T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DEJENERE SİNGÜLER İÇ NOKTA CİVARINDAKİ YAPISAL ÇATALLANMALAR

Hazırlayan
Deniz BOZKURT

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU

Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2011
KAYSERİ

T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DEJENERE SİNGÜLER İÇ NOKTA CİVARINDAKİ YAPISAL ÇATALLANMALAR

Tezi Hazırlayan
Deniz BOZKURT

Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU

Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2011
KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.



Deniz BOZKURT

YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI

Dejenere Singüler İç Nokta Civarındaki Yapısal Çatallanmalar adlı Yüksek Lisans tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan
Deniz Bozkurt

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU

Matematik ABD Başkanı
Prof. Dr. Fuat GÜRCAN

Yrd. Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU danışmanlığında **Deniz BOZKURT** tarafından hazırlanan " **Dejenere Singüler İç Nokta Civarındaki Yapısal Çatallanmalar** " adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **yüksek lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

17/06/2011

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. Fuat GÜRCAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU

Üye : Yrd. Doç. Dr. Pakize TEMTEK

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 21/06/2011.. tarih ve 2011/121-06 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

21/06/2011..

Prof.Dr. Necmettin MARAŞLI
Müdür
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

‘‘**Dejenere Singüler İç Nokta Civarındaki Yapısal Çatallanmalar’’** konulu tez çalışmasının seçiminde, yürütülmesinde ve sonuçlandırılmasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın **Yrd. Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU’**na teşekkür ederim.

DEJENERE SİNGÜLER İÇ NOKTA CİVARINDAKİ YAPISAL ÇATALLANMALAR

Deniz BOZKURT
Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2011
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU

ÖZET

Bu tezde dejenere singüler bir iç nokta civarında $\vec{u}(\cdot,t)$ divergens serbest vektör alanı ailesinin topolojik yapısındaki değişim incelenmiştir.

Tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, yapısal kararlılık teoremi [4] ve singülerliklerin sınıflandırılması teoremi [2] ile birlikte iki boyutlu divergens serbest vektör alanının yapısal kararlılığı ve yapısal çatallanması üzerine bazı temel tanım, teorem ve lemmalar verildi. Ayrıca iç nokta civarında dejenere singüler noktalar karakterize edilerek indeks ve kinematik şartları bulundu.

İkinci bölümde, indeksin sıfır olması durumundaki yapısal çatallanma teoremleri [1] ifade ve ispat edildi ve sıvı akışının iç ayrımı ve genelleştirilmesi verildi.

Üçüncü bölümde, divergens serbest vektör alanının yörüngelerinin simetrik olması durumundaki yapısal çatallanma teoremleri ifade ve ispat edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Divergens Serbest Vektör Alanı, Yapısal Kararlılık ve Çatallanma, Yapısal Sınıflandırma, İndex teori

STRUCTURAL BIFURCATIONS NEAR DEGENERATE SINGULAR INTERIOR POINT

Deniz BOZKURT
Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M.Sc. Thesis, June 2011
Thesis Supervisor: Assist. Prof. Ali DELİCEOĞLU

ABSTRACT

In this thesis, transitions in the topological structure of a family of divergence-free vector field $\vec{u}(\cdot,t)$ are investigated near an interior degenerate singular point.

The thesis consist of three section.

In the first section, we give some basic definitions, theorems and lemmas, including structural stability theorem [4] and singularity classification theorem [2] for 2D divergence-free vector field. In addition, interior degenerate singular points are charecterized and identify some useful and easy to verify kinematic conditions.

In the second section, structural bifurcations theorems [1] are stated and proved with index zero and genericity and connections to interior seperation of fluid flows are given.

In the third section, structural bifurcations theorems are stated and proved for the orbits of divergence free vector fields with symmetry.

Keywords: Divergence-Free Vector Field, Structural Stability and Bifurcation, Structural Classification, index theory.

İÇİNDEKİLER

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK……..…… i
YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI…… ii
KABUL VE ONAY ……...…… iii
TEŞEKKÜR ……..……. iv
ÖZET ……....v
ABSTRACT ……..……. vi
SİMGELER ……...…….. viii
GİRİŞ ……..……..1
1. BÖLÜM
TEMEL TANIM VE TEOREMLER……..……...4
Tanjant demeti……...……4
İndeks Teori……...……6
Yapısal kararlılık teoremi……10
Singülerliklerin sınıflandırılması teoremi……11
1.1. Jakobiyen Matrisi Sıfırdan Farklı Dejenere Singüler Noktaların Karekterizasyonu…….14
1.2. İndex ve Kinematik Şartları…….…….. 18
2. BÖLÜM
SIFIR İNDEKSLİ SİNGÜLER İÇ NOKTA CİVARINDAKİ YAPISAL ÇATALLANMA…….....22
2.1. Temel Teoremler……. ……..….. 22
2.2. Sıvı Akışının İç Ayrımı İçin Uygulamalar…..……. 28
2.3. İndeksin Sıfır Olması Durumunda Yapısal Çatallanmaların Genelleştirilmesi……31
2.4. Yapısal Çatallanma Olmayan Örnekler……...….32
3. BÖLÜM
ANTİSİMETRİK DURUMDA SİNGÜLER İÇ NOKTA CİVARINDAKİ YAPISAL ÇATALLANMALAR……...…….35
KAYNAKLAR ……..…….48
ÖZGEÇMİŞ ……..……..50

SİMGELER

R : Reel sayılar kümesi

R^2 : Kompleks sayılar kümesi

$\overset{\circ}{M}$: M manifoldunun içi

$\vec{n}$: normal vektör

T_xM : M nin x noktasındaki tanjant uzayı

TM : M manifoldu üzerinde tanjant demeti

$C^r(TM)$: TM üzerinde r. mertebeden sürekli türevlere sahip vektör alanlarının uzayı

