T.C
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ESNEK CİSİM VE ESNEK YAKIN-CİSİM

Tezi Hazırlayan
Hayder ALABID

Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. Emin AYGÜN

Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2011
KAYSERİ

T.C
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ESNEK CİSİM VE ESNEK YAKIN-CİSİM

Tezi Hazırlayan
Hayder ALABID

Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. Emin AYGÜN

Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2011
KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kurallar ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.



Hayder ALABID

YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI

ESNEK CİSİM VE ESNEK YAKIN-CİSİM adlı yüksek lisans tezi Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan
Hayder ALABID

Tezi Yöneten
Yrd.Doç.Dr. Emin AYGÜN

Matematik Anabilim Dalı Başkanı

Prof. Dr. Fuat GÜRCAN

Yrd.Doç.Dr. Emin AYGÜN danışmanlığında **Hayder ALABID** tarafından hazırlanan

" **Esnek Cisim ve Esnek Yakın-Cisim**" adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

01/07/2011

JÜRİ:

Başkan: Prof.Dr.Hüseyin ALTINDİŞ

Üye:Yrd.Doç.Dr.Muammer KULA

Üye: Yrd.Doç.Dr.Emin AYGÜN

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 19/07/2011.. tarih ve 2011/24-22 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

19/07/2011

Prof.Dr. Necmettin MARAŞLI

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Tezimin konusunun şekillenmesinde ve çalışmalarım boyunca bana yol gösteren Yrd. Doç Dr. Emin AYGÜN'e saygı teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarımın sırasında bana yardımlarını esirgemeyenler saygı değer hocalarım araştırma görevleri Hasan ARSLAN, Aslıhan SEZGİN ve arkadaşım Demet CİDEM'e manevi destekleri için teşekkür ederim.

Maddi ve manevi desteklerini benden hiçbir zaman tutmayan babam, duaları başımdan hiç eksik olmayan annem, bütün ailem, sevgili eşim Sündüs ve minicik kızım Gül'e teşekkür ederim.

Son olarak bana verdikleri maddi ve manevi destekleri için Türkiye ve Irak Cumhuriyetlerine, Türkmen eli Kültür Merkezi'ne, Irak Kültür Ataşeliği'ne ve adı geçmeyen tüm arkadaşlarıma teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

ESNEK CİSİM VE ESNEK YAKIN-CİSİM

Hayder ALABID

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimler Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, 2011

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Emin AYGÜN

ÖZET

Molodtsov tarafından ortaya atılan esnek küme teorisi, belirsizlikle başa çıkmak için etkili bir matematiksel araç olarak görülmektedir. Bu teori, bilgi sistemleri, karar verme problemleri, optimizasyon teorisi, cebirsel yapılar ve matematiksel analiz gibi belirsizlik içeren birçok alana uygulandı. Bu tez çalışmasında, esnek küme teorisi cisim ve yakın-cisimlere uygulanarak, esnek cisim ve esnek yakın-cisim inşa edilip, esnek cismin ve esnek yakın-cismin cebirsel yapılar çalışıldı.

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Giriş ve birinci bölümlerde çalışmayla ilgili literatür taraması ve temel bilgiler verildi. İkinci bölümde cisim ve yakın-cisim kavramları tanımlanıp, cismin, yakın-cismin özellikleri ve çeşitli örnekler verilmiştir.

Üçüncü bölüm, tamamen orijinal bir çalışmadan oluşmaktadır. Bu bölümde, esnek cisim ve esnek yakın-cisim kavramları tanımlanmış, bu kavramların üzerindeki esnek altcisim ve esnek altyakın-cisim, bir yakın-cismin esnek altyakın-cismi ve esnek yakın-cisim homomorfizması gibi çeşitli cebirsel yapılar tanımlanarak, ilgili özellikleri çeşitli örneklerle gösterilmiştir.

Son bölümde Esnek cisim ve Esnek yakın-cismin özelliklerinin kısa bir özeti verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Yakın-halka, Yakın-cisim, Esnek küme, Esnek cisim ve Esnek yakın-cisim.

SOFT FIELD AND SOFT NEAR-FIELD

Hayder ALABID

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M. SC. Thesis, July 2011

Thesis Supervisor: Asst. associate professor. Dr. Emin AYGÜN

ABSTRACT

Soft set theory, proposed by Molodtsov, has been regarded as an effective mathematical tool to deal with uncertainties. This theory has been applied to many fields such as information systems, decision making problems, optimization theory and algebraic structures, etc. which contain uncertainties. In this thesis, applying soft set theory, we construct soft fields and soft near-fields and we deal with the algebraic structure of fields and near-fields.

This thesis consists of three chapters. The literature and basic informations about the study have been given in the introduction and first chapters. In the second chapter we defined field, near-field and the study of the properties of field and near-field and also several examples about this subject have been taken.

The third chapter consists of totally original study. Here we defined some algebraic structures such as the soft field, soft near-field, and then the subfield, soft subfield that about subjects that we defined soft near-field of the near-field and soft near-field homomorphism are introduced and some related properties are illustrated by a great deal of examples.

İn the last chapter is a brief summary of properties of the Soft Field and Soft Near-fields

Keywords: Field, Near-field, Soft sets, Soft fields and Soft near-fields.

İÇİNDEKİLER

ESNEK CİSİM VE ESNEK YAKIN-CİSİM

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK ii

YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI iii

KABUL VE ONAY iv

TEŞEKKÜR v

ÖZET vi

ABSTRACT vii

KISALTMA VE SİMGELER x

GİRİŞ 1

1. BÖLÜM:

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

1.1.Yakın-Halka İle İlgili Tanımlar ve Teoremler 5

1.2. Esnek Kümeler 9

1.3. Esnek Grup 16

1.4. Esnek Yarıhalka 18

1.5. Esnek Halka 19

1.6. Esnek Yakın-Halka 20

2. BÖLÜM:

CİSİM VE YAKIN-CİSİM

2.1. Cisim 23

2.2. Yakın-Cisim 24

2.3. Yakın-Cismin Merkezi ve İçi 27

2.4. Alt Yapılar 27

3. BÖLÜM:

ESNEK CİSİM VE ESNEK YAKIN-CİSİM

3.1. Esnek Cisim 30

3.2. Esnek Cismin Esnek Altcismi 35

3.3. Esnek Yakın-Cisim 39

3.4. Esnek Yakın-Cismin Esnek Altyakın-Cismi 42

3.5. Yakın-Cismin Esnek Altyakın-Cismi 43

3.6. Esnek Yakın-Cisim Homomorfizması 47

4. BÖLÜM:

ESNEK CİSİM VE ESNEK YAKIN-CİSMİN ÖZELLİKLERİNİN ÖZETİ

Esnek cisim ve Esnek Yakın-Cismin özelliklerinin özeti 50

KAYNAKLAR 55

ÖZGEÇMİŞ

KISALTMA VE SİMGELER

N : Yakın-halka

N_0 : N yakın-halkasının 0-simetrik kısmı

N_c : N yakın-halkasının sabit kısmı

N_d : Dağılmalı yakın-halka

U : Evrensel küme

E : parametrelerin kümesi

$P(U)$: Evrensel kümenin kuvvet kümesi

(F, A) : Esnek küme

$\tilde{\subset}$: Esnek altküme

$\tilde{\supseteq}$: Esnek üst kümesi

Φ : Boş esnek küme

$\tilde{A}$: Tam esnek küme

$\tilde{\wedge}$: Esnek kümeler arasında VE işlemi

$\tilde{\vee}$: Esnek kümeler arasında VEYA işlemi

$\tilde{\cup}$: Esnek kümelerin birleşimi

$\tilde{\prod}$: Esnek kümelerin ikili kesişimi

$\prod_{\varepsilon}$: Esnek kümelerin genişletilmiş kesişimi

$\cup_{\mathrm{R}}$: Esnek kümelerin kısıtlamış birleşim

$\Cap$: Esnek kümelerin kısıtlamış kesişimi

K **:** Cisim

M : Yakın-cisim

$c(M)$: M yakın-cisminin merkezi

GİRİŞ

Ekonomi, mühendislik ve çevre bilimindeki karmaşık problemlerde çeşitli belirsizlik tiplerinin var olmasından dolayı, bu problemleri çözmek için, klasik metotları başarılı bir şekilde kullanamayız. Belirsizlikle başa çıkmak için matematiksel bir araç olarak göz önüne alabileceğimiz, "Olasılık Teorisi", "Bulanık Küme Teorisi" ve "Aralık Matematiği" şeklinde üç teori vardır. Her bir teorinin güçlü olduğu uygulamalar bulunmaktadır.

Bu teoriler arasından en göze çarpanlardan birisi, Zadeh'in [1] bulanık kümeler teorisidir. Bu teori hızla gelişmesine rağmen bazı yapısal zorluklara sahiptir. Bir bulanık küme onun üyelik fonksiyonu yoluyla tanımlanır. Molodtsov'a [2] göre üyelik fonksiyonu bireysel olarak belirlendiğinden dolayı, her bir durum için bir üyelik fonksiyonu inşa etme zorluğuyla karşılaşılır. Bu nedenle, üyelik fonksiyonu inşasından bağımsız bir kümeler teorisine ihtiyaç vardır.

"Olasılık teorisi" sadece uygun istatistiksel olaylarla uğraşabilir. Matematiksel detaylara girmeksizin uygun bir matematiksel olayla kastetmek istediğimiz şey, uzun bir deneme serisinde

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

basit ortalamasının mevcut olmasıdır. Burada, denemelerde olaylar gerçekleşirse x_i 1' e, olaylar geçekleşmezse x_i 0' a eşittir. Limitin varlığını test etmek için çok sayıda deneme yapmalıyız. Bunu mühendislikte gerçekleştirebiliriz fakat birçok ekonomik, çevrebilim ve sosyal problemlerde gerçekleştiremeyiz.

"Aralık matematiği", bir problemin kesin çözümü için tahmini bir aralık inşa ederek, hesaplama hatalarını göz önünde bulunduran bir metot olarak ortaya çıkar. Bu birçok durumda faydalıdır ama aralık matematiğindeki metotlar farklı belirsizliklere sahip problemler için yeterince uygun değildir. Bu metotlar düzgün değişen, güvensiz, yetersiz ve kısmen amaçla çelişen hatalı bir bilgiyi, vb. durumları yaklaşık olarak tanımlayamaz. Belirsizlikle başa çıkmak için en yakın teori, Zadeh [1] tarafından geliştirilen " Bulanık Küme Teorisi" dir. Şimdi bulanık küme kavramının tanımını hatırlayalım. Her $A \subset X$ kümesi için onun μ_A karakteristik fonksiyonu

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Bir küme ile onun karakteristik fonksiyonu arasındaki bu eşleme açık olarak 1-1 bir eşlemedir. Bir F bulanık cümlesi, onun μ_F üyelik fonksiyonu ile tanımlanır. Bu fonksiyon her $x \in X$ noktasına, [0,1] kapalı aralığında bir $\mu_F(x)$ reel sayısını karşılık getirir. $\mu_F(x)$ sayısı, x 'in F bulanık kümesine ait olma derecesi olarak yorumlanır.

Bulanık kümeler teorisi, bulanık kümeler için ilk bakışta doğal işlemler sunar. F ve G bulanık kümeler μ_F ve μ_G de sırasıyla bu kümelerin üyelik fonksiyonları olsun. Bu taktirde, F nin CF ile gösterilen tümleyeni

$$\mu_{CF} = 1 - \mu_F(x)$$

üyelik fonksiyonu yoluyla tanımlanır. F ve G'nin $F \cap G$ ile gösterilen arakesiti aşağıdaki üyelik fonksiyonlarından biri ile tanımlanabilir.

$$\mu_{F \cap G}(x) = \min\{\mu_F(x), \quad \mu_G(x)\}$$

$$\mu_{F\cap G}(x) = \mu_F(x).\mu_G(x)$$

$$\mu_{F\cap G}(x) = \max\{0, \quad \mu_F(x) + \mu_G(x) - 1\}$$

$F \cup G$ ile gösterilen birleşim için üyelik fonksiyonlarının üç olası durumu vardır.

$$\mu_{F\cup G}(x) = \max\{\mu_F(x), \mu_G(x)\}$$

$$\mu_{F\cup G}(x) = \mu_F(x) + \mu_G(x) - \mu_F(x).\mu_G(x)$$

$$\mu_{F\cup G}(x) = \min\{1, \mu_F(x), \mu_G(x)\}$$

bu küme teorisi üzerine yapılan çalışmalar, gönümüzde hızlı bir şekilde ilerlemektedir. Fakat her bir durumda üyelik fonksiyonunun nasıl kurulacağı bu konuda sıkıntı yaratmaktadır?

Üyelik fonksiyonu kurmak için sadece bir yola başvurulamaz. Üyelik fonksiyonunun doğası son derece bireyseldir. $\mu_F(x) = 0.7$ notasyonunu herkes kendi tarzında anlayabilir. Bu yüzden, üyelik fonksiyonları ile yapılan aritmetik işlemlere dayanan bulanık küme işlemleri, doğal gözükmez.

Muhtemelen bu zorlukların sebebi, teorinin parametrizasyon araçlarının yetersizliğidir. Bu çalışmamızda belirsizliklerle uğraşmak için yukarıda bahsedilen zorluklardan bağımsız bir matematiksel araç önereceğiz.

