}}{\tau}\right)B$$

$$X_{sv}(s,v,t) = -\tau N + \frac{\tau_s}{\tau}B \tag{4.2.3.4}$$

$$X_{vv}(s,v,t) = 0$$

bulunur. Bu yüzeyin ikinci temel form katsayıları,

$$e = \langle X_{ss}, U\rangle = \frac{-v^2\kappa\tau^3 - \kappa\tau + 3v\tau_s\tau^2}{\sqrt{v^2\tau^2+\tau^2}}$$

$$f = \langle X_{sv}, U\rangle = \frac{\tau^3}{\sqrt{v^2\tau^2+\tau^2}} \tag{4.2.3.5}$$

$$g = \langle X_{vv}, U\rangle = 0$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.2.3.1 Binormal regle yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliği sırasıyla

$$K = \frac{-\tau^6}{v^2\tau^2+\tau^2[\tau^2(1+v^2\tau^4+v^2\tau_s^2)]-v^2\tau_s^2\tau^2]}$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{-2v\tau^4\tau_s+\tau^2(-v\kappa\tau^3-\kappa\tau+3v\tau_s\tau^2)}{v^2\tau^2+\tau^2[\tau^2(1+v^2\tau^4+v^2\tau_s^2)]-v^2\tau_s^2\tau^2]}$$

şeklindedir.

İspat. (4.2.3.3) ve (4.2.3.5) denklemlerinden Gauss ve ortalama eğrilik sırasıyla

$$K = \frac{-\tau^6}{v^2\tau^2+\tau^2[\tau^2(1+v^2\tau^4+v^2\tau_s^2)]-v^2\tau_s^2\tau^2]}$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{-2v\tau^4\tau_s+\tau^2(-v\kappa\tau^3-\kappa\tau+3v\tau_s\tau^2)}{v^2\tau^2+\tau^2[\tau^2(1+v^2\tau^4+v^2\tau_s^2)]-v^2\tau_s^2\tau^2]}$$

olarak bulunur.

Sonuç 4.2.3.1. Torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatıda binormal regle yüzey açılabilir değildir.

İspat. Teorem (4.2.3.1) den torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatıda $\tau = 0$ olamayacağından Gauss eğriliği hiçbir zaman sıfır olamaz. Sonuç olarak binormal regle yüzey açılabilir değildir.

5. BÖLÜM

TARTIŞMA-SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında 3- boyutlu Öklid uzayında torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatıya göre küresel eğrilerin geometrik yer denklemi, yarıçapı ve merkeziyle ilgili teoremler elde edildi.

Bu yeni çatıya göre Bertrand eğrileri karakterize edilerek elde edilen sonuçlar teorem olarak verildi. Helis ve slant helis eğrileri incelendi. Lancret teoremi ve bir eğrinin helis ve slant helis eğrisi olması için gerek ve yeter şartlar teorem olarak ifade ve ispat edildi.Uzay eğrilerinin zamana göre gelişimi incelendi.

Regle yüzeyler 3-boyutlu Öklid uzayında torsiyon ile modifiye edilmiş ortogonal çatıya göre karakterize edildi. Bu çatıya göre elde edilen

$$X(s,v,t) = \alpha(s,t) + vT(s,t)$$

tanjant regle yüzeyinin yüzey elemanları bulunarak açılabilir yüzey olup minimal yüzey olmadığı gösterildi. Ayrıca

$$X(s,v,t) = \alpha(s,t) + vB(s,t)$$

binormal regle yüzeyinin açılabilir yüzey olmadığı gösterildi.