$D\vec{u}(p)$: $\vec{u}$ vektör alanının p noktasındaki Jakobiyen matrisi

$ind(\vec{u}, x_0)$: $\vec{u}$ nun x_0 noktasındaki indeksi

$\deg(\vec{u}, x_0)$: $\vec{u}$ nun x_0 noktasındaki Brouwer derecesi

$div\vec{u}$: $\vec{u}$ vektör alanının divergensi

GİRİŞ

Bu tezde $\vec{u}(.,t)$ divergens serbest vektör alanı ailesinin topolojik yapısındaki değişim bir iç nokta civarında incelenecektir. İç nokta civarında yapısal değişikliklerin olabilmesi için bu noktanın indeksi sıfır, Jakobiyeni sıfırdan farklı olan bir ayrık dejenere nokta olduğu gösterilecektir. Bu sonuç $\vec{u}(.,t_0)$ ın bir ayrık iç nokta civarındaki $\vec{u}$ vektör alanının orbit yapılarını analiz etmede kullanılacaktır. Ayrıca bu nokta civarında meydana gelen yapıların kararlılığı ve çatallanmaları analiz edilecektir. Burada divergens serbest vektör alanları ile iki boyutlu sıkıştırılamaz akışların hız vektör alanının topolojik yapısı üzerinde durulacaktır. Bu amaçla $\vec{u}(.,t)$ divergens serbest vektör alanının t_0 noktasında Taylor seri açılımı

$$\vec{u}(x,t) = \overrightarrow{u^0}(x) + (t-t_0)\overrightarrow{u^1}(x) + o(|t-t_0|)$$
$$\overrightarrow{u^0}(x) = \vec{u}(x,t_0)$$
$$\overrightarrow{u^1}(x) = \frac{\partial}{\partial t}\vec{u}(x,t_0)$$

göz önünde bulundurulacaktır.

İlk olarak yapısal kararlılık teoreminden (Ma and Wang [4]) yararlanılarak yapısal çatallanmaların bir dejenere singüler x_0 noktası civarında olduğu gösterilecektir. Yani bu x_0 noktasında $\vec{u}$ nun Jakobiyen matrisinin determinantı sıfırdır $(\det D\vec{u}(x_0) = 0)$. Genellikle bu tezde Jakobiyen matrisinin sıfırdan farklı olması üzerinde durulacaktır.

İkinci olarak $\vec{u} \in D^r(TM)$ vektör alanındaki bir dejenere singüler noktanın Jakobiyen matrisinin sıfırdan farklı $(D\vec{u}(x_0) \neq 0)$ olması durumunda aşağıdaki durumlardan bir tanesinin gerçeklendiği gösterilecektir. Bunlar

1. Bir dejenere merkez(center) noktası,
2. Bir dejenere eyer(saddle) noktası, ve
3. İndex değeri sıfır $(ind(\vec{u}, x_0) = 0)$ olan bir nokta

dır.

Üçüncü olarak Jakobiyen matrisi sıfırdan farklı $(D\vec{u}(x_0) \neq 0)$ fakat $\det D\vec{u}(x_0) = 0$ olması durumu incelenecektir. Başka bir deyişle $D\vec{u}(x_0)$ ın sıfır özdeğerine karşılık tek özvektörünün olmasıdır. Ma and Wang [4] Teorem 4.4 ve Teorem 4.5 deki sonuçları elde edebilmek için e_1 bir özvektör ise, bu özvektöre dik olan e_2 özvektörünün bulunması yeterli olduğu bu tezde gösterilecektir. Dejenere nokta civarındaki yapısal dönüşümlerin karakterize edilmesinin yanında eğer;

$$\begin{aligned} ind(\overrightarrow{u^0}, x_0) &= 0 \\ D\overrightarrow{u^0}(x_0) &\neq 0 \\ \overrightarrow{u^1}(x_0).e_2 &\neq 0 \end{aligned}$$

ve x_0 noktası $\vec{u}^0(x_0)$ ın ayrık dejenere singüler bir noktası ise, (x_0, t_0) noktasındaki yapısal çatallanmalar incelenir. Bunun yanında yukarıda elde edilen çatallanmaların iki boyutlu akışlardaki ayırma yapılarına karşılık geldiği gösterilecektir.

Son olarak $\vec{u}(.,t)$ divergens serbest vektör alanının yörüngelerinin anti-simetrik olması durumunda iç nokta civarındaki yapısal değişiklikler incelenecektir. Bu amaçla anti-simetrik durumda divergens serbest vektör alanının yapısal kararlılığı için gerek ve yeter şartları sağlayan yapısal kararlılık teoremi ifade edilecektir. Sonra eğer x_0 noktası $\overrightarrow{u^0}(x_0)$ ın ayrık dejenere singüler bir iç noktası ise,

$$\begin{aligned} ind(\overrightarrow{u^0}, x_0) &= -1 \\ D\overrightarrow{u^0}(x_0) &\neq 0 \\ \overrightarrow{u^1}(x_0).e_2 &\neq 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

ve

$$\begin{aligned} ind(\overrightarrow{u^0}, x_0) &= 1 \\ D\overrightarrow{u^0}(x_0) &\neq 0 \\ \overrightarrow{u^1}(x_0).e_2 &\neq 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

olması durumlarında (x_0, t_0) noktasındaki yapısal çatallanmalar ayrı ayrı incelenecektir.