Esnek kümeler teorisi, 1999 yılında Molodtsov [2] tarafından belirsizlikle başa çıkmak için bir matematiksel araç olarak ortaya atıldı ve Molodtsov [2] çeşitli alanlarda esnek küme teorisini kullanarak başarlı çalışmalar yaptı ve 2001 yılında yaklaşık nesne tanımı kavramını formüle etti.

2002-2003 yıllarında Maji ve ark. [3], [4], 1982 yılında Pawlak [5] tarafından bulunan yaklaşımlı küme teorisi yardımıyla bir karar verme probleminde esnek kümelerin bir

uygulamasını sundular ve esnek kümelerde bazı işlemleri tanımladılar. 2004 yılında Molodtsov "Esnek küme teorisi" isimli bir kitap yayımladı.

Chen ve ark. [24], [25] (2003 – 2005) ile Kong ve ark. [7] esnek kümelerde parametre indirgemesi üzerine, Xiao ve ark. [8] ile Pei ve Miao [9], 2005 yılında esnek tabanlı bilgi sistemleri üzerine ve son olarak 2006 yılında ise Mushrif ve ark. [10] esnek temelli sınıflandırmalar üzerinde çalışma yaptılar.

Esnek kümelerin cebirsel özellikleri bazı matematikciler tarafından çalışılmaktadır. 2007'de Aktaş ve Çağman [16], esnek kümeleri bulanık kümeler ve yaklaşımlı kümelerin ilgili kavramlarıyla karşılaştırıp, pek çok yeni çalışmanın önünü açan "Esnek Grup Teorisi'' ni literatüre kazandırdılar. Esnek grup yapısı üzerinde esnek altgrup, normal esnek altgrup, esnek homomorfizm gibi cebirsel yapılar tanımladılar. Feng ve ark. [6] 2008'de esnek yarıhalka kavramını tanıtıp, esnek yarıhalka üzerinde esnek altyarıhalka, esnek ideal, idealistik esnek yarıhalka ve esnek yarıhalka homomorfizması gibi yapılar inşa etmişlerdir.

Son yıllarda Ummahan ve ark. [22] esnek grup kavramından faydalanarak esnek halka tanımını verdiler ayrıca esnek gruplarda ve esnek yarıhalkalarda olan işlemleri esnek halkada genişlettiler. Sezgin, Atagün [17] de esnek yakın-halkayı ve Sezgin, Atagün ve Aygün [27] ise esnek yakın-halka üzerinde esnek altyakın-halka, esnek ideal, idealistik esnek yakın-halka, esnek yakın-halka homomorfizmi ve esnek yakın-halkanın esnek N-grubu gibi çeşitli kavramları tanımlamışlardir. Bu çalışmada, esnek cisim ve esnek yakın cisim kavramları tanımlanarak halka ve yakın halka üzerindeki işlemler, yapılar cisim ve yakın cisim aktarılmıştır.

I. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEORMLER

Bu bölümde, temel bilgi niteliğinde olan ve tezin diğer kısımlarında sıkça kullanılan yapılar verilmiştir. İlk olarak Yakın-Halka Teorisi ile ilgili devamında ise Esnek Küme Teorisi ile ilgili temel tanım ve kavramlara yer verildi. Yakın-Halka Teorisi ile ilgili temel kaynak olarak, Günter Pilz'e ait "Near-rings" [18] kitabı, Esnek Küme Teorisinde ise Molodsov'un [2], Maji ve ark.'ın [4], Ali ve ark.'ın [19] ve Atagün ve Sezgin'in [17] makaleleri temel kaynak olarak alınmıştır.

1.1. YAKIN-HALKA İLE İLGİLİ TANIMLAR VE TEORMLER

1.1.1. Tanım

Boştan farklı bir N cümlesi "+" ve "." şeklinde gösterilen iki ikili işlem ile aşağıdaki şartları sağlıyorsa, $(N,+,.)$ üçlüsüne bir *yakın-halka* denir.

(1) $(N,+)$ değişmeli olması gerekmeyen bir grup,

(2) $(N,.)$ bir yarı grup ve

(3) $\forall x,y,z \in N$ için $(x+y).z = x.z + y.z$

burada **(3)** şıkkında sağdan dağılma özelliği verildiğinden, bu şartları sağlayan $(N,+,.)$ üçlüsüne bir *sağ yakın-halka* denir.

Eğer **(3)** şıkkı yerine, $\forall x,y,z \in N$ için

$$x.(y+z) = x.y + x.z$$

soldan dağılma sağlanırsa, bu şartları sağlayan $(N,+,.)$ üçlüsüne bir *sol yakın-halka* denir [18].

Yani, dağılma özelliğinin yönü, yakın-halkanın sağ veya sol olmasını belirler. Bu çalışmada, kullanılan her yakın-halka terimi bir sağ yakın-halkayı ifade edecektir.

1.1.2. Örnek

$(\Gamma,+)$ herhangi bir grup olsun.

$$M(\Gamma)=\{\, f:\Gamma\to\Gamma \;\big|\; f \text{ bir fonksiyon}\}$$

ile tanımlanan bu cümle, fonksiyonlarda toplama ve bileşke işlemleri altında bir yakın-halkadır [18].

1.1.3. Örnekler

$(\Gamma,+)$ herhangi bir grup ve "0_Γ" ile bu grubun birim elemanı gösterilsin. Bu durumda, fonksiyonlarda toplama ve bileşke işlemleri altında aşağıdaki kümeler birer yakın-halkadır.

(1) $M_0(\Gamma)=\{f:\Gamma\to\Gamma \;\big|\; f(0_\Gamma)=0_\Gamma\}$

(2) $M_c(\Gamma)=\{\, f:\Gamma\to\Gamma \;\big|\; f \text{ sabit}\}$

(3) $M_c^0(\Gamma)=\{\, f_\gamma:\Gamma\to\Gamma \;\big|\; \gamma\in\Gamma \text{ ve } f_\gamma(\delta)=\begin{cases}0_\Gamma & ,\delta=0\\ \gamma & ,\delta\neq 0\end{cases}\}$ [18].

1.1.4. Örnek

$(Z_6,+)$ toplamsal grubunu göz önüne alalım. Tablo **(1)**'de verilen çarpma işlemi tablosuna göre $(Z_6,+,.)$ bir yakın-halkadır [17].

Tablo 1.1: $(Z_6,.)$

.	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	3	1	5	3	1	5
2	0	2	4	0	2	4
3	3	3	3	3	3	3
4	0	4	2	0	4	2
5	3	5	1	3	5	1

1.1.5. Tanım

N bir yakın-halka olsun.

(1) $N_0 = \{n \in N \mid n.0 = 0\}$ cümlesine N yakın-halkasının *sıfır-simetrik kısmı* denir.

(2) $N_c = \{n \in N \mid \forall m \in N \quad için \quad n.m = n\}$ cümlesine N yakın-halkasının *sabit kısmı* denir.

$N = N_0$ ise N yakın-halkasına *sıfır-simetrik yakın-halka* ve $N = N_c$ ise N yakın-halkasına *sabit yakın-halka* denir [18].

1.1.6. Tanım

$(N, +, .)$ üçlüsü bir yakın-halka olsun. $\forall m, n \in N$ için

$$d.(n+m) = d.n + d.m$$

olacak şekilde bir $d \in N$ elemanına *dağılmalı eleman* denir. Ayrıca bütün dağılmalı elemanlardan oluşan cümle N_d olmak üzere $N = N_d$ ise N yakın-halkasına *dağılmalı yakın-halka* denir [18].

$(N, +)$ ikilisi değişmeliyse N yakın-halkasının N_d cümlesi bir halka olur.

1.1.7. Tanım

N bir yakın-halka ve $(G,+)$ $(N,+)$'nın bir alt grubu olsun. $\forall n,m \in G$ için

$$n.m \in G$$

ise G'ye N'nin *altyakın-halkası* denir [18].

1.1.8. Örnek

Örnek (1.1.4.)' de verilen $(Z_6,+,.)$ yakın-halkasını göz önüne alalım. $A=\{0,3\}$ olsun. $(A,+)$ ikilisi bir grup olup $(Z_6,+)$ grubunun bir altgrubu olur. Ayrıca Tablo (1)' e göre $\forall x,y \in A$ için $x.y \in A$ dir.

1.1.9. Tanım

N_1 ve N_2 iki yakın-halka ve

$$f : N_1 \longrightarrow N_2$$

bir dönüşüm olmak üzere $\forall m,n \in N_1$ için,

(1) $f(m+n)=f(m)+f(n)$

(2) $f(mn)=f(m)f(n)$

şartları sağlanıyorsa f dönüşümüne bir yakın-halka homomorfizmi denir. N yakın-halkasından N_2 yakın-halkasına tüm yakın-halka homomorfizmlerinin cümlesi

$Hom(N_1,N_2)$ ile gösterilir [18].

1.2. ESNEK KÜMELER

1.2.1. Tanım

U evrensel küme ve E parametrelerin bir kümesi olsun. $P(U)$, U 'nun kuvvet kümesi ve $A \subset E$ olsun. Bir (F, A) sıralı ikilisi U üzerinde *esnek küme* olarak adlandırılır. Burada F

$$F : A \longrightarrow P(U)$$

ile verilen bir dönüşümdür. Diğer bir ifadeyle, U üzerinde bir esnek küme, U evreninin alt kümelerinin parametrize edilmiş bir ailesidir. $x \in A$ için $F(x)$, (F, A) esnek kümesinin x -yaklaşımlı elemanlarının cümlesi olarak göz önüne alınabilir [2].

Tanımın daha iyi anlaşılabilmesi için aşağıdaki örnek verilmiştir.

1.2.2. Örnek

Kabul edelim ki U, göz önüne alınan şartlar altındaki futbol uyuncuların kümesi ve E, parametrelerin kümesi olsun. Her bir parametre bir kelime ya da cümledir.

E = { *hızlı, top kontrol eden, top kontrol edemeyen, pas yapan, top çalan, yavaş, bitirici, dayanıklı, bencil, asabi, uzun, kısa* } olsun. Bu durumda bir esnek küme tanımlamak *hızlı fotbulcu, yavaş futbulcu* ve diğerlerini belirtmek anlamına gelir. (F, A) esnek kümesi, Ali Bey'e göre iyi futbolcu olmasını belirtisin. Kabul edelim ki

$$U = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}\}$$

ile verilen U evreninde on futbolcu olsun ve x_1 "*hızlı"* parametresini, x_2 "*bitirici*" parametresini, x_3 "*top kontrol eden"* parametresini, x_4 " *top çalan*" parametresini ve x_5 "*dayanaklı*" parametresini göstermek üzere

$$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

şeklinde verilsin. Kabul edelim ki

$$F(x_1)=\{f_1,f_2\},\ F(x_2)=\{f_3\}\ ,\ F(x_3)=U$$

$$F(x_4)=\{f_1,f_3,f_4\} \text{ ve } F(x_5)=\{f_3,f_4\}$$

olsun. (F,A) esnek kümesi, U kümesinin altkümelerinin parametrize edilmiş bir ailesidir ve bir nesnenin yaklaşık tanımlarının bir koleksiyonunu verir. Ayrıca (F,A) esnek kümesini aşağıda ki yaklaşımların bir koleksiyonu olarak gösterebiliriz

$(F,A)=\{$ *hızlı futbolcu* $=\{f_1,f_2\}$, *bitirici futbolcu* $=\{f_3\}$, *top kontrol eden futbolcu* $=U$, *top çalan futbolcu* $=\{f_1,f_3,f_4\}$, *dayanaklı futbolcu* $=\{f_3,f_4\}\}$ Burada her bir yaklaşımın iki kısmı vardır;

(1) Bir tahmini P ve

(2) Bir v yaklaşık değer kümesi (veya basit v değer kümesi) dir.

Örneğin *hızlı futbolcu* $=\{f_1,f_2\}$ yaklaşımı için aşağıda ki özelliklere sahibiz;

(1) Tahmini isim *hızlı futbolcu* ve

(2) Yaklaşık değer kümesi veya değer kümesi $\{f_1,f_2\}$' dir.

Tezin diğer kısımlarında kullanılan esnek küme teorisine ait Maji ve ark. [4]' nın temel tanım ve işlemler verilmiştir.

1.2.3. Tanım

U üzerinde (F,A) ve (G,B) esnek kümeleri için, eğer

(1) $A\subseteq B$ ve

(2) $\forall x\in A$ için $F(x)$ ve $G(x)$ özdeş yaklaşımlar

ise (F,A), (G,B)' nin *esnek alt kümesi*dir diyebiliriz ve $(F,A)\tilde{\subset}(G,B)$ ile gösterilir. Ayrıca (G,B)'ye, (F,A)'nın *esnek üst kümesi*dir denir ve $(F,A)\tilde{\supseteq}(G,B)$ ile gösterilir [4].

1.2.4. Tanım

Eğer (F,A), (G,B)'nin esnek alt kümesi ve (G,B) de (F,A) 'nın esnek alt kümesi ise (F,A) ve (G,B) esnek kümelerine U üzerinde *esnek eşittir* denir [4].

1.2.5. Tanım

(F,A), U üzerinde bir esnek küme olsun.

(1) Eğer $\forall x \in A$ için $F(x) = \phi$ ise (F,A) esnek kümesine *boş esnek küme* denir ve Φ ile gösterilir.

(2) Eğer $\forall x \in A$ için $F(x) = U$ ise (F,A) esnek kümesine *mutlak esnek küme* denir ve $\tilde{A}$ ile gösterilir [4].