KAYNAKÇA

1. Bektas, M. , Ergüt, M., Soylu, D., 1998. The characterization of the spherical timelike curves in 3-Dimensional Lorentzian space.**Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society**, **21**: 117-125.
2. Pekmen, U, Pasali, S., 1999. Some characterizations of Lorentzian spherical spacelike curves. **Mathematica Moravica**, **3**: 33-37.
3. Lai, H.F.,1967.Weakened Bertrand curves. **Tohoku Mathematical Journal**, **19**(2): 141-155.
4. Struik,D. J., 1961. Lectures on Classical Differential Geometry. Dover Publications, New York, 256 s.
5. Izumiya, S., Takeuchi, N., 2004. New special curves and developable surfaces. **Turkish Journal of Mathematics**, **28** (2): 153-164.
6. Andaras, C., Recio T., Tabera LF., Sendra JR., Villarino C., 2011. Proper real reparametrization of rational ruled surfaces. **Design 28**(2): 102-113.
7. Bottema, O., Roth, B., 1979. Theoretical kinematics. **North-Holland Publishing Company**, New York, p.558.
8. Sasai, T., 1984. The fundamental theorem of analytic space curves and apparent singularities of Fuchsian differential equations.**Tohoku Mathematical Journal**, **36** : 17–24.
9. Ouarab, S., Ouazzani, A., Izıd, M., 2018. Ruled surfaces with alternative moving frame in Euclidean 3-space. **International J. of Math. Sci. & Engg. Appls.(IJMSEA),** 43-58.
10. Bükçü, B., Karacan, M. K., 2016. On the modified orthogonal frame with curvature and torsion in 3-Space, **Mathematical Sciences and Applications E Notes, 4(**1):184–188.
11. Bükçü, B., Karacan, M. K.,2016. Spherical curves with modified orthogonal frame. **Journal of New Results in Science, 5** (10): 60-68.
12. Lone, M.S., Karacan, M.K., Tuncer, Y., Es, H., 2018. Spherical indicatries with the modified orthogonal frame, arXiv:1810.01082v1 [math. DG].
13. Hacısalioğlu, H. H. 2005. Diferansiyel Geometri. 1. Cilt, Ankara Üniversitesi Yayınları, 1-167.
14. Sabuncuoğlu, A., 1994. Diferansiyel Geometri. 5. Baskı Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 522.

15. Yüce, S., 2017. Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri. Pegem Akademi, Ankara, 552.

16. Gray, A., 1998. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Matemetica, CRC Press, USA, 1056.

17. Izumiya, S., Takeuchi, N., 2003. Special curves and ruled surfaces, **Beitrage zur Algebra und Geometrie ¨ , 44** (1): 203–212.

18. Galvez, J. A., Martinez, A., Milan, F., 2003. Linear Weingarten surfaces in Euclidean 3-space, **Monatsh. Math., 138**(2) : 133-144.

19. Lone M. S., Karacan, M. K., Bükçü, B.,2019. On some curves with modified orthogonal frame in Euclidean 3-space. **Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science, 43** (4): 1905-1916.

20. Eren, K., Kosal, H. H., 2020. Evolution of space curves and the special ruled surfaces with modified orthogonal frame. **AIMS Mathematics**,**5** (3):2027-2039.

21. Carmo, M.P., 1976. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall Inc, New Jersey.

22. Turgut, A., Hacısalihoğlu, H.H., 1997. Time like ruled surfaces in the Minkowski 3-space. **Far East Journal of Mathematical Sciences, 5**(1): 83-90.

23. Yaylı, Y., 2000. On the motion of the Frenet vectors and spacelike ruled surfaces in the Minkowski 3-space. **Mathematical Computational Applications, 5**(1): 49-55.

24. Yüksel, N., 2013. The ruled surfaces according to Bishop frame in Minkowski 3-space. **Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis**.

25. Damar E., Yüksel, N., Karacan, M. K., 2020. Ruled surfaces according to parallel trasport frame in E4. **International J. Math. Combin., 1** : 1-17.

26. J.F. Burke, 1960. Bertrand curves associated with a pair of curves, **Mathematics Magazine, 34** (1): 60-62.

27. M. Barros, 1997. General helices and a theorem of Lancret, **Proc. Amer. Math. Soc. 125** (5): 1503- 1509.

28. K. Ilarslan, 2003. Characterizations of spacelike general helices in Lorentzian manifolds, **Kragujevac J. Math.,** 25: 209-218.

29. Y. C.Wong, 1963. A global formulation of the condition for a curve to lie in a sphere, **Monatsh.Math.,** 67: 363-365.

30. Y.C.Wong, 1972. On an explicit characterization of spherical curves, **Proc. Amer. Math. Soc.,** 34: 239-242.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Tuğba DEMİRKIRAN
Uyruğu: Türkiye (T.C)

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görev
2018-Halen	Yalova Üniversitesi	Öğretim Görevlisi
2016	Bilecik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YABANCI DİL

İngilizce

YAYINLAR

1. Aygün, E., Atagün, A.O., Canayaz, T.,Mutlu, N. (2015). Esnek direkt toplanan. Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 31(4), ss 200-205.

2. Yüksel,N., Karacan, M.K., Demirkıran, T., 2022. Spherical curves with modified orthogonal frame with torsion, Turkish Journal of Science,(Kabul edildi basım aşamasında.)

3. Yüksel,N., Karacan, M.K., Demirkıran, T., 2022. Helices and Bertrand curves with modified orthogonal frame with torsion, (İncelemede).

4. Yüksel,N., Karacan, M.K., Demirkıran, T., 2022. Evolution of space curves and the special ruled surfaces with modified orthogonal frame with torsion,(İncelemede).