1. BÖLÜM

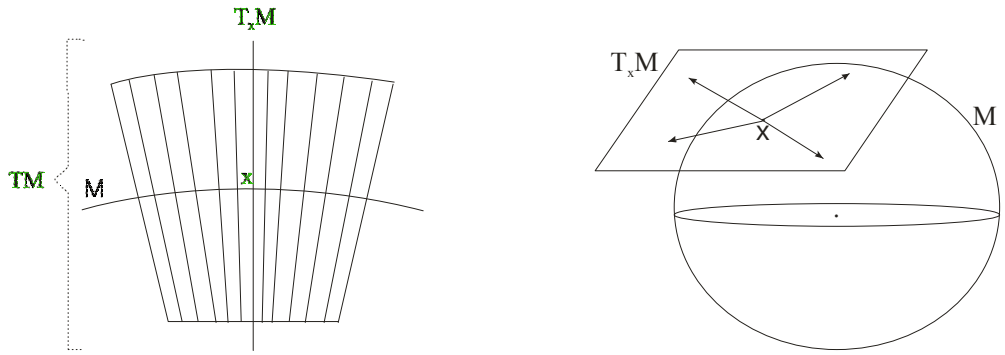
TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tez çalışması boyunca kullanacağımız divergens serbest vektör alanı ailesinin yapısal kararlılığı ve çatallanması üzerinde önemli tanımlar, teoremler ve lemmalar verilecektir.

Tanım 1.1. (Tanjant demeti [11]) M bir manifold olsun, M manifoldu üzerinde Tanjant demeti,

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $T_x M$, M nin x noktasındaki tanjant uzayıdır ve $T_x M$, x noktasında M' ye teğettir.



Şekil 1.1. x noktasındaki M nin tanjant demeti

Burada TM nin bir noktası $(x,\vec{v})$ çifti olup, $x \in M$ ve $\vec{v} \in T_x M$ dir.

Tanım 1.2. $M \subset R^2$, $C^r\,(r \geq 1)$ sınıfından kapalı ve sınırlı bir bölge olsun. TM, M nin tanjant demeti ve $C^r(TM)$, M üzerinde C^r (r. mertebeden sürekli ve türevli) sınıfından bütün vektör alanlarının uzayı olsun. Bu takdirde

$$D^r(TM) = \left\{ \vec{v} \in C^r(TM) \mid v_n \mid_{\partial M} = 0,\ div\vec{v} = 0 \right\} \tag{1.2}$$

cümlesine divergens serbest vektör alanı ailesi denir. Burada $\vec{n}$ sınırdaki normal vektör ve $v_n = \vec{v}.\vec{n}$ dir.

Ma and Wang [4] tarafından elde edilen çeşitli sınır koşulları altında divergens serbest vektör alanı ailesinin yapısal kararlılık teoremleri vektör alanının topolojik yapısının karakterize edilmesinde önemli rol oynamaktadır. Burada sadece $D^r(TM)$ de divergens serbest vektör alanı için yapısal kararlılık teoremi verilecektir.

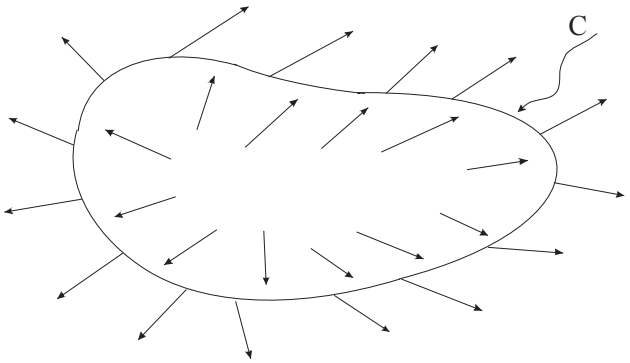
Tanım 1.3. $\vec{u}, \vec{v} \in D^r(TM)$ iki vektör alanı olsun. Eğer $\vec{v}$ nin yörüngelerini $\vec{u}$ nun yörüngelerine eşleyen ve $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ nin yönelimlerini koruyan bir $\varphi : M \to M$ homeomorfizmi varsa, $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ topolojik olarak denktir denir.

Tanım 1.4. $\vec{v}$ bir vektör alanı olsun, $\vec{v}$ nin bir $O \subset D^r(TM)$ komşuluğu mevcut ve herhangi bir $\vec{u} \in O$ için $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ topolojik olarak denk olsun. Bu takdirde $\vec{v}$ ye $D^r(TM)$ de yapısal kararlıdır denir.

Tanım 1.5. $\vec{u} \in (C^1[0,T], D^r(TM))$ olsun. t^- ve t^+, t_0 $(0 < t_0 < T)$ a yeterince yakın değerleri göstermek üzere, her $t^- < t_0$ ve $t_0 < t^+$ (t_0 a sağdan ve soldan yaklaşırken) için $\vec{u}(.,t^-)$ ve $\vec{u}(.,t^+)$ vektör alanları $U \subset M$ lokal komşuluğunda topolojik olarak denk değilse, $\vec{u}(x,t)$ t_0 zamanında x_0 ın bir $U \subset M$ komşuluğunun lokal yapısında bir çatallanmaya sahiptir; ve eğer $U = M$ ise $\vec{u}(.,t)$ t_0 zamanında onun global yapısı içinde bir çatallanmaya sahiptir.

Bir $p \in M$ noktası $\vec{u}(p) = 0$ şartını sağlıyor ise, p noktasına $\vec{u} \in D^r(TM)$ nin bir singüler noktası denir; eğer $\vec{u}$ nun p noktasındaki Jakobiyen matrisi $(D\vec{u}(p))$ nin tersi mevcutsa $\vec{u}$ nun singüler noktası p dejenere olmamış olarak adlandırılır; eğer bütün singüler noktalar dejenere değilse, $\vec{u}$ ya regüler denir.

Tanım 1.6. (İndex Teori [9]) Düzlemin basit bağlantılı bir $\Re$ bölgesinde tanımlı bir vektör alanının olduğunu farz edelim. C, $\Re$ de herhangi bir çevrim olsun ve C üzerinde vektör alanının sabit noktası mevcut olmasın. C üzerindeki her p noktasına *Şekil 1.2* de gösterildiği gibi vektör alanının değerini temsil eden bir vektör değeri karşılık gelir.