1.2.6.Tanım

(F,A) ve (G,B), U üzerinde iki esnek küme olsun. $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)$ ile gösterilen "(F,A) *VE* (G,B)" işlemi

$$(F,A)\tilde{\wedge}(G,B) = (H, A \times B)$$

ile tanımlanır. Burada $\forall (x,y) \in A \times B$ için

$$H(x,y) = F(x) \cap G(y)$$

şeklindedir [4].

1.2.7.Tanım

(F,A) ve (G,B), U üzerinde iki esnek küme olsun. $(F,A)\tilde{\vee}(G,B)$ ile gösterilen "(F,A) *VEYA* (G,B)" işlemi

$$(F,A)\tilde{\vee}(G,B) = (H, A \times B)$$

ile tanımlanır. Burada $\forall (x,y) \in A \times B$ için

$$H(x,y) = F(x) \cup G(y)$$

şeklindedir [4].

1.2.8. Örnek

Birinci taraftara göre "iyi uyuncu" (F,A) ile tanımlanan ve başka bir taraftara göre " iyi uyuncu" (G,B) ile tanımlanan esnek kümeleri göz önüne alalım. Kabul edelim ki

$U=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6\}$, $A=\{$*hızlı, uzun, pas yapan*$\}$ ve

$B=\{$*hızlı, bencil, top çalan*$\}$ şeklinde verilsin.

F (*hızlı*)= $\{f_1,f_3,f_6\}$, F (*uzun*)= $\{f_1,f_2,f_4,f_5,f_6\}$, F (*pas yapan*) = $\{f_5\}$, G (*hızlı*) = $\{f_1,f_3,f_5\}$, G (*bencil*) = $\{f_1,f_2,f_4\}$ ve G (*top çalan*) = U olsun. O halde

$(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)=(H,A\times B)$ dir. Burada

H (*hızlı, hızlı*)= $\{f_1,f_3\}$, H (*hızlı, bencil*)= $\{f_1\}$, H (*hızlı, top çalan)*= $\{f_1,f_3,f_6\}$,

H (*uzun, hızlı*)= $\{f_1,f_5\}$, H (*uzun, bencil*)=$\{f_1,f_2,f_4\}$,

H (*uzun, top çalan*)=$\{f_1,f_2,f_4,f_5,f_6\}$, H (*pas yapan, hızlı*)= $\{f_5\}$,

H (*pas yapan, bencil*)=ϕ ve H (*pas yapan, top çalan*)= $\{f_5\}$ dir.

Benzer şekilde VEYA işlemine de uygulayabiliriz.

1.2.9. Tanım

$(F_i,A_i)_{i\in I}$, U üzerinde boştan farklı esnek kümelerin bir ailesi olsun. Bu esnek kümelerin $\tilde{\wedge}_{i\in I}(F_i,A_i)$ VE-esnek kümesi $B=\Pi_{i\in I}A_i$ ve $\forall x=(x_i)_{i\in I}\in B$ için

$$H(x)=\bigcap_{i\in I}F_i(x)$$

olmak üzere (H,B) olarak tanımlanır. $\tilde{\wedge}_{i\in I}(F_i,A_i)=(H,B)$ şeklinde gösterilir.

Buna benzer $\tilde{\vee}_{i\in I}(F_i,A_i)$ VE-esnek kümesi $B=\prod_{i\in I}A_i$ ve $\forall x=(x_i)_{i\in I}\in B$ için

$$G(x)=\bigcup_{i\in I}F_i(x_i)$$

olmak üzere (H,C) olarak tanımlanır. $\tilde{\vee}_{i\in I}(F_i,A_i)=(H,C)$ ile gösterilir [6].

1.2.10. Tanım

(F,A) ve (G,B), U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu *esnek kümelerin birleşimi* (H,C)'dir. Burada $C=A\cup B$ ve $\forall x\in C$ için,

$$H(x)=\begin{cases} F(x) & eğer \quad x\in A-B, \\ G(x) & eğer \quad x\in B-A, \\ F(x)\cup G(x) & eğer \quad x\in A\cap B \end{cases}$$

ile tanımlanır. $(F,A)\tilde{\cup}(G,B)=(H,C)$ şeklinde gösterilir [4].

1.2.11 Örnek

Örnek (1.2.8)'i göz önüne alırsak,

$$(F,A)\tilde{\cup}(G,B)=(H,C)$$

$C=A\cup B=\{$*hızlı, uzun, pas yapan, bencil, top çalan*$\}$ dir. Burada

H (*hızlı*) $=\{f_1,f_3,f_5,f_6\}$, H (*uzun*) $=\{f_1,f_2,f_4,f_5,f_6\}$,

H (*pas yapan*) $=\{f_5\}$, H (*bencil*) $=\{f_1,f_2,f_4\}$ ve H (*top çalan*)= U dir.

1.2.12. Tanım

$(F_i,A_i)_{i\in I}$, U üzerinde boştan farklı esnek kümelerin bir ailesi olsun. Bu esnek kümelerin birleşimi, $B=\bigcup_{i\in I}A_i$, $I(x)=\{i\in I, x\in A_i\}$, $\forall x\in B$ için

$$G(x)=\bigcup_{i\in I(x)}F_i(x)$$

olmak üzere (G,B) olarak tanımlanır. $\tilde{\bigcup}_{i\in I}(F_i,A_i)=(G,B)$ şeklinde gösterilir [6].

1.2.13. Tanım

(F,A) ve (G,B), U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu *esnek kümelerin ikili kesişimi* (H,C)'dir. Burada $C=A\cap B$ ve $\forall x\in C$ için

$$H:C\longrightarrow P(U)$$

dönüşümü $H(x)=F(x)\cap G(x)$ şeklinde tanımlıdır. $(F,A)\tilde{\prod}(G,B)=(H,C)$ ile gösterilir [6].

1.2.14. Örnek

$(F,A)\tilde{\prod}(G,B)=(H,C)$. Burada $C=A\cap B=\{$ *hızlı*$\}$ ve H (*hızlı*) $=\{f_1,f_3\}$ olur.

1.2.15. Tanım

$(F_i,A_i)_{i\in I}$, U üzerinde boştan farklı esnek kümelerin bir ailesi olsun. Bu esnek kümelerin ikili kesişimi $B=\bigcap_{i\in I}A_i$ ve $\forall x\in B$ için

$$G(x)=\bigcap_{i\in I}F_i(x)$$

olmak üzere (G,B) şeklinde tanımlanır. $\tilde{\prod}_{i\in I}(F_i,A_i)=(G,B)$ şeklinde gösterilir [6].

1.2.16. Tanım

(F,A) ve (G,B), U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu *esnek kümelerin genişletilmiş kesişimi* (H,C)'dir. Burada $C=A\cup B$ ve $\forall x\in C$ için,

$$H(x)=\begin{cases} F(x) & eğer \quad x\in A-B, \\ G(x) & eğer \quad x\in B-A, \\ F(x)\cap G(x) & eğer \quad x\in A\cap B \end{cases}$$

ile tanımlanır. $(F,A)\prod_{\varepsilon}(G,B)=(H,C)$ şeklinde gösterilir [19].

1.2.17. Örnek

$(F,A)\prod_{\varepsilon}(G,B)=(H,C)$ dır. Burada

$C=A\cup B=$ { *hızlı*, *uzun*, *pas yapan*, *bencil*, *top çalan* } ve

H (*hızlı*) $=\{f_1,f_3\}$, H (*uzun*)= $\{f_1,f_2,f_4,f_5,f_6\}$ H (*pas yapan*) = $\{f_5\}$,

H (*bencil*) = $\{f_1,f_2,f_4\}$ ve H (*top çalan*) = U dir.

1.2.18. Tanım

U üzerinde (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin *kısıtlanmış birleşimi* (H,C)' dir. Burada $A\cap B\neq\phi$ ve $\forall x\in C=A\cap B$ için

$$H(x)=F(x)\bigcup G(x)$$

ile tanımlanır ve $(F,A)\cup_{R}(G,B)=(H,C)$ ile gösterilir [19].

1.2.19. Örnek

Örneği (1.2.8.)' i göz önüne alırsak $A\cap B=\{hızlı\}\neq\phi$ dir. O halde

$H(hızlı)=F(hızlı)\bigcup G(hızlı)=\{f_1,f_3,f_5\}\bigcup\{f_1,f_3,f_6\}=\{f_1,f_3,f_5,f_6\}$ dir.

1.2.20. Tanım

U üzerinde (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin *kısıtlanmış kesişimi* (H,C)' dir. Burada $A\cap B\neq\phi$ ve $\forall x\in C=A\cap B$ için

$$H(x)=F(x)\bigcap G(x)$$

ile tanımlanır ve $(F,A)\Cap(G,B)=(H,C)$ ile gösterilir [19].

1.2.21. Örnek

Bir önceki örnekten $A \bigcap B = \{hızlı\}$'dir ve tanıma göre

$H(hızlı) = F(hızlı) \bigcap G(hızlı) = \{f_1, f_3, f_5\} \bigcap \{f_1, f_3, f_6\} = \{f_1, f_3\}$ dir.

O halde $(F, A) \Cap (G, B) = (H, C) = \{H(hızlı) = \{f_1, f_3\}\}$ dir.

1.2.22. Tanım

$(F_i, A_i)_{i \in I}$, U üzerinde boştan farklı esnek kümelerin bir ailesi olsun. Bu esnek kümelerin kısıtlanmış kesişimi $B = \bigcap_{i \in I} A_i \neq \phi$ ve $\forall x = (x_i)_{i \in I} \in B$ için

$$H(x) = \bigcap_{i \in I} F_i(x)$$

olmak üzere (H, B) olarak tanımlanır. $\Cap_{i \in I} (F_i, A_i) = (H, B)$ şeklinde gösterilir [17].

1.3. ESNEK GRUP

G bir grup, A boştan farklı bir küme olsun. R, A kümesinin bir elemanıyla G grubunun bir elemanı arasındaki keyfi bir ikili işlemi temsil etsin.

$$F : A \longrightarrow P(G)$$

küme değerli dönüşüm

$$F(x) = \{y \in G : (x, y) \in R, x \in A \ ve \ y \in G\}$$

olarak tanımlanabilir. Bu durumda (F, A) çifti G üzerinde bir esnek kümedir.

1.3.1. Tanım

(F, A), G üzerinde bir esnek küme olsun. (F, A)'ya G üzerinde bir *esnek grup* denir ancak ve ancak $\forall x \in A$ için, $F(x) < G$ (altgrup) dir [16].

1.3.2. Örnek

$(Z_6,+)$ grubunu göz önüne alalım ve $A=\{0,2,4\}$ olsun. Her $x\in A$ için

$$F(x)=\{y\in Z_6 : xRy \Leftrightarrow (x+y)\in\{0,2,4\}\}$$

şeklinde tanımlansın. O halde $F(0)=F(2)=F(4)=\{0,2,4\}<Z_6$ dir. Bu nedenle (F,A), Z_6 grubunun üzerinde bir esnek gruptur.

1.3.3. Tanım

(F,A) ve (K,B), G üzerinde iki esnek grup olsun.

(1) $B\subset A$,

(2) $\forall x\in B$ için $K(x)<F(x)$

şartlar sağlanıyorsa, (K,B) esnek kümesine (F,A)' nın *esnek altgrubu* denir ve $(K,B)\tilde{<}(F,A)$ ile gösterilir [16].

1.3.4. Örnek

$G=Z_6=A$ ve $B=\{0,2,4\}$ olsun. $\forall x\in A$ için

$$F(x)=\{y\in G : xRy \Leftrightarrow (xy)\in\{0,2,4\}\}$$

ve $\forall x\in B$ için

$$H(x)=\{y\in G : xRy \Leftrightarrow (x+y)=\{0,2,4\}\}$$

şeklinde tanımlanmış olsun. O halde $B\subset A$ dir. Ayrıca

$$H(0)=\{0,2,4\}<F(0)=Z_6,\ H(2)=\{0,2,4\}<F(2)=Z_6 \text{ ve}$$

$H(4)=\{0,2,4\}<F(4)=Z_6$ dir. Yani $(H,B)\tilde{<}(F,A)$ olur.

1.3.5. Tanım

(F,A), G üzerinde esnek grup ve (H,B), (F,A)' nın bir esnek altgrubu olsun. Eğer $\forall x\in B$ için $H(x)\lhd F(x)$ (normal altgrup) ise (H,B), (F,A)' nın bir *normal esnek altgrubu* denir [16].

1.4. ESNEK YARIHALKA

Feng ve ark. [6] esnek grup yapısı tanımlanırken bazı durumlarda yanlış anlaşılmalara sebep olabilecek bir eksikliğin olduğunu fark etmişler ve bu yüzden esnek yarıhalka tanımını verirken bunu da göz önünde bulundurarak bir esnek kümenin desteği anlamına gelen "$Supp$" kavramını kullanmışlardır. (F,A) esnek kümesi için

$$Supp(F,A)=\{x\in A: F(x)\neq\phi\}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan boş esnek kümenin $Supp(F,A)=\phi$ şartını sağladığını, benzer olarak boştan farklı esnek kümenin $Supp(F,A)\neq\phi$ şartını sağladığını kolaylıkla söyleyebiliriz.

1.4.1. Tanım

(F,A), S yarıhalkası üzerinde boştan faklı bir esnek küme olsun. $\forall x\in Supp(F,A)$ için $F(x)$, S yarıhalkasının altyarıhalkası oluyorsa (F,A)'ya S üzerinde bir *esnek yarıhalka* denir [6].