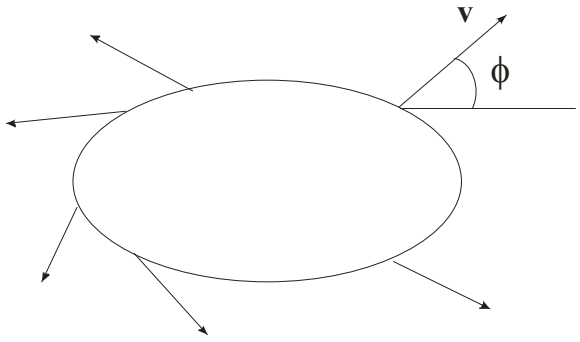


Şekil 1.2. C kapalı eğrisi üzerindeki vektör alanı

C eğrisi üzerinde saatin ters yönünde hareket ederken, bu pozitif yön olarak adlandırılır, C üzerindeki vektörler sıra ile yer değiştirerek dönerler ve başladığımız noktaya geldiğimiz zaman vektörler $2k\pi$ açısı kadar dönecektir. Bu k sayısına C nin indeksi denir. Yani C kapalı eğrisinin indeksi, vektör alanının C etrafında ne kadar döndüğünü gösterir ve vektör alanının indeksi,

$$I_C = k = \frac{1}{2\pi}[\phi]_C, \tag{1.3}$$

şeklinde bulunur. Burada $[\phi]_C$, ϕ açısındaki toplam değişimdir.



Şekil 1.3 Vektör alanının herhangi bir noktasının eğri üzerindeki açısal değeri

Sabit nokta içermeyen kapalı bir eğrinin indeksi, C kapalı eğrisi üzerinde bulunan her noktadaki vektörlerin açısındaki değişimin integrali alınarak hesaplananır. Düzlemin bir $\Re$ basit kapalı bölgesinde tanımlı bir $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y})$ vektör alanı

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) \\ \dot{y} &= g(x,y), \quad (x,y) \in \Re \subset R^2, \end{aligned} \tag{1.4}$$

şeklinde verilir. C kapalı eğrisinin indeksi,

$$I_C = k = \frac{1}{2\pi} \oint_C d\phi = \frac{1}{2\pi} \oint_C d\left(\tan^{-1} \frac{g(x,y)}{f(x,y)} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{f.dg - g.df}{f^2 + g^2} \tag{1.5}$$

integrali hesaplanarak bulunur.

Tanım 1.7. Regüler bir $\vec{u}$ vektör alanının kordinatları

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \vdots \\ \vec{u}_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{pmatrix}$$

şeklinde verilmiş olsun. Bu durumda singüler bir p noktasındaki $\vec{u}$ nun indeksi

$$index_{\vec{u}}(p) = \text{sgn det} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_p \tag{1.6}$$

şeklinde tanımlanır [11].

Örnek 1.1. Bir $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y})$ vektör alanı

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) = -y \\ \dot{y} &= g(x,y) = x \end{aligned}$$

denklem sistemi ile verilsin. $\vec{v}$ nin singüler noktası (0,0) dır ve bu nokta merkezi orijinde olan Γ birim çemberinin içerisinde kalır. $\vec{v}$ nin bu noktadaki indeksini hesaplamak için Γ yı aşağıdaki dönüşümle tanımlayalım
$x=\cos\theta,\ y=\sin\theta(0\le\theta\le 2\pi)$ ve $(f,g)=(-\sin\theta,\cos\theta)$. O halde

$$I_\Gamma=\frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma\frac{f.dg-g.df}{f^2+g^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-\sin\theta(-\sin\theta)d\theta-\cos\theta(-\cos\theta)d\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta=1$$

olur.

Örnek 1.2.

$$\dot{x}=x-y$$
$$\dot{y}=x-y^2$$

sistemi ile verilen vektör alanının singüler noktalarının indeksini bulalım.
Sistemin singüler noktaları (0,0) ve (1,1) noktalarıdır. Γ eğrisini parametrik olarak,

$$x=r\cos t,\ y=r\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$$

şeklinde alalım, Γ üzerinde

$$f(x,y)=x-y=r(\cos t-\sin t),\ \ g(x,y)=x-y^2=r\cos t-r^2\sin^2 t.$$

olarak yazılır. Bu yüzden

$$I_\Gamma=\frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma\frac{f.dg-g.df}{f^2+g^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f.(dg/dt)-g.(df/dt)}{f^2+g^2}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(\cos t-\sin t)(-\sin t-2r\sin t\cos t)+(\cos t-r\sin^2 t)(\sin t+\cos t)}{(\cos t-\sin t)^2+(\cos t-r\sin^2 t)^2}dt$$

$$I_\Gamma=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r\sin t(\cos^2 t+1-\sin t\cos t)}{(\cos t-\sin t)^2+(\cos t-r\sin t)^2}dt \qquad (1.7)$$

şeklinde elde edilir. Burada (1.7) ifadesi Mapple yardımı ile nümerik olarak çözülmüştür ve sonuç olarak eğer $0<r<1$ ise, Γ eğrisi yalnızca (0,0) singüler noktasını çevreler ve bu noktada $I_\Gamma=1$; $r>1$ ise, Γ eğrisi her iki singüler noktayı da çevreler ve bu durumda $I_\Gamma=0$ olduğu görülmüştür.[10]