1.4.2. Örnek

$(Z_6,+,.)$ yarıhalkasını göz önüne alalım. $A=Z_6$ ve $\forall x\in A$ için

$$F(x)=\{y\in Z_6 : xRy \Leftrightarrow x\cdot y\in\{0,2,4\}\}$$

olsun. O halde (F,A), Z_6 yarıhalkanın üzerinde bir esnek küme olduğu açıktır. Ayrıca $F(0)=F(2)=F(4)=Z_6$ ve $F(1)=F(3)=F(5)=\{0,2,4\}$ dir. O halde $Supp(F,A)=Z_6$ dir. $\forall x\in Supp(F,A)$ için

$$F(x)=Z_6 \text{ veya } \{0,2,4\} \text{ dir.}$$

Fakat her iki küme de Z_6 yarıhalkanın birer altyarıhalkaları olduğundan (F,A) bir esnek yarıhalkadır.

1.5. ESNEK HALKA

1.5.1. Tanım

R bir halka ve (F,A), R üzerinde boştan farklı bir esnek küme olsun. $\forall x \in A$ için $F(x)$, R'nin althalkası ise (F,A) esnek kümesine R üzerinde *esnek halka* denir [22].

1.5.2. Örnek

$R = A = \mathrm{Z}_6$ ve $\forall x \in A$ için

$$F(x) = \{ y \in R : xRy \Leftrightarrow (x \cdot y) = 0 \}$$

olsun. O halde

$F(0) = R$, $F(1) = \{0\}$, $F(2) = \{0,3\}$, $F(3)=\{0,2,4\}$, $F(4) = \{0,3\}$ ve $F(5) = \{0\}$ dir.

Ayrıca bu kümeler R halkasının birer althalkası olduğundan dolayı (F,A), R'nin bir esnek halkası olur [22].

1.5.3. Tanım

(F,A) ve (G,B), R üzerinde iki esnek halka olsun.

(1) $B \subset A$,

(2) $\forall x \in Supp(G,B)$ için $G(x)$, $F(x)$'in bir althalkasıdır

şartlar sağlanıyorsa, (G,B) esnek kümesine (F,A)'nın *esnek althalkası* denir [22].

1.5.4. Örnek

$R = A = Z_6$ ve $B = \{1,3,5\}$ olsun. $\forall x \in A$ için

$$F(x) = \{ y \in R : xRy \Leftrightarrow (x \cdot y) \in \{0,2,4\} \}$$

ve $\forall x \in B$ için

$$G(x) = \{ y \in R : xRy \Leftrightarrow (x \cdot y) = 0 \}$$

şeklinde tanımlanmış olsun. O halde $B \subset A$ dir. Ayrıca

$$G(1) = \{0\},\ G(3) = \{0,2,4\} \text{ ve } G(5) = \{0\} \text{ dir.}$$

Yani $Supp(G,B) = B$ olur. Ayrıca

$$F(1) = \{0,2,4\} = F(3) = F(5) \text{ dir.}$$

1.6. ESNEK YAKIN-HALKALAR

Son yıllarda halka üzerinde çalışılan esnek kavramını Sezgin, Atagün ve Aygün [27] yakın-halkaya taşımışlar ve bir kaç tanımlar ve teoriler ortaya atmışlardır. Bu kısımda bu tanımlardan bazıları verilmiştir.

1.6.1. Tanım

(F,A), N yakın-halkası üzerinde boştan faklı bir esnek küme olsun.

$\forall x \in Supp(F,A)$ için $F(x)$, N yakın-halkasının alt yakın-halkası oluyorsa (F,A)'ya N üzerinde bir *esnek yakın-halka* denir [27].

1.6.2 Örnek

*Örnek(1.1.4)'*den $(Z_6,+,.)$ bir sağ yakın halkadır. $A = Z_6$ ve

$$F : A \longrightarrow P(Z_6)$$

küme değerli fonksiyonu $\forall x \in A$ için

$$F(x) = \{y \in Z_6 : xRy \Leftrightarrow xy \in \{0,3\}\}$$

olacak şekilde (F,A), Z_6 üzerinde bir esnek küme olsun. Bu arada

$$F(0) = F(3) = Z_6 \text{ ve } F(1) = F(2) = F(4) = F(5) = \{0,3\}$$

olur ki $Supp(F,A) = Z_6$ olmak üzere $\forall x \in Supp(F,A)$ için $F(x)$, Z_6'nın alt yakın-halkasıdır. Dolayısıyla (F,A), Z_6 üzerinde bir esnek yakın-halkadır. $A = Z_6$ ve

$$G : A \longrightarrow P(Z_6)$$

küme değerli fonksiyonu $\forall x \in A$ için

$$G(x) = \{ y \in Z_6 : xRy \Leftrightarrow xy \in \{1,2,3\} \}$$

olacak şeklide (G, A), Z_6 üzerinde bir esnek küme olsun. $G(1) = \{0,1,3,4\}$

olup Z_6'nın alt yakın-halkası olmadığı için (G, A), Z_6 üzerinde bir esnek yakın-halka değildir [27].

1.6.3. Tanım

$(F, A), (G, B)$ sırasıyla N_1, N_2 yakın-halkaları üzerinde iki esnek yakın-halka olsun. $f : N_1 \longrightarrow N_2$ ve $g : A \longrightarrow B$ iki dönüşüm olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan (f, g) çiftine esnek yakın-halka homomorfizması denir:

(1) f, yakın-halka homomorfizmadır ve örtendir (epimorfizmasıdır).

(2) g, örten bir dönüşümdür.

(3) $\forall x \in A$ için, $f(F(x)) = G(g(x))$ sağlanır.

(F, A) ve (G, B) arasında bir esnek yakın-halka homomorfizması varsa (F, A), (G, B)'ye esnek homomorfiktir denir ve $(F, A) \sim (G, B)$ şeklinde gösterilir. Ayrıca, f bir yakın-halka izomorfizması, g birebir ve örten bir dönüşüm ise, bu taktirde (f, g)'ye esnek yakın-halka izomorfizması denir ve $(F, A) \simeq (G, B)$ ile gösterilir [27].

1.6.4. Örnek

Örnek (1.1.4.)'deki $N = (\mathbb{Z}_6, +, .)$ sağ yakın-halkasını ve $N = (\mathbb{Z}_6, +, .)$'nın altyakın-halkası olan $\{0,2,4\}$ kümesini alalım. $\forall x \in Z_6$ için,

$$f : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \{0,2,4\}$$
$$x \longrightarrow f(x) = 4x$$

olarak tanımlansın. f 'nin bir yakın-halka epimorfizması olduğunu görmek kolaydır. $\forall x \in Z_6$ için,

$$g : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \{0,2,4\}$$
$$x \longrightarrow f(x) = 2x$$

olacak şekilde tanımlansın. g 'nin surjektif olduğu kolaylıkla gösterilebilir. $F : A \to P(\mathbb{Z}_6)$ küme değerli fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{Z}_6$ için

$$F(x) = 0 \cup \{ y \in \mathbb{Z}_6 : 3x = y \}$$

olarak tanımlansın. $\forall x \in \mathbb{Z}_6$ için $F(x) = \{0,3\}$ olur ki buradan $(F, \mathbb{Z}_6)$, $\mathbb{Z}_6$ üzerinde bir esnek yakın-halkadır.

$$G : \{0,2,4\} \longrightarrow \{0,2,4\}$$

küme değerli fonksiyonu $\forall x \in \{0,2,4\}$ için

$$G(x) = \{ y \in \{0,2,4\} : x0 = y \}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $(G, \{0,2,4\}), \{0,2,4\}$ üzerinde bir esnek kümedir. Ayrıca $(G, \{0,2,4\})$ 'ün $\{0,2,4\}$ üzerinde bir esnek yakın-halka olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Ayrıca, $\forall x \in \mathbb{Z}_6$ için $f(F(x)) = f(\{0,3\}) = \{0\}$ ve $G(g(x)) = G(\{0,2,4\}) = \{0\}$ olur. Yani $\forall x \in \mathbb{Z}_6$ için $f(F(x)) = G(g(x))$ sağlanır. Dolayısıyla (f, g) bir esnek yakın-halka homomorfizmasıdır ve $(F, \mathbb{Z}_6) \simeq (G, \{0,2,4\})$ olur [27].

2. BÖLÜM

CİSİM VE YAKIN-CİSİM

Bu bölümde cisim ve yakın-cisim kavramları ile ilgili bazı temel tanım ve teoremler verilecektir. Cisim için John [20] ve yakın-cisim için pilz [18]kitabı temel kaynak olarak alınmıştır.

2.1. CİSİM

2.1.1.Tanım

K bir halka olsun. Eğer

(1) K değişmeli,

(2) K birimli,

(3) K de sıfırdan farklı her elemanın çarpımsal tersi mevcut ise

K **'** ye bir *cisim* denir [20].

2.1.2. Örnek

Q rasyonel sayılar halkası, R reel sayılar halkası ve C karmaşık sayılar halkaları bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle birer cisimdirler [20].

2.1.3. Teorem

$n>1$ Pozitif bir tamsayı olmak üzere, Z_n' in bir cisim olması için gerek ve yeter şart n nin asal olmasıdır [20].

2.2. YAKIN-CİSİM

2.2.1. Tanım

$(N,+,.)$ bir yakın-halka olsun. Eğer $(N^{*}=N-\{0\},.)$ bir grup ise, N ' ye bir *yakın-cisim* denir [18].

Bu çalışmada yakın-cismi M ile gösterilecektir.

2.2.2. Örnek

$(Z_2,+)$ bir grup ayrıca

$$0\cdot 0=0\cdot 1=0 \text{ ve } 1\cdot 0=1\cdot 1=1$$

olsun. O halde $(Z_2^{*},\cdot)$ bir grup olur. Yani $(Z_2,+,\cdot)$ üçlüsü bir yakın-cisimdir [18].

2.2.3. Örnek

$(Z_5,+)$ bir grup ayrıca " $*$ " işlemi Z_5 üzerinde tablo (2) şekilde tanımlanırsa, o halde $(Z_5,+,*)$ bir yakın-cisimdir.

Tablo 2.1: $(Z_5,*)$

*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	1	2	3	4
2	4	2	3	4	1
3	2	3	4	1	2
4	3	4	1	2	3

2.2.4. Örnek

$(Z_3,+)$ bir grup ayrıca "$\cdot$" işlemi Z_3 üzerinde tablo (3) deki gibi tanımlanmış olsun.

Tablo 2.2: $(Z_3,.)$

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	1	1	2
2	2	2	1

O zaman $(Z_3\setminus\{0\},\cdot)$ bir gruptur. Fakat $\forall a,b,c\in Z_3$ için

$$a\cdot(b+c)\neq(a\cdot b)+(a\cdot c)$$

dir. Yani sol taraftan dağılma şartı sağlanmıyor dolayısıyla $(Z_3,+,\cdot)$ üçlüsü bir sağ yakın-cisim olur.

2.2.5. Teorem

Her sıfır-simetrik yakın-halka için aşağıdakiler denktir:

(1) N bir yakın-cisimdir.

(2) $N_d\neq\{0\}$ ve $\forall n\in N^*$ için $Nn=N$ dir [18].

İspat: $(1)\Rightarrow(2)$

Kabul edelim ki $N_d=\{0\}$ olsun. N bir yakın-cisim olduğundan $\forall m,n\in N$ için

$$1\cdot(m+n)=(m+n)\cdot 1=m\cdot 1+n\cdot 1=1\cdot m+1\cdot n \text{ dir.}$$

O halde

$1\in N_d\Rightarrow N_d\neq\{0\}$ dir.

Bu da bir çelişkidir. Yani $N_d\neq\{0\}$ dir. Şimdi $\forall n\in N^*$ için

$$Nn=N$$

olduğunu göstereceğiz. N bir yakın-cisim olduğundan $(N^*,.)$ bir gruptur.

O halde N yakın-cisminde $\forall n \in N^* = N - \{0\} \Rightarrow n \neq 0$ için bir n' şeklinde tersi vardır.

$$Nn = N(n')n = N(n'n) = Ne = N$$

bu da N bir yakın-cisim iken $N_d \neq 0$ ve $\forall n \in N^*$ için $Nn = N$ demektir.

$(2) \Rightarrow (1)$ $\forall a,b \in N^*$ için

$$b'b = a \text{ ve } a'a = b'$$

olacak şekilde $a',b' \in N^*$ vardır.

$$a'a = b'$$

$$(a'a)b = b'b$$

$$a'(ab) = a \neq 0$$

$\therefore ab \neq 0$ ve N bir tamlıktır. $d \in N_d$ elemanını alalım $ed = d$ olacak şekilde $e \in N$ vardır. Aynı zamanda $Nn = N$ olduğundan $de = d$ dir ve N bir yakın-halka olduğundan $(de - d) \in N$ için

$$(de - d)d = d(ed) - dd = dd - dd = 0 \text{ dir.}$$

Şimdi $n \in N^*$ için alırsak

$$d(en - n) = den - dn = 0 \text{ olur.}$$

o halde

$$en - n = 0$$

$$en = n$$

$\forall n \in N^*$

$$n'n = e$$

olacak şekilde $n' \in N^*$ vardır. O zaman $(N^*,.)$ bir gruptur. Oysa N bir yakın-cisim.

2.3. YAKIN-CİSMİN MERKEZİ VE İÇİ

2.3.1. Tanım

M bir yakın-cisim olmak üzere, $(M,.)$ grubunun $c(M)$ ile gösterilen merkezi aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$c(M)=\{m\in M \mid \forall n\in M \quad için \quad mn=nm\}$$

önceki bölümlerde tanımlanmış N_d ' ye M yakın-cisminin *içi* denir [18].