Örnek 1.3. [10] $\dot{x} = ax + by,\ \dot{y} = cx + dy$ lineer sistemi için $ad - bc \neq 0$ olsun. Orijin noktasında $I_\Gamma = \text{sgn}(ad - bc)$ olduğunu gösterelim. Γ eğrisi

$$(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = 1$$

olacak şekilde elips olsun. Bu ifade parametrik olarak

$$f(x, y) = (ax + by) = \cos\theta, \quad g(x, y) = (cx + dy) = \sin\theta$$

şeklinde yazılabilir, burada $0 \leq \theta \leq 2\pi$ dir. Bu denklemler çözülerek

$$x = \frac{d\cos\theta - b\sin\theta}{ad - bc}, \qquad y = \frac{-c\cos\theta + a\sin\theta}{ad - bc},$$

biçiminde ifade edilir. $ad - bc \neq 0$ olduğundan θ açısı artarken eğer $ad - bc > 0$ ise, elips saatin ters yönünü izler ve $ad - bc < 0$ ise, elips saat yönünü izler. (1.5) ten

$$\begin{aligned}
I_\Gamma &= \frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma \frac{f.dg - g.df}{f^2 + g^2} \\
&= \frac{\text{sgn}(ad - bc)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(dg/d\theta) - g(df/d\theta)}{f^2 + g^2}\, d\theta \\
&= \frac{\text{sgn}(ad - bc)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta(\cos\theta) - \sin\theta(-\cos\theta)}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}\, d\theta \\
&= \frac{\text{sgn}(ad - bc)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}\, d\theta \\
&= \frac{\text{sgn}(ad - bc)}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \\
I_\Gamma &= \text{sgn}(ad - bc).
\end{aligned}$$

Şimdi $D^r(TM)$ de bir divergens serbest vektör alanının yapısal kararlılığı için gerek ve yeter şartları sağlayan aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 1.1. (Yapısal Kararlılık Teoremi[4]) Bir $\vec{u} \in D^r(TM)(r \geq 1)$ divergens serbest vektör alanı aşağıdaki şartları sağlıyorsa, $D^r(TM)$ de yapısal kararlıdır .

(1) $\vec{u}$ regüler,

(2) $\vec{u}$ nun bütün iç saddle noktaları kendi kendine bağlantılıdır ve

(3) Sınırdaki $\vec{u}$ nun saddle noktaları, kendi aralarında bağlantılıdır.

Bunun yanında bütün yapısal kararlı vektör alanlarının cümlesi $D^r(TM)$ de açık ve yoğundur.

Yukarıdaki tanımlar ve yapısal kararlılık teoreminden yerel yapısal çatallanma yalnızca dejenere singüler noktada oluşur. Biz burada iç singüler nokta civarındaki çatallanmaları inceleyeceğiz. Bu amaçla kabul edelim ki $p \in M$, $\vec{v} \in C_n^r(TM)$ nin ayrık singüler noktası olsun, bu durumda

$$ind(\vec{v}, p) = \deg(\vec{v}, p) \tag{1.8}$$

dır. Burada $\deg(\vec{v}, p)$ p noktasında $\vec{v}$ nin Brouver derecesidir. Kabul edelim ki $p \in \partial M$ (p, M nin sınırında bir nokta) noktası $\vec{v}$ nin ayrık singüler bir noktası olsun ve $\tilde{M} \subset R^2$ cümlesi M nin bir genişletilmesi olsun, yani burada $M \subset \tilde{M}$ ve $p \in \tilde{M}$ noktası $\tilde{M}$ cümlesinin bir iç noktasıdır. $\tilde{M}$ de p nin bir komşuluğunda normal vektör yönünde akış olmadığından dolayı $(\vec{v}.\vec{n}|_{\partial M} = 0)$ $\vec{v}$, $\vec{\tilde{v}}$ vektör alanına genişletilebilir ki burada p noktası $\vec{\tilde{v}}$ nin bir iç noktasıdır. Bu durumda $p \in \partial M$ noktasında $\vec{v}$ nin indeksi

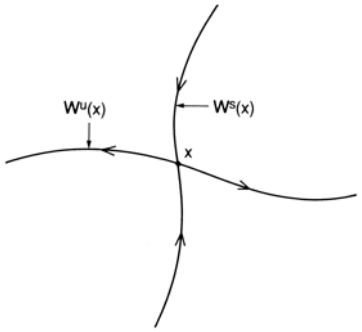
$$ind(\vec{v}, p) = \frac{1}{2} ind(\vec{\tilde{v}}, p) \tag{1.9}$$

şeklinde tanımlanır [1].

Tanım 1.8. $\Phi(x,t)$ akış fonksiyonu $\vec{v} \in C_n^r(TM)$ vektör alanı tarafından elde edilen ve $t=0$ zamanında $x \in M$ noktasından geçen bir yörünge olsun. ω limit cümlesi $\omega(x)$ ve α limit cümlesi $\alpha(x)$

$$\omega(x) = \{y \in M \mid \ t_n \to \infty \ \ \Phi(x,t_n) \to y\},$$
$$\alpha(x) = \{y \in M \mid \ t_n \to -\infty \ \ \Phi(x,t_n) \to y\}.$$

şeklinde tanımlanır [10].



Şekil 1.4: Hiperbolik x saddle noktası için ω and α limit cümlesi

Tanım 1.9. $p \in M$ noktası $\vec{v} \in C_n^r(TM)$ nin ayrık singüler bir noktası olsun ve γ, $\vec{v}$ nin bir yörüngesi olsun. Eğer $x \in \gamma$ noktası için limit cümlesi $\omega(x) = p$ ise, γ ya p noktasına bağlantılı **stable** (kararlı) yörünge, aksi takdirde **unstable** (kararsız) yörünge denir.

Teorem 1.2. (Singülerliklerin sınıflandırılması teoremi [2]) $p \in M$ noktası $\vec{v} \in D^r(TM)(r \geq 1)$ nin bir ayrık singüler noktası olsun. O zaman p noktası yalnızca sınırlı sayıdaki yörüngelere bağlantılıdır ve p noktasına bağlantılı kararlı ve kararsız yörüngeler, p etrafında kapalı bir eğri çizdiğinde sırası ile değişir. Dahası

(1) p, M nin bir iç noktası $(p \in \overset{\circ}{M})$ olsun. $\vec{v}$'nin p noktasındaki indeksi, $ind(\vec{v}, p) = 1 - n$ dir ve p noktası n tanesi stable, n tanesi unstable olmak üzere $2n(n \geq 0)$ yörüngeye sahiptir.

(2) p, M nin sınırında bir nokta $(p \in \partial M)$ olsun. Bu taktirde p, $n+2$ $(n \geq 2)$ yörüngeye sahiptir ve bu yörüngelerin iki tanesi sınırdadır. Bu durumda p nin indeksi

$$ind(\vec{v}, p) = -\frac{n}{2}$$

dir.

İspat: Teoremin ispatını birkaç adımda verelim.

Adım 1: Γ**,** p noktasına bağlantılı bütün yörüngelerin cümlesi olsun. $\vec{v}$ vektör alanının Φ akışı bölge korumalı olduğundan Γ'nın iç noktasının olmadağını görmek kolaydır. Yani $\overset{\circ}{\Gamma} = \phi$ dır.

Şimdi bunun tersini kabul ederek bir çelişki elde edelim. $x \in \overset{\circ}{\Gamma}$ olsun; bu durumda x_0'ın $O \subset \overset{\circ}{\Gamma}$ olacak şekilde bir $O \subset M$ komşuluğu mevcuttur. Genellikten bir şey kaybetmeksizin

$$\tilde{O} = \{ x \in O | \omega(x) = p \}$$

cümlesinin pozitif ölçüye sahip olduğunu kabul edelim, bu durumda

$$\lim_{t \to \infty} | \Phi(\tilde{O}, t) | = 0,$$

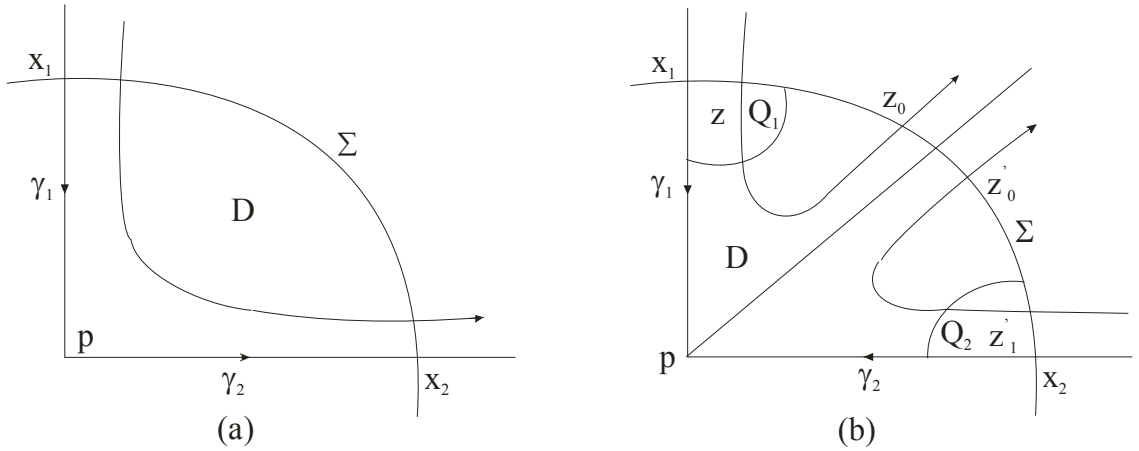
dır. Bu ise $\vec{v}$ nin sıkıştırılamaz olması ile çelişir. O halde $\overset{\circ}{\Gamma} = \phi$ dur.

Adım 2: Γ'nın sadece sonlu sayıda yörüngelere sahip olduğunu gösterelim. Bunun doğru olmadığını varsayalım. O halde p nin bir U komşuluğunda $\gamma_j \to \gamma_0$ olacak şekilde $\gamma_j \subset \Gamma (j = 1,2,...)$ yörüngelerinin bir dizisi ve $\gamma_0 \subset \Gamma$ yörüngesi vardır. Genellikten bir şey kaybetmeksizin γ_0'ın p nin kararlı bir yörüngesi olduğunu kabul edelim. $x \in \gamma_0 \cap U$ alalım, bir $\sum$ yayı x noktasında γ_0 a transversaldir ve N_0, her $j \geq N_0$ için $\sum$ γ_j ye taransversal olacak şekilde yeteri kadar geniştir. Eğer her $\gamma_j (j \geq N)$ p nin kararlı yörüngeleri ise, yani γ_0 ın bir komşuluğunda p nin kararsız hiçbir yörüngesi yoksa, bu durumda herhangi bir $z \in \sum_0$ için $\omega(z) = p$ olacak şekilde $\sum$ da x_0 ın bir $\sum_0$ komşuluğu olmalıdır ki bu da $\overset{\circ}{\Gamma} \neq \phi$ anlamına gelir. Bu ise bir çelişkidir.

Her bir $\gamma_{j_k} (1 \leq k)$ p nin kararsız bir yörüngesi olacak şekilde γ_j nin bir γ_{j_k} alt dizisi $(j_k \geq N_0)$ vardır. $x_{j_k} = \gamma_{j_k} \cap \sum$ olsun, bu durumda $\gamma_{j_k} \to \gamma_0 (k \to \infty)$ olduğundan $x_k \to x_0$ dır. Akış γ_{j_k} orbitleri üzerinde p den ayrıldığından ve γ_0 üzerinde p ye

yaklaştığından dolayı, $\gamma_0 \cap U$ daki herhangi bir nokta singüler bir noktadır. Bu ise p nin ayrık singüler bir nokta olması ile çelişir. Bu nedenle p sonlu sayıdaki yörüngelere bağlantılıdır.