2.3.2. Önerme

Her M yakın-cisim bir K komutatif alt cisim kapsar [18].

İspat:

$\forall n,m\in M$ için

$1.(n+m)=1.n+1.m$ dir.

$1\in N_d \neq \phi$ dir. Ayrıca N_d bir cisimdir

2.3.3. Teorem

M bir yakın-cisim ise N_d , M ' nin bir alt cismidir [18].

Not: $c(M)\subseteq N_d$ dir [18].

2.4. ALT YAPILAR

2.4.1. Tanım

K bir cisim ve $S\subseteq K$ olsun. S , K ' nın alt cismi olması için gerek ve yeter koşul S kümesinin cisim olmasıdır. Yani $(K,+,.)$ bir cisim olsun. S kümesi K ' nın bir alt cismi olması için aşağıda ki şartları sağlaması gerekir;

(1) $0_K\in S$,

(2) $\forall x,y\in S$ için $x-y\in S$,

(3) $1_K \in S$ ve

(4) $\forall x, y \in S$ ve $y \neq 0_K$ için $xy^{-1} \in S$ dir [20].

2.4.2. Örnek

$S = \{a+bi \mid a,b \in Q\}$ olsun. O halde $(S,+,.)$, $(C,+,.)$ cisminin bir alt cismidir [20].

2.4.3. Tanım

M bir yakın-cisim ve $L \subseteq M$ olsun. L, M ' nın *altyakın-cismi* olması için gerek ve yeter şart L 'nin yakın-cisim olmasıdır [26].

Yani $(L,+,.)$, $(M,+,.)$' nın altyakın-cismi olması için gerek ve yeter şartlar;

(1) $(L,+)$ kümesi $(M,+)$ grubunun bir altgrubudur,

(2) $\forall x, y \in L$ için $x.y^{-1} \in L$ dir. Burada $y \neq 0_M$ dir.

2.4.4. Örnek

$M = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ olsun. M Kümesi normal metris toplama işlemi altında bir grup oluşturduğu açıktır. Kolaylık için $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = m_1$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = m_2$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = m_3$ ve $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = m_4$ şeklinde alalım ve M üzerinde "." işlemi tablo (4)' te verilmiş şekilde tanımlansın.

Tablo 2.3: $(M,.)$

.	m_1	m_2	m_3	m_4
m_1	m_1	m_1	m_1	m_1
m_2	m_3	m_4	m_2	m_3
m_3	m_1	m_2	m_3	m_4
m_4	m_3	m_3	m_4	m_2

O halde $(M^*,.)$ bir gruptur. Burada $M^* = M - m_1$ dir. Ayrıca $(M,+,.)$ üçlüsü bir sağ yakın-cisimdir. Fakat cisim değil çünkü sol yakın-cisim değil.

Şimdi bu yakın-cismin bir $S = \{m_1, m_3\}$ alt kümesini göz önüne alırsak. S , M yakın-cisminin bir alt cismi olduğu açıktır.

3. BÖLÜM

ESNEK CİSİM VE ESNEK YAKIN-CİSİM

Bu bölümde; ikinci bölümde verilen esnek grup, esnek halka ve esnek yakın-halka kavramlarından faydalanarak, esnek cisim ve esnek yakın-cisim kavramları verilecektir. Bu bölümde aksi belirtilmediği sürece K kümesi bir cisim kabul edilecektir.

3.1. ESNEK CİSİM

A boştan farklı bir küme olmak üzere $A \times K$ 'nın bir alt kümesi R olsun.

$$F : A \longrightarrow P(K)$$

küme değerli dönüşüm, $\forall x \in A$ için

$$F(x) = \{ y \in K : (x, y) \in R \}$$

olarak tanımlanırsa (F, A) çifti, R bağıntısından elde edilen K üzerinde bir esnek kümedir. (F, A) esnek kümesi için "$Supp$" kavramı 1. bölümde verildiği şekilde tanımlıdır.

Bu bilgiler ışığında esnek cisim tanımını verebiliriz.

3.1.1. Tanım

(F, A), K cismi üzerinde boştan farklı bir esnek küme olsun. $\forall x \in Supp(F, A)$ için $F(x)$ K cisminin alt cismi oluyorsa (F, A)'ya K üzerinde *esnek cisim* denir [26].

3.1.2. Örnek

Z_5 cismini göz önüne alalım. $A = \{0, 1, 2\}$, Z_5 'in bir altkümesidir. $\forall x \in A$ için

$$F(x)=\{y\in Z_5 : xRy \Leftrightarrow x\cdot y=0\}$$

dir. O halde $Supp(F,A)=A$ dir.

$$F(0)=Z_5$$

ve Z_5 kendisinin bir aşikâr alt cismi olduğundan ayrıca

$$F(1)=F(2)=\{0\}$$

olup $\{0\}$, Z_5' in alt cismi olduğundan (F,A), Z_5 üzerinde bir esnek cisimdir [26].

3.1.3. Teorem

(F,A) ve (G,B)**,** K üzerinde esnek cisim olsun. Bu durumda;

(1) $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)$ eğer boştan farklı bir esnek küme ise K üzerinde bir esnek cisimdir.

(2) (F,A) ve (G,B), K cismi üzerinde esnek cisim olsun. $A\bigcap B=\phi$ ise $(F,A)\tilde{\bigcup}(G,B)$, K üzerinde bir esnek cisimdir.

(3) $(F,A)\tilde{\Pi}(G,B)$ ikili kesişimi eğer boştan farklı bir esnek küme ise K üzerinde bir esnek cisimdir [26].

İspat: **(1)** *Tanım* (1.2.6.)'dan

$$(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)=(H,A\times B)$$

olmak üzere $\forall(x,y)\in A\times B$ için

$$H(x,y)=F(x)\cap G(y)$$

şeklindedir. Hipotezden, $(H,A\times B)$ K üzerinde boştan farklı bir esnek kümedir.

$(x,y)\in Supp(H,A\times B)$ olmak üzere $H(x,y)=F(x)\cap G(y)\neq\phi$ dir. Buradan $\phi\neq F(x)$ ve $\phi\neq G(y)$'nin her ikisi de K'nın alt cismidir. Dolayısıyla bunların kesişimi olan $H(x,y)$ de $\forall(x,y)\in Supp(H,A\times B)$ için K'nın alt cismidir. Buradan $(H,A\times B)$, K üzerinde bir esnek cisimdir.

(2) *Tanım* (1.2.10.)'den

$$(F,A)\tilde{\bigcup}(G,B)=(H,A\bigcup B)$$

olmak üzere $\forall x\in A\bigcup B$ için

$$H(x)=\begin{cases} F(x) & eğer \quad x\in A-B \\ G(x) & eğer \quad x\in B-A \\ F(x)\bigcup G(x) & eğer \quad x\in A\bigcap B \end{cases}$$

dir. Fakat hipotezden $A\bigcap B=\phi$ olduğundan $\forall x\in A\bigcup B$ için ya $x\in A-B$ olup $H(x)=F(x)$ ya da $x\in B-A$ olup $H(x)=G(x)$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

(3) *Tanım* (1.2.13.)'ten

$$(F,A)\tilde{\prod}(G,B)=(H,C=A\bigcap B)$$

olmak üzere $\forall x\in A$ için

$$H(x)=F(x)\cap G(x)$$

şeklindedir. Kabul edelim ki (H,C), K üzerinde boştan farklı bir esnek küme olsun.

$x\in Supp(H,C)$ olmak üzere, $H(x)=F(x)\cap G(x)\neq\phi$ dır. Buradan $\phi\neq F(x)$ ve $\phi\neq G(x)$ K'nın altcisimdir. Dolayısıyla $H(x)$ de $\forall x\in Supp(H,C)$ için K'nın altcisimdir. Buradan (H,C), K üzerinde bir esnek cisim olur.

3.1.4. Örnek

$K=Z_5$, $A=\{0,1,2,3,4\}$ ve $B=\{0,1,2\}$ olsun. Ayrıca $\forall x\in A$ için

$$F(x)=\{y\in K: xRy \Leftrightarrow x\cdot y=0\}$$

ve $\forall x\in B$ için

$$G(x)=\{y\in K: xRy \Leftrightarrow y^x=0\}$$

olsun. Bu durumda (F,A) ve (G,B), K cismi üzerinde esnek cisim olur. $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)$'nın K üzerinde bir esnek cisim olduğunu göstermek için $\forall(x,y)\in A\times B$ için, $H(x,y)$'nin, K'nın bir alt cismi olduğunu göstermek yeterlidir.

$A\times B=\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),$

$(3,0),(3,1),(3,2),(4,0),(4,1),(4,2)\}$ dir.

$F(0)=Z_5$, $F(1)=F(2)=F(3)=F(4)=\{0\}$ ve $G(0)=G(1)=G(2)=\{0\}$ dir.

Bu yüzden $\forall(x,y)\in A\times B$ için $H(x,y)=\{0\}$ olup K' nın bir alt cismidir.

3.1.5. Örnek

$K=Z_5$, $A=\{0,2,4\}$ ve $B=\{1,3\}$ olsun. Bir önceki örnekte tanımlandığı gibi $\forall x\in A$ için

$$F(x)=\{y\in K: xRy \Leftrightarrow x\cdot y=0\}$$

ve $\forall x\in B$ için

$$G(x)=\{y\in K: xRy \Leftrightarrow y^{x}=0\}$$

olsun. Bu durumda (F,A) ve (G,B), K cismi üzerinde esnek cisim olur. $A\bigcap B=\phi$ olduğu açıktır, ayrıca $F(0)=Z_5$, $F(2)=F(4)=\{0\}$ ve $G(1)=G(3)=\{0\}$

olduğundan $\forall x\in A\bigcup B$ için $H(x)=F(x)$ veya $G(x)$ olup K'nın bir alt cismidir.

Teorem (3.1.3.) ün genelleştirilmiş durumu aşağıda bir sonuç olarak verilmiştir.

3.1.6. Sonuç

$(F_i,A_i)_{i\in I}$, K cismi üzerinde boştan farklı esnek cisimlerin ailesi olsun. Bu taktirde;

(1) $\tilde{\wedge}_{i\in I}(F_i,A_i)$ boştan farklı ise K üzerinde bir esnek cisimdir.

(2) Eğer $\{A_i \mid i\in I\}$' de her $i\neq j$ için $A_i\bigcap A_j=\phi$ ise $\tilde{\bigcup}_{i\in I}(F_i,A_i)$, K üzerinde bir esnek cisim olur [26].

3.1.7. Teorem

(F,A) ve (G,B), K cismi üzerinde esnek cisim olsun. Bu taktirde;

(1) $(F,A) \Cap (G,B)$, K üzerinde esnek cisimdir.

(2) $(F,A)\Pi_{\varepsilon}(G,B)$, K üzerinde esnek cisimdir.

İspat: (1) *Tanım* (1.2.20.)' den

$$(F,A) \Cap (G,B) = (H, C = A \cap B)$$

olmak üzere $\forall x \in C = A \cap B \neq \phi$ için

$$H(x) = F(x) \cap G(x)$$

dir. Kabul edelim ki (H,C), K üzerinde boştan farklı esnek kümedir. $x \in Supp(H,C)$ olmak üzere $H(x) = F(x) \cap G(x) \neq \phi$ dir. Bu durumda $\phi \neq F(x)$ ve $\phi \neq G(x)$, K ' nın alt cismidir. O halde $\forall x \in Supp(H,C)$ için $H(x)$, K ' nın alt cismidir.

(2) *Tanım* (1.2.16)' den

$$(F,A)\Pi_{\varepsilon}(G,B) = (H, C = A \cup B)$$

olmak üzere $\forall x \in A \cup B$ için

$$H(x) = \begin{cases} F(x) & eğer \quad x \in A - B \\ G(x) & eğer \quad x \in B - A \\ F(x) \cap G(x) & eğer \quad x \in A \cap B \end{cases}$$

dir. Kabul edelim ki $(H, A \cup B)$, K üzerinde boştan farklı bir esnek küme olsun. O halde $x \in Supp(H, A \cup B)$ için üç durum vardır. Eğer $x \in A - B$ ise $\phi \neq H(x) = F(x)$ olup, K ' nın bir alt cismi olur, eğer $x \in B - A$ ise $\phi \neq H(x) = G(x)$ olup, K ' nın bir alt cismi olur ve son durumda $x \in A \cap B$ ise $H(x) = F(x) \cap G(x)$ olup, K ' nın bir alt cismi olduğundan $\forall x \in Supp(H, A \cup B)$ için $H(x)$, K ' nın bir alt cismi olur.

3.2. ESNEK CİSMİN ESNEK ALT CİSMİ

3.2.1. Tanım

(F,A) ve (G,B), K cismi üzerinde esnek cisim olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (G,B)' ye (F,A)' nın *esnek alt cismi* denir;

(1) $B \subset A$ ve

(2) $\forall x \in Supp(G,B)$ için $G(x)$, $F(x)$' in alt cismidir [26].

3.2.2. Örnek

$K = Z_5$, $A = \{0,1,2,3,4\}$ ve $B = \{0,1,2\}$ olsun. F ve G *Örnek* (3.1.5.)' teki gibi tanımlanmış olsun. O halde $Supp(G,B) = B$ olduğundan $\forall x \in Supp(G,B)$ için $G(x)$, $F(x)$' in bir alt cismidir [26].