Adım 3: γ_1 ve γ_2 p ye bağlantılı $\vec{v}$ nin bitişik iki yörüngesi olsun. $\vec{v}$ ye transversal olan ve γ_1 ve γ_2 ile sırasıyla x_1 ve x_2 noktalarında kesişen bir $\sum$ yayı alalım. Burada γ_1, γ_2 ve $\sum$ yayı tarafından çevrilen D bölgesinde $\vec{v}$ nin hiçbir singüler noktası ve p ile bağlantılı hiçbir yörüngesi yoktur (*Şekil 2.5*). Q_1 ve Q_2 D bölgesinde x_1 ve x_2 nin yeteri kadar küçük komşulukları olsun. Eğer hem γ_1 hem de γ_2 p nin kararlı yörüngeleri ise, bu durumda herhangi bir $z \in Q_1 (z \neq x_1)$ için, $0 \leq t < t_0$ için $\Phi(z,t) \subset D$ yörüngesi ve $z_0 = \Phi(z,t_0) \in \sum$ fakat $z_0 \notin Q_2$ dir ki bu da D de p nin kararsız yörüngelerinin olduğu anlamına gelir. Bu ise bir çelişkidir. Bu nedenle γ_1 ve γ_2 bitişik ve γ_1 kararlı (veya kararsız) ise, bu durumda γ_2 kararsız (veya kararlı) olmalıdır.



Şekil 1.5. Teorem 1.2 nin ispatının şematik gösterimi

Bir singüler p noktasının kararlı ve kararsız yörüngeleri birbirlerine bitişik olduğundan dolayı $p \in \overset{\circ}{M}$ olduğunda p noktası n tane kararlı n tane kararsız olmak üzere $2n (n \geq 0)$ yörünge ile bağlantılı olmalıdır.

Adım 4: Sonuç olarak Brouwer Degree teoriden, $p \in \overset{\circ}{M}$, $2n(n \geq 0)$ yörüngeye bağlantılı olan bir $\vec{v} \in C^r(TM)(r \geq 0)$ vektör alanının bir ayrık singüler noktası ise, bu durumda p nin indeksi $(1-n)$ dir.

$p \in \partial M$, $n+2(n \geq 0)$ yörüngeye sahip olsun, bu durumda M nin genişletilmiş manifoldu üzerindeki $\vec{v}$ vektör alanının genişletilmesiyle elde edilen $\vec{\tilde{v}}$ vektör alanı için, $p \in \tilde{M}$, $2n+2$ yörüngeye sahip olan $\vec{\tilde{v}}$ nin bir ayrık iç singüler noktasıdır. Bu yüzden (1.3) ve $ind(\vec{v}, p) = 1-n$ ifadeleri birlikte düşünülürse,

$$ind(\vec{v}, p) = -\frac{n}{2}$$

olduğu görülür.

1.1. Jakobiyen Matrisi Sıfırdan Farklı Dejenere Singüler Noktaların Karakterizasyonu

Yapısal kararlılık teoremi (Teorem 2.1), dejenere singüler noktalar civarında divergens serbest vektör alanlarının yapısını karekterize etmeyi sağlar. Burada Jakobiyen matrisleri sıfırdan farklı dejenere singüler iç noktaların karakterizasyonu ve onların yapısal çatallanmalarının çalışılmasında kullanışlı olan bazı lemmalar verilecektir.

Lemma 1.1. $\vec{u} \in D^r(TM)(r \geq 1)$ ve $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ noktası $\vec{u}$ nun bir ayrık singüler noktası olsun. Eğer $ind(\vec{u}, x_0) \neq -1,0,1$ ise, Jakobiyen matris

$$D\vec{u}(x_0) = 0 \tag{1.10}$$

dır [1].

İspat: Teorem 1.2 den bir iç tekil noktada divergens serbest vektör alanının indeksi, x_0 a bağlı yörüngeler $2n(n \geq 0)$ tane olduğunda $ind(\vec{u}, x_0) = 1-n$ dir. İndeksin 1,0,-1 den farklı olması için kabul edelim ki $n \geq 3$ olsun.

γ, x_0 bağlı bir yörünge, (x_1,x_2) dik kordinat sistemi ve x_1 ekseni x_0 noktasında γ ya teğet olsun. $\vec{u} \in D^r(TM)(r \geq 1)$ olduğu için $\vec{u}$ yu yerel olarak

$$\begin{pmatrix} \bullet \\ x \\ \bullet \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + o(|x|)$$

$$D\vec{u}(x_0) = D\vec{u}(0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Şimdi $a = b = c = 0$ olduğunu aşağıdaki gibi birkaç adımda ispat edelim.

Adım 1: İlk olarak $a = c = 0$ olduğunu gösterelim. x_1 ekseni $x_0 = 0$ noktasında γ ya teğet olduğundan ve tanımlardan dolayı

$$\lim_{\substack{x \in \gamma \\ x \to 0}} \frac{u_2(x)}{u_1(x)} = 0 \tag{1.12}$$

şeklinde yazabiliriz. Bunun yanında $(x_1,x_2) \in \gamma$ ve $x_2 = o(|x_1|)$ (x_2 yeteri kadar küçük bir sayı) dır. Bu yüzden (1.11) ve (1.12) den

$$\lim_{\substack{x \in \gamma \\ x \to 0}} \frac{\overrightarrow{u_2}(x)}{\overrightarrow{u_1}(x)} = \lim_{\substack{x \in \gamma \\ x \to 0}} \frac{cx_1 - ax_2 + o(|x|)}{ax_1 + bx_2 + o(|x|)} = \lim_{\substack{x \in \gamma \\ x_1 \to o}} \frac{cx_1 + o(|x_1|)}{ax_1 + o(|x_1|)} = \frac{c}{a} = 0$$