3.2.3. Önerme

(F,A) , (G,A) ve (H,B)**,** K üzerinde esnek cisim olsun. Bu taktirde;

(1) $\forall x \in A$ için $F(x) \subset G(x)$ ise (F,A), (G,A)'nın esnek alt cismidir.

(2) $(F,A)\tilde{\prod}(H,B)$ boştan farklı bir esnek küme ise hem (F,A)'nın hem de (H,B)'nin esnek alt cismidir.

(3) $(F,A) \Cap (H,B)$ boştan farklı bir esnek küme ise, hem (F,A)'nın hem de (H,B)'nin esnek alt cismidir**.**

(4) $(F,A)\prod_{\varepsilon}(G,A)$ boştan farklı bir esnek küme ise hem (F,A)**'**nın hem (G,A)'nin esnek alt cismidir [26].

İspat: (1) $\forall x \in A$ için

$$F(x) \subset G(x)$$

olduğundan $F(x)$, $G(x)$' in bir alt cismidir.

(2) *Tanım* (1.2.13.)' ten

$$(F,A)\tilde{\prod}(H,B)=(M,C)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $A\bigcap B=C\subset A$ ve $A\bigcap B=C\subset B$ dir. Ayrıca

$M(x)=F(x)\bigcap H(x)\subset F(x)$ ve $M(x)=F(x)\bigcap H(x)\subset H(x)$ dir.

(3) Benzer şekilde yapılabilir.

(4) *Tanım* (1.2.16.)' den

$$(F,A)\prod_{\varepsilon}(G,A)=(N,C=A\bigcup A)$$

şeklinde yazabiliriz. $x\in C=A\bigcup A=A$ için

$$N(x)=F(x)\bigcap G(x)\subset F(x)$$

ve

$$N(x)=F(x)\bigcap G(x)\subset G(x)$$

olur ki bu ise ispatı tamamlar.

3.2.4. Teorem

(F,A), K üzerinde esnek cisim olsun ve $(F_i,A_i)_{i\in I}$, (F,A)' nın boştan farklı esnek alt cisimlerin ailesi olsun. Bu taktirde;

(1) $\bigcap i\in I\ (F_i,A_i)$ boştan farklı bir esnek küme ise (F,A)' nın bir esnek alt cisimdir.

(2) $\wedge_{i\in I}(F_i,A_i)$ boştan farklı bir esnek küme ise (F,A)' nın bir esnek alt cisimdir.

(3) $\{A_i:i\in I\}$ ikilisi ayrıksa $\tilde{\bigcup}_{i\in I}(F_i,A_i)$, (F,A)' nın bir esnek alt cisimdir [26].

İspat: (1) *Tanım* (1.2.22.)'ten

$$\tilde{\cap} i \in I \ (F_i, A_i) = (H, B)$$

olmak üzere $B = \bigcap_{i \in I} A_i \neq \phi$ ve $\forall x = (x_i)_{i \in I} \in B$ için

$$H(x) = \bigcap_{i \in I} F_i(x)$$

şeklindedir. $B = \bigcap_{i \in I} A_i \subset A$ olduğu açıktır. Kabul edelim ki (H, B) boştan farklı bir esnek küme olsun. $x \in Supp(H, B)$ olmak üzere $H(x) = \bigcap_{i \in I} F_i(x) \neq \phi$ olur. Buradan, $(F_i, A_i)_{i \in I}$, (F, A)'nın esnek alt cisminin bir ailesi olduğu için $\forall i \in I$ için boştan farklı $F_i(x)$'ler $F(x)$'in birer alt cisimdir. Dolayısıyla $\forall x \in Supp(H, B)$ için $H(x)$, $F(x)$'in alt cismidir. Bu ise ispatı tamamlar.

(2) *Tanım* (1.2.9.)'dan

$$\wedge_{i \in I} (F_i, A_i) = (G, B)$$

olmak üzere $B = \Pi_{i \in I} A_i$ ve $\forall x = (x_i)_{i \in I} \in B$ için

$$G(x) = \bigcap_{i \in I} F_i(x)$$

şeklindedir. $B = \Pi_{i \in I} A_i \subset \Pi_{i \in I} A$ olduğu için *Tanım (3.2.1)*' in ilk şartı sağlanmış olur. Kabul edelim ki (G, B) boştan farklı bir esnek küme olsun. $x = (x_i)_{i \in I} \in Supp(G, B)$ olmak üzere

$$G(x) = \bigcap_{i \in I} F_i(x) \neq \phi$$

olur. Buradan, $(F_i, A_i)_{i \in I}$, (F, A)'nın esnek alt cisminin bir ailesi olduğu için $\forall i \in I$ için boştan farklı $F_i(x)$'ler $F(x)$'in birer alt cisimdir. Dolayısıyla $\forall x \in Supp(G, B)$ için $G(x)$, $F(x)$'in alt cismidir. Bu ise ispatı tamamlar.

(3) *Tanım* (1.2.12.)'den

$$\tilde{\bigcup}_{i \in I} (F_i, A_i) = (T, B)$$

olmak üzere, $B = \bigcup_{i \in I} A_i$, $I(x) = \{i \in I, x \in A_i\}$, $\forall x \in B$ için

$$T(x)=\bigcup_{i\in I(x)} F_i(x)$$

şeklindedir. $\tilde{\bigcup}_{i\in I}(F_i,A_i)=(T,B)$ 'nin parametre cümlesi olan $B=\bigcup_{i\in I} A_i$ kümelerinin, (F,A) esnek kümesinin parametre cümlesi olan A 'nın alt kümesi olduğu açıktır. İlk olarak

$$Supp(T,B)=\tilde{\bigcup}_{i\in I} Supp(F_i,A_i)\neq\phi$$

olduğu için (T,B) 'nin boştan farklı bir esnek küme olduğunu söyleyebiliriz. Kabul eldelim ki $x\in Supp(T,B)$ olsun. Buradan

$$T(x)=\bigcup_{i\in I(x)} F_i(x)\neq\phi$$

ve dolayısıyla bazı $j\in I(x)$ için $F_j(x)\neq\phi$ olur. Fakat hipotezden $\{A_i : i\in I\}$ 'nin ikili ayrık olduğundan j tektir ve $T(x)$ ile $F_j(x)$ çakışıktır. Ayrıca (F_j,A_j), (F,A) 'nın esnek alt cismi olduğundan, $\forall x\in Supp(G,B)$ için boştan farklı $F_j(x)$, $F(x)$ 'in alt cismidir. Bu ise ispatı tamamlar.

3.2.5. Önerme

(F,A), K üzerinde esnek cisim ve $(F_i,A_i)_{i\in I}$, (F,A) 'nın boştan farklı esnek alt cisminin bir ailesi olsun. Bu taktirde $\bigcap i\in I\ (F_i,A_i)$ boştan farklı bir esnek küme ise $\forall i\in I$ için (F_i,A_i) ' nın bir esnek alt cismidir [26].

İspat: $\bigcap i\in I\ (F_i,A_i)=(H,C)$ olsun. Bu arada $C=\bigcap_{i\in I} A_i\neq\phi$ ve $\forall x=(x_i)_{i\in I}\in C$ için

$$H(x)=\bigcap_{i\in I} F_i(x)$$

şeklindedir. İlk olarak parametre cümlelerini kontrol edelim. $\bigcap i\in I\ (F_i,A_i)$ 'nin parametre cümlesi olan $C=\bigcap_{i\in I} A_i$, $(F_i,A_i)_{i\in I}$ esnek kümelerinin parametre cümlesi olan A_i 'lerin ($\forall i\in I$ için) birer alt cümlesidir. Kabul edelim ki (H,C), K üzerinde boştan farklı bir esnek küme olsun. $x\in Supp(H,C)$ olmak üzere

$H(x)=\bigcap_{i\in I} F_i(x)\neq\phi$ olur. Buradan, $\phi\neq F_i(x)$'ler K'nin alt cismidir. Ayrıca $\forall i\in I$ ve $\forall x\in\bigcap_{i\in I} A_i$ için

$$\bigcap_{i\in I} F_i(x)\subset F_i(x)$$

olduğundan dolayı ispat *önerme* (3.2.3) (1)'den açıktır.

3.3. ESNEK YAKIN-CİSİM

Cisim için yapılan işlemler çalışmanın geri kalan kısmında yakın-cisim için yapılacaktır. Her cisim bir yakın-cisim olmasına rağmen her yakın-cisim cisim olmayabilir. Bu nedenle bu kısımda esnek işlemleri yakın-cisim üzerine aktarılacaktır.

3.3.1. Tanım

M bir yakın-cisim ve (F,A), M üzerinde boştan farklı bir esnek küme olsun. $\forall x\in Supp(F,A)$ için $F(x)$, M'nın altyakın-cismi oluyorsa (F,A)'ya M üzerinde *esnek yakın-cisim* denir.

3.3.2. Örnek

Örnek (2.2.3.)'ü göz önüne alalım. $M=Z_5$ ve $A=\{0,1,2\}$ olsun. $\forall x\in A$ için

$$F(x)=\{y\in M : xRy \Leftrightarrow x*y=0\}$$

şeklinde ise $F(0)=M$ ve $F(1)=F(2)=\phi$ olur. O halde $Supp(F,A)=\{0\}$ dir. Ayrıca M her zaman M'nın alt yakın-cismidir. Dolayısıyla (F,A), M üzerinde bir esnek yakın-cisimdir. Diğer yönden $\forall x\in A$ için

$$G(x)=\{y\in M : xRy \Leftrightarrow x*y\in\{1,2\}\}$$

dönüşümünü göz önüne alırsak (G,A), M üzerinde esnek yakın-cisim değildir.

Esnek cisim için yapılan teoremler esnek yakın-cisme aşağıdaki şekilde uygulanabilir.

3.3.3. Teorem

(F,A) ve (G,B), M üzerinde esnek yakın-cisim olsun. Bu durumda;

(1) $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)$ eğer boştan farklı bir esnek küme ise M üzerinde bir esnek yakın-cisimdir.

(2) $(F,A)\tilde{\Pi}(G,B)$ ikili kesişimi eğer boştan farklı bir esnek küme ise M üzerinde bir esnek yakın-cisimdir.

3.3.4. Teorem

(F,A) ve (G,B), M yakın-cismi üzerinde esnek yakın-cisim olsun. $A\bigcap B=\phi$ ise $(F,A)\tilde{\bigcup}(G,B)$, M üzerinde bir esnek yakın-cisimdir.

3.3.5. Örnek

Örnek (2.2.3.)' ü göz önüne alalım. $M=Z_5$, $A=\{0,1,2\}$ ve $B=\{0,1\}$ olsun. Ayrıca $\forall x\in A$ için

$$F(x)=\{y\in M : xRy \Leftrightarrow x\cdot y=0\}$$

ve $\forall x\in B$ için

$$G(x)=\{y\in M : xRy \Leftrightarrow y*x\in\{0,1\}\}$$

olsun. Bu durumda (F,A) ve (G,B), M yakın-cismi üzerinde esnek yakın-cisim olur. $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)$'nın M üzerinde bir esnek yakın-cisim olduğunu göstermek için $\forall(x,y)\in A\times B$ için $H(x,y)$, M' nın altyakın-cismi olduğunu göstermek yeterlidir. Ayrıca $A\times B=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,0),(2,1)\}$ dir.

$F(0)=Z_5$, $F(1)=F(2)=\{0\}$ ve $G(0)=G(1)=Z_5$ dir.

Bu yüzden $\forall(x,y)\in A\times B$ için $H(x,y)$, M' nın bir altyakın-cismidir.

3.3.6. Örnek

$M = Z_5$, $A = \{0,1,2\}$ ve $B = \{3,4\}$ olsun. Bir önce ki örnekte tanımlandığı gibi $\forall x \in A$ için

$$F(x) = \{y \in K : xRy \Leftrightarrow x \cdot y = 0\}$$

ve $\forall x \in B$ için

$$G(x) = \{y \in K : xRy \Leftrightarrow y * x = 0\}$$

olsun. Bu durumda (F,A) ve (G,B), M yakın-cismi üzerinde esnek yakın-cisim olur. $A \cap B = \phi$ olduğu açıktır. Ayrıca $F(0) = Z_5, F(1) = F(2) = \{0\}$ ve $G(3) = G(4) = \{0\}$ olduğundan $\forall x \in A \bigcup B$ için $H(x) = F(x)$ veya $G(x)$ olup M' nın bir altyakın-cismidir.

3.3.7. Sonuç

$(F_i, A_i)_{i \in I}$, M yakın-cismi üzerinde boştan farklı esnek yakın-cisimlerin ailesi olsun. Bu taktirde;

(1) $\tilde{\wedge}_{i \in I}(F_i, A_i)$ boştan farklı ise M üzerinde bir esnek yakın-cisimdir.

(2) Eğer $\{A_i \mid i \in I\}$' de her $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \phi$ ise $\tilde{\bigcup}(F_i, A_i)$ M üzerinde bir esnek yakın-cisim olur.

3.3.8. Teorem

(F,A) ve (G,B), M yakın-cismi üzerinde esnek yakın-cisim olsun. Bu taktirde;

(1) $(F,A) \Cap (G,B)$ M üzerinde esnek yakın-cisimdir.

(2) $(F,A)\Pi_{\varepsilon}(G,B)$, M üzerinde esnek yakın-cisimdir.

3.4. ESNEK YAKIN-CİSMİN ESNEK ALTYAKIN-CİSMİ

3.4.1. Tanım

(F,A) ve (G,B), M yakın-cismi üzerinde esnek yakın-cisim olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (G,B)' ye (F,A)' nın *esnek altyakın-cismi* denir.

(1) $B \subset A$ ve

(2) $\forall x \in Supp(G,B)$ için $G(x)$, $F(x)$' in altyakın-cismidir.

3.4.2. Örnek

Örnek (3.3.6.)' deki (F,A) esnek yakın-cismini göz önüne alalım ve $B = \{0,1\}$ olmak üzere $\forall x \in B$ için

$$G(x) = \{y \in M : xRy \Leftrightarrow y * x = 0\}$$

şeklinde olsun. O halde $G(0) = \{0\} = G(1)$ dir. Yani $Supp(G,B) = \{0,1\}$ dir dolayısıyla her $x \in Supp(G,B)$ için $G(x)$, $F(x)$ ' in bir altyakın-cismidir.

3.4.3. Önerme

(F,A) , (G,A) ve (H,B)**,** M üzerinde esnek yakın-cisim olsun. Bu taktirde;

(1) $\forall x \in A$ için $F(x) \subset G(x)$ ise (F,A), (G,A) 'nin esnek altyakın-cismidir.

(2) $(F,A)\tilde{\prod}(H,B)$ boştan farklı bir esnek küme ise hem (F,A)'nın hem de (H,B)'nin esnek altyakın-cismidir.

(3) $(F,A) \Cap (H,B)$ boştan farklı bir esnek küme ise, hem (F,A)'nın hem de (H,B)'nin esnek altyakın-cismidir**.**

(4) $(F,A)\prod_{\varepsilon}(G,A)$ boştan farklı bir esnek küme ise hem (F,A)**'**nın hem (G,A) 'nin esnek altyakın-cismidir.

3.4.4. Teorem

(F,A), M üzerinde esnek yakın-cisim olsun ve $(F_i,A_i)_{i\in I}$, (F,A)' nın boştan farklı esnek altyakın-cisimlerin ailesi olsun. Bu taktirde;

(1) $\bigcap i \in I \quad (F_i,A_i)$ boştan farklı bir esnek küme ise (F,A)' nın bir esnek altyakın-cisimdir.

(2) $\tilde{\wedge}_{i\in I}(F_i,A_i)$ boştan farklı bir esnek küme ise (F,A)' nın bir esnek altyakın-cisimdir.

(3) $\{A_i : i \in I\}$ ikilileri ayrıksa $\tilde{\bigcup}_{i\in I}(F_i,A_i)$, (F,A)' nın bir esnek altyakın-cisimdir.

3.4.5. Önerme

(F,A), M üzerinde esnek yakın-cisim ve $(F_i,A_i)_{i\in I}$, (F,A)'nın boştan farklı esnek altyakın-cisminin bir ailesi olsun. Bu taktide $\bigcap i \in l \quad (F_i,A_i)$ boştan farklı bir esnek küme ise $\forall i \in I$ için (F_i,A_i)' nın bir esnek altyakın-cismidir.

3.5. YAKIN-CİSMİN ESNEK ALTYAKIN-CİSMİ

Atagün ve Sezgin [23] esnek kümeler üzerinde son çalışmalarında bir cismin bir esnek alt cismini vermişlerdi. Çalışmanın bu kısmında yakın-cismin bir esnek altyakın-cismi verilecektir.

3.5.1. Tanım

M bir yakın-cisim, S kümesi M' nin bir altyakın-cismi ve (F,S), M üzerinde bir esnek küme olsun. $\forall x, y \in S$ için

(1) $F(x-y) \supseteq F(x) \bigcap F(y)$ ve

(2) $F(xy^{-1}) \supseteq F(x) \bigcap F(y)$, $(y \neq 0_M)$

ise, (F,S) ' ye M ' nin bir *esnek altyakın-cismi* denir ve $(F,S)\tilde{<}M$ veya $F_S\tilde{<}M$ ile gösterilir.

3.5.2. Örnek

Örnek (2.4.4)' ü göz önüne alalım S, M ' nın bir altyakın-cismi olduğunu göstermiştik. Şimdi $F(m_1)=\{m_1,m_3\}$ ve $F(m_3)=\{m_3\}$ olsun. O halde

$F(m_1-m_3)=F(m_3)=\{m_3\}\supseteq F(m_1)\bigcap F(m_3)=\{m_3\}$,

$F(m_3-m_3)=F(m_1)=\{m_1,m_3\}\supseteq F(m_3)\bigcap F(m_3)=\{m_3\}$,

$F(m_1.m_3)=F(m_1)=\{m_1,m_3\}\supseteq F(m_1)\bigcap F(m_3)=\{m_3\}$ ve

$F(m_3.m_3)=F(m_3)=\{m_3\}\supseteq F(m_3)\bigcap F(m_3)=\{m_3\}$ dir.

Oluyor ki bu ise (F,S), M ' nın bir altyakın-cismi olması anlamına gelir.

Fakat $G(m_1)=\{m_3\}$ ve $G(m_3)=\{m_1,m_3\}$ olmak üzere

$$G:S\longrightarrow P(M)$$

dönüşümünü göz önüne alırsak, (G,S), M ' nin bir altyakın-cismi olmadığı açıktır.

3.5.3. Teorem

Eğer (F,S_1) ve (G,S_2), M ' nin esnek altyakın-cismleri ise $(F,S_1)\Cap(G,S_2)$, M ' nin esnek altyakın-cismidir.

İspat: S_1 ve S_2 M ' nin altyakın-cismleri olduğundan $S_1\bigcap S_2$, M ' nin altyakın-cismidir. Tanım (1.2.20)' ye göre $(F,S_1)\Cap(G,S_2)=(H,S_1\bigcap S_2)$ olmak üzere $\forall x\in S_1\bigcap S_2$ için

$$H(x)=F(x)\bigcap G(x)$$

dir. $\forall x,y\in S_1\bigcap S_2$ için

$$H(x-y)=F(x-y)\bigcap G(x-y)\supseteq(F(x)\bigcap F(y))\bigcap(G(x)\bigcap G(y))$$

$$= (F(x) \bigcap G(x)) \bigcap (F(y) \bigcap G(y)) = H(x) \bigcap H(y) \text{ olur.}$$

Ayrıca**,**

$$H(xy^{-1}) = F(xy^{-1}) \bigcap G(xy^{-1}) \supseteq (F(x) \bigcap F(y)) \bigcap (G(x) \bigcap G(y))$$

$$= (F(x) \bigcap G(x)) \bigcap (F(y) \bigcap G(y)) = H(x) \bigcap H(y) \text{ dir } (y \neq 0_M).$$

O halde $(F,S_1) \curlywedge (G,S_2) = (H, S_1 \bigcap S_2)$, M ' nin bir esnek altyakın-cismidir.

3.5.4. Örnek

Örnek (2.4.4)' teki M kümesi yerine S_1 ve S kümesi yerine de S_2 alalım. S_1 ve S_2 M yakın-cisminin birer altyakın-cismidir. $F(m_1) = \{m_1, m_3\}$ ve $F(m_3) = \{m_3\}$ olacak şekilde

$$F : S_2 \longrightarrow P(M)$$

dönüşümü olsun. Ayrıca $\forall x \in S_1$ için

$$G(x) = \{ y \in M : xRy \quad \Leftrightarrow \quad x.y = x \}$$

olsun. O halde $G(m_1) = M$, $G(m_2) = \{m_3\}$, $G(m_3) = \{m_3\}$ ve $G(m_4) = \{m_3\}$ olur.

$S_1 \bigcap S_2 = \{m_1, m_3\}$ dir. Yani $\forall x, y \in S_1 \bigcap S_2$ için

(1) $F(x-y) \supseteq F(x) \bigcap F(y)$ ve

(2) $F(xy^{-1}) \supseteq F(x) \bigcap F(y)$, $(y \neq 0_M)$ dir.

3.5.5. Önerme

Eğer (F,S), M ' nin esnek altyakın-cismi ise $\forall x \in S$ için $F(0) \supseteq F(x)$ dir.

İspat: (F,S), M ' nin esnek altyakın-cismi olduğundan $\forall x \in S$ için

$$F(0) = F(x-x) \supseteq F(x) \bigcap F(x) = F(x) \text{ dir.}$$

3.5.6. Önerme

Eğer (F,S), M yakın-cisminin bir esnek altyakın-cismi ve $F(1_M)=F(0_M)$ ise

$$S_F=\{x\in S \mid F(x)=F(0_M)\}$$

kümesi S ' nin bir altyakın-cismidir.

İspat: $\forall x,y\in S_F$ için

$0_M\in S_F$, $1_M\in S_F$, $x-y\in S_F$ ve $xy^{-1}\in S_F$, $(y\neq 0_M)$

olduğunu göstermemiz gerekmektedir. Dört farklı durum vardır

(1) $F(0_M)=F(0_M)$,

(2) $F(1_M)=F(0_M)$,

(3) $F(x-y)=F(0_M)$ ve

(4) $F(xy^{-1})=F(0_M)$ dır.

(1) ile **(2)** kolayca gözükebilir. $x,y\in S_F$ ise $F(x)=F(y)=F(0_M)$ dir. (F,S), M ' nin bir esnek altyakın-cismi olduğundan, $F(x-y)\supseteq F(x)\bigcap F(y)=F(0_M)$ ve $F(xy^{-1})\supseteq F(x)\bigcap F(y)=F(0_M)$, $(y\neq 0_M)$ dir. Bir önceki teoremden $F(0_M)\supseteq F(x-y)$ ve $F(0_M)\supseteq F(xy^{-1})$ dir. O halde S_F, S ' nin bir altyakın-cismidir.

3.5.7. Tanım

(F,S), M ' nin bir esnek altyakın-cismi olsun. Bu taktirde

(1) $\forall x\in S$ için $F(x)=\{0_M\}$ ise (F,S) ikilisine aşikâr denir.

(2) $\forall x\in S$ için $F(x)=M$ ise (F,S) ikilisine mutlak denir.

3.5.8. Örnek

$S=\{m_1,m_3\}$ ve $M=\{m_1,m_2,m_3,m_4\}$

Örnek (2.4.4.)' deki şekilde tanımlanmış olsun. Ayrıca $\forall x \in S$ için

$$F(x)=\{y \in M : xRy \quad \Leftrightarrow \quad x+y=x\}$$

şeklinde tanımlanırsa $F(m_1)=\{m_1\}$ ve $F(m_3)=\{m_1\}$ olup (F,S), M ' nin aşikâr esnek altyakın-cismi olur. Diğer taraftan $\forall x \in S$ için

$$G(x)=\{y \in M : xRy \quad \Leftrightarrow \quad x.y \in M\}$$

şeklinde ise $G(m_1)=M=G(m_3)$ olup (F,S), M ' nin tam esnek altyakın-cismi olur.

3.5.9. Önerme

(F,S_1) ve (G,S_2), M 'nin esnek altyakın-cismi olsun. Bu taktirde

(1) Eğer (F,S_1) ve (G,S_2), M 'nin esnek aşikâr altyakın-cisimleri ise

$(F,S_1) \cap (G,S_2)$ de M 'nin esnek aşikâr altyakın-cismidir.

(2) Eğer (F,S_1) ve (G,S_2), M 'nin esnek mutlak altyakın-cisimleri ise

$(F,S_1) \cap (G,S_2)$ de M 'nin esnek mutlak altyakın-cismidir.

(3) Eğer (F,S_1) aşikâr ve (G,S_2) mutlak M ' nin altyakın-cisimleri oluyorsa

$(F,S_1) \cap (G,S_2)$ de M ' nin aşikâr altyakın-cismidir.

3.6. ESNEK YAKIN-CİSİM HOMOMORFİZMASI

3.6.1. Tanım

(F,A), (G,B) sırasıyla M_1, M_2 'nin esnek yakın-cisimleri olsun. $f : M_1 \longrightarrow M_2$ ve $g : A \longrightarrow B$ iki dönüşüm olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan (f,g) çiftine esnek yakın-cisim Homomorfizması denir;

(1) f , yakın-cisim homomorfizmasıdır ve örtendir (epimorfizmaıdır).

(2) g , örten bir dönüşümdür.

(3) $\forall x \in A$ için $f(F(x)) = G(g(x))$ dır.

(F,A) ve (G,B) arasında bir esnek yakın-cisim homomorfizması varsa (F,A), (G,B)'ye esnek homomorfiktir denir ve $(F,A) \sim (G,B)$ şeklinde gösterilir. Ayrıca, f bir yakın-cisim izomorfizması, g bijektif (birebir ve örtendir) bir dönüşüm ise, bu taktirde (f,g)'ye esnek yakın-cisim izomorfizması denir ve $(F,A) \cong (G,B)$ ile gösterilir

3.6.2. Örnek

Örnek (2.4.4)' teki M ve S kümelerini göz önüne alalım. $M_1 = A = M$ ve $M_2 = B = S$ olsun. $\forall m \in M$ için $F(m) = m_3$ ve $\forall s \in S$ için $G(s) = m_3$ olsun. Ayrıca $\forall m \in M_1$ için

$$f : M_1 \longrightarrow M_2$$

$$m \longrightarrow f(m) = m.m_3$$

şeklinde tanımlanmış olsun. f ' nin bir yakın-cisim epimorfizması olduğu açıktır. $\forall a \in A$ için

$$g : A \longrightarrow B$$

$$a \longrightarrow g(a) = a.m_1$$

şeklinde tanımlansın. O halde g ' nin örten olduğunu belirtir.

3.6.3. Teorem

(F,S_1) ve (G,S_2) sırasıyla M_1 ve M_2 ' nin esnek altyakın-cisimleri olsun. Eğer

$$f : S_1 \longrightarrow S_2$$

bir yakın-cisim homomorfizması ise bu taktirde

(1) Eğer f epimorfizma ise, $(F, f^{-1}(S_2))$, M_1' nin esnek altyakın-cismidir,

(2) $(G, f(S_1))$, M_2' nin esnek altyakın-cismidir ve

(3) $(F, Kerf)$, M_1' nin esnek altyakın-cismidir.

İspat: (1) f epimorfizma olsun. S_1, S_2 M_1 ve M_2' nin sırsıyla altyakın-cisimleri ve

$$f : M_1 \longrightarrow M_2$$

bir yakın-cisim epimorfizmasıdır. $f^{-1}(S_2)$, M_1' in altyakın-cismi olduğu açıktır. Ayrıca (F, S_1), M_1' in esnek altyakın-cismi ve $f^{-1}(S_2) \subseteq S_1$ olduğunu biliyoruz. $\forall x, y \in f^{-1}(S_2)$ için

$F(x-y) \supseteq F(x) \bigcap F(y)$ ve $F(xy^{-1}) \supseteq F(x) \bigcap F(y)$, $(y \neq 0_{M_1})$ dir.

O halde $(F, f^{-1}(S_2))$, M_1' in esnek altyakın-cismidir.

(2) S_1, S_2 M_1 ve M_2' nin sırsıyla altyakın-cisimleri ve

$$f : S_1 \longrightarrow S_2$$

bir yakın-cisim homomorfizmasıdır. O halde $f(S_1)$, S_2' nin bir altyakın-cismidir ve $f(S_1) \subseteq S_2$ dir. *Tanım (3.5.1)*' den geriye kalan açıktır.

(3) Benzer şekilde yapılacaktır

4. BÖLÜM

ESNEK CİSİM VE ESNEK YAKIN-CİSMİN ÖZELLİKLERİNİN ÖZETİ

Şimdi bu bölümde Esnek Cisim ve Esnek Yakın-Cism ile ilgili diğer bölümlerde ele alınan özelliklerin bir özetini vereceğiz.

(F,A) ve (G,B), K üzerinde esnek cisim olsun. Bu durumda;

(1) $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)$ eğer boştan farklı bir esnek küme ise K üzerinde bir esnek cisimdir.

(2) (F,A) ve (G,B), K cismi üzerinde esnek cisim olsun. $A\bigcap B=\phi$ ise $(F,A)\tilde{\bigcup}(G,B)$, K üzerinde bir esnek cisimdir.

(3) $(F,A)\tilde{\Pi}(G,B)$ ikili kesişimi eğer boştan farklı bir esnek küme ise K üzerinde bir esnek cisimdir.

(4) $(F,A)\ \tilde{\bigcap}(G,B)$, K üzerinde esnek cisimdir.

(5) $(F,A)\Pi_{\varepsilon}(G,B)$, K üzerinde esnek cisimdir.

$(F_i,A_i)_{i\in I}$, K cismi üzerinde boştan farklı esnek cisimlerin ailesi olsun. Bu taktirde;

(1) $\tilde{\wedge}_{i\in I}(F_i, A_i)$ boştan farklı ise K üzerinde bir esnek cisimdir.

(2) Eğer $\{A_i \mid i \in I\}$' de her $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \phi$ ise $\tilde{\bigcup}_{i\in I}(F_i, A_i)$, K üzerinde bir esnek cisim olur.

(F, A) ve (G, B), K cismi üzerinde esnek cisim olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (G, B)' ye (F, A)' nın *esnek alt cismi* denir;

(1) $B \subset A$ ve

(2) $\forall x \in Supp(G, B)$ için $G(x)$, $F(x)$' in alt cismidir.

(F, A) , (G, A) ve (H, B)**,** K üzerinde esnek cisim olsun. Bu taktirde;

(1) $\forall x \in A$ için $F(x) \subset G(x)$ ise (F, A), (G, A)'nın esnek alt cismidir.

(2) $(F, A)\tilde{\prod}(H, B)$ boştan farklı bir esnek küme ise hem (F, A)'nın hem de (H, B)'nin esnek alt cismidir.

(3) $(F, A) \Cap (H, B)$ boştan farklı bir esnek küme ise, hem (F, A)'nın hem de (H, B)'nin esnek alt cismidir**.**

(4) $(F, A)\prod_{\varepsilon}(G, A)$ boştan farklı bir esnek küme ise hem (F, A)**'**nın hem (G, A)'nin esnek alt cismidir.

(F, A) ve (G, B)**,** M üzerinde esnek yakın-cisim olsun. Bu durumda;

(1) $(F, A)\tilde{\wedge}(G, B)$ eğer boştan farklı bir esnek küme ise M üzerinde bir

esnek yakın-cisimdir.

(2) $(F,A)\tilde{\Pi}(G,B)$ ikili kesişimi eğer boştan farklı bir esnek küme ise M üzerinde bir esnek yakın-cisimdir.

(3) $A \cap B = \phi$ ise $(F,A)\tilde{\bigcup}(G,B)$, M üzerinde bir esnek yakın-cisimdir.

(4) $(F,A) \Cap (G,B)$ M üzerinde esnek yakın-cisimdir.

(5) $(F,A)\Pi_{\varepsilon}(G,B)$, M üzerinde esnek yakın-cisimdir.

$(F_i,A_i)_{i\in I}$, M yakın-cismi üzerinde boştan farklı esnek yakın-cisimlerin ailesi olsun. Bu taktirde;

(1) $\tilde{\wedge}_{i\in I}(F_i,A_i)$ boştan farklı ise M üzerinde bir esnek yakın-cisimdir.

(2) Eğer $\{A_i \mid i \in I\}$' de her $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \phi$ ise $\tilde{\bigcup}(F_i,A_i)$ M üzerinde bir esnek yakın-cisim olur.

(F,A) ve (G,B), M yakın-cismi üzerinde esnek yakın-cisim olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (G,B)' ye (F,A)' nın *esnek altyakın-cismi* denir.

(1) $B \subset A$ ve

(2) $\forall x \in Supp(G,B)$ için $G(x)$, $F(x)$' in altyakın-cismidir.

(F,A) , (G,A) ve (H,B)**,** M üzerinde esnek yakın-cisim olsun. Bu taktirde;

(1) $\forall x \in A$ için $F(x) \subset G(x)$ ise (F,A), (G,A)'nin esnek altyakın-cismidir.

(2) $(F,A)\tilde{\prod}(H,B)$ boştan farklı bir esnek küme ise hem (F,A)'nın hem de (H,B)'nin esnek altyakın-cismidir.

(3) (F,A) $\Cap$ (H,B) boştan farklı bir esnek küme ise, hem (F,A)'nın hem de (H,B)'nin esnek altyakın-cismidir**.**

(4) $(F,A)\prod_{\varepsilon}(G,A)$ boştan farklı bir esnek küme ise hem (F,A)**'**nın hem (G,A)'nin esnek altyakın-cismidir.

M bir yakın-cisim, S kümesi M' nin bir altyakın-cismi ve (F,S), M üzerinde bir esnek küme olsun. $\forall x, y \in S$ için

(1) $F(x-y) \supseteq F(x) \bigcap F(y)$ ve

(2) $F(xy^{-1}) \supseteq F(x) \bigcap F(y)$, $(y \neq 0_M)$

ise, (F,S)' ye M' nin bir *esnek altyakın-cismi* denir ve $(F,S) \tilde{<} M$ veya $F_S \tilde{<} M$ ile gösterilir.

Eğer (F,S), M yakın-cisminin bir esnek altyakın-cismi ve $F(1_M) = F(0_M)$ ise

$$S_F = \{x \in S \mid F(x) = F(0_M)\}$$

kümesi S ' nin bir altyakın-cismidir.

(F,A), (G,B) sırasıyla M_1, M_2'nin esnek yakın-cisimleri olsun. $f : M_1 \longrightarrow M_2$ ve $g : A \longrightarrow B$ iki dönüşüm olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan (f,g) çiftine esnek yakın-cisim Homomorfizması denir;

(1) f , yakın-cisim homomorfizmasıdır ve örtendir (epimorfizmaıdır).

(2) g , örten bir dönüşümdür.

(3) $\forall x \in A$ için $f(F(x)) = G(g(x))$ dır.

(F,A) ve (G,B) arasında bir esnek yakın-cisim homomorfizması varsa (F,A), (G,B)'ye esnek homomorfiktir denir ve *(F,A)~(G,B)* şeklinde gösterilir. Ayrıca, f bir yakın-cisim izomorfizması, g bijektif (birebir ve örtendir) bir dönüşüm ise, bu taktirde (f,g)'ye esnek yakın-cisim izomorfizması denir ve $(F,A)\cong(G,B)$ ile gösterilir

KAYNAKLAR

1. Zadeh, L. A., Fuzzy Set, **Inform. and Control**, 8 (1), 338-353, 1965.

2. Molodtsov, D., Soft set theory-Firrst results, **Computers and Mathematics with Applications**, 37 (1), 19-31, 1999.

3. Maji, P. K., Roy, A. R. i Biswas, R., An application of soft sets in a decision Making problem, **Computers and Mathematics with Applications**, 44 (1), 077-1083, 2002.

4. Maji, P. K., Bismas, R., Roy, A. R., Soft set theory, **Computers and Mathematics with Applications**, 45 (1), 555-562, 2003.

5. Pawlak, Z., Rough sets, **International Journal of Information and Computer sciences**, 11 (1), 341-356, 1982.

6. Feng, F., Jun, Y. B., Zhao, X., Soft semirings, **Comput. Math. Appl**., 56 (10), 621-2628, 2008.

7. Kong, Z., Gao, L.,Wang, L. and Li, S.,The normal Parameter Reduction of oft Sets and Its Algoritm. **Computers and Mathematics with Applications**, 56 (1), 3029-3037, 2008.

8. Xiao, Z., Li, Y., Zhong, B., Yang, X., Research on synthetically evaluating ethod for business competitive capacity based on soft set, **Statistical Research**, 52 (4), 2003.

9. Pei, D. and Miao, D., From Soft Sets to Information Systems. In: Proceedings f Granular Computing (Eds: X. Hu, Q. Liu, A. Skowron, T. Y. Lin, R. R. ager, B. Zhang) IEEE, 2, 617-621, 2005.

10. Mushrif, M. M., Sengupta, S., Ray, A. K., Texture Classifcation Using a ovel, Soft-Set Theory Based Classi_cation, Algorithm. Lecture Notes In computer Science, 3851, 246-254, 2006.

11. Jun, Y. B., Soft BCK/BCI-algebras, **Computers and Mathematics with Applications**, 56 (1), 1408-1413, 2008.

12. Jun, Y. B., Park, C. H., Applications of soft sets in ideal theory of CK/BCI-algebras, **Information Sciences**, 178 (1), 2466-2475, 2008.

13. Park, C. H., Jun, Y. B., Öztürk, M. A., Soft W S-algebras. **Commun, Korean Math. Soc**, 23 (3), 313-324, 2008.

14. Maji, P. K., Biswas, R., Roy, A. R., Fuzzy soft sets, **Journal of Fuzzy Mathematics**, 9 (3), 589-602, 2001.

15. Roy, A. R. and Maji, P. K., A fuzzy soft set theoretic approach to decision aking problems, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 203 (1), 412-418, 2007.

16. Aktaş, H., Çağman, N., Soft sets and soft groups, **Information Sciences**, 177 (1), 2726-2735, 2007.

17. Atagün A. O., Sezgin. A., Soft near-rings, **Comput. Math. Appl**., 2009, submitted.

18. Pilz, G., Near-rings, 2nd ed., Amsterdam, New York, Oxford, North Holland, 1983.

19. Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K., Shabir, M., On some new operations in soft set theory, **Comput. Math. Appl**., 57 (9), 1547-1553, 2009.

20. John B. Fraleigh, A First Course In Abstract Algebra, Department of Msthematics, University of Rhode Island, 1982.

21. Ummahan A. ve ark., Soft sets and soft rings, **Computers and Mathematics with Applications** (59) 3458_3463, 2010.

22. Atagün, A. O., Sezgin, A., soft substructures of rings, field and modules, **Computers and Mathematics with Applications** (61) 592–601, 2011.

23. Chen, D-G., Tsang, E. C. C., Yeung, D. S., Some notes on the parameterization reduction of soft sets, International Conference on Machine Learning and Cybernetics, 3, 1442-1445, 2003.

24. Chen, D., Tsang, E. C. C., Yeung, D. S. , Wang, X., The parameterization reduction of soft sets and its applications, Computers and Mathematics with Applications, 49 (1), 757-763, 2005.

25. Aygün, E. ve Alabid, H., soft fields, **Gazi University Journal of Science**, Comp. and Appl. Math, submitted, 2011.

26. Sezgin, A., Atagün A. O., Aygün E., A note on soft near-rings and idealistic soft near-rings, Comp. and Appl. Math, submitted, 2010.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı : Hayder ALABID

Uyruğu : Irak

Doğum Yeri : Mosul/TELAFER

Doğum Tarihi : 01.01.1981

Medeni Durumu : Evli

Adres : Irak/ Telafer

E-Mail : abo_karrar2001@yahoo.com

Tel : 0 531 861 08 32

EĞİTİM

Derece	**Kurum**	**Mezuniyet Tarihi**
Tezli Yüksek Lisans	Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü	----
Lisans	Basra Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik ABD	2006
Lise	Al-cezira Lisesi	2000

YABANCI DİL

İngilizce

Türkçe