şeklinde yazabiliriz. Bu yüzden $c = 0$ dır. $ind(\vec{u},x_0) \neq 1,-1$ ve $\vec{u}$ nun singüler noktası x_0 dejenere olduğundan $c = 0$ olması $a = 0$ olmasını gerektirir. Bu takdirde $ind(\vec{u},x_0) \neq 1,-1$ olduğunda, $\vec{u}$ x_0 civarında

$$\overrightarrow{u_1}(x) = b\,x_2 + o(|x|),$$

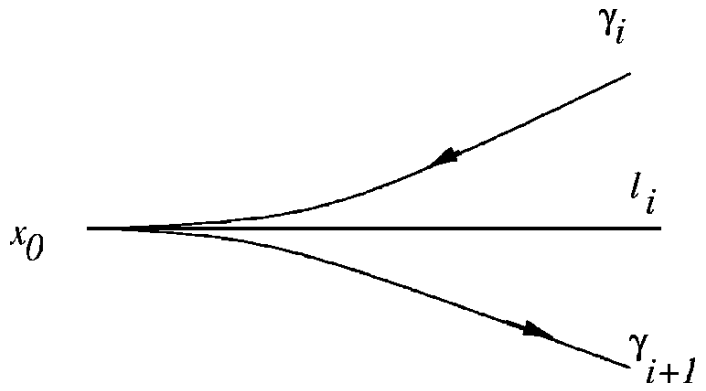
$$\overrightarrow{u_2}(x) = o(|x|) \tag{1.13}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Adım 2: Şimdi x_0 a bağlantılı diğer bir yörüngenin γ_1 olduğunu ve γ_1 ve γ arasındaki açının sıfırdan ve π den farklı olduğunu düşünelim. Sonra (1.13) den

$$\lim_{\substack{x\in\gamma_1 \\ x\to 0}} \frac{\overrightarrow{u_2}(x)}{\overrightarrow{u_1}(x)} = \lim_{\substack{x\in\gamma_1 \\ x\to 0}} \frac{o(|x|)}{b\,x_2 + o(|x|)} = \tan\theta \neq 0$$

sonucuna ulaşırız ki bu $b = 0$ olduğunu gösterir. Bu durumda (1.10) doğrudur.



Şekil 1.6: Lemma 1.1 in ispatının şematik gösterimi

Adım 3: x_0 a bağlı bütün yörüngelerin x_0 da γ ya teğet olduklarını düşünelim. Kabul edelim ki $O \in M$ x_0 ın yeterince küçük bir komşuluğu olsun. $F_i (1 \le i \le 2n)$ ler x_0'a bağlı yörüngeler tarafından çevrili O daki bölgeler olsun ve θ_i x_0 da F_i lerin sınırının açısı olsun. Her F_i için $\theta_i = 0$ olduğunu görmek kolaydır. x_0 noktası son noktası olan en azından bir l_i lineer doğru parçası vardır, öyle ki $\overrightarrow{u_1}(x) = 0$ ve $x \in l_i$ (*Şekil 1.6*) dir. Bu yüzden $\overrightarrow{u_1}(x) = 0$ olduğu, eğrilerin ortak son noktası olan x_0 ile birlikte O da en az $2(n-1)$ lineer eğri parçası vardır. Öte yandan **İmplicit Function** teoreminden, eğer (1.13) de $b \neq 0$ ise $x_0 \in L$ olmak üzere tek bir $L \subset O$ eğrisi vardır; öyle ki $\overrightarrow{u_1}(x) = 0$ ve $x \in L$ dir. Yani $\overrightarrow{u_1}(x) = 0$ ile birlikte O da $L = l_1 \cup l_2$ olmak üzere iki doğru parçası vardır. Bu yüzden eğer ki $n \ge 3$ ise, $b = 0$ dır. Dolayısıyla (1.10) doğrudur. Bu da *Lemma* nın ispatını tamamlar.

Lemma 1.2. $\vec{u} \in D^r(TM)(r \geq 1)$ ve $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ (x_0 noktası M nin bir iç noktası) $\vec{u}$ nun ayrık singüler bir noktası olsun. Eğer $ind(\vec{u}, x_0) = 0$ ve x_0 a bağlantılı iki yörünge arasındaki açı sıfırdan farklı ise, (1.10) doğrudur [1].

İspat: *Lemma 1.1* in ispatındaki Adım 2 den $\theta = \pi$ olduğu zaman (1.10) doğrudur. Bu durumda x_0 a bağlantılı γ_1 ve γ_2 yörüngeleri x_0 noktasında x_1 eksenine teğet olan bir Γ eğrisi oluşturur. Teorem 1.2. den ve $x_2 > 0$ yeterince küçük olduğundan

$$sign\vec{u_1}(0, x_2) = sign\vec{u_1}(0, -x_2)$$

olduğunu elde ederiz. Bunun yanında (1.13) göz önünde bulundurulursa, $b = 0$ olduğu görülür. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 1.1 den Jakobiyen matrisi sıfırdan farklı $\vec{u} \in D^r(TM)$ vektör alanının dejenere singüler bir iç noktası x_0'ın yalnızca aşağıdaki üç durumdan biri olabileceğini görürüz.

(i) Dejenere center(merkez) noktası,

(ii) Dejenere saddle(eğer) noktası, öyle ki x_0 a bağlantılı dört yörünge x_0 noktasında birbirlerine teğettir,

(iii) $ind(\vec{u}, x_0) = 0$ olan bir nokta, öyle ki x_0 a bağlantılı iki yörünge arasındaki açı sıfırdır.

Şimdi bu durumların bir sonraki aşamalarını elde edelim. $x_0 \in \overset{\circ}{M}$, $\vec{u} \in D^r(TM)(r \geq 1)$ in ayrık dejenere bir singüler noktası ve Jakobiyen matrisi sıfırdan farklı $(D\vec{u}(x_0) \neq 0)$ olsun. $D\vec{u}(x_0)$ dejenere bir matris olduğundan , $D\vec{u}(x_0)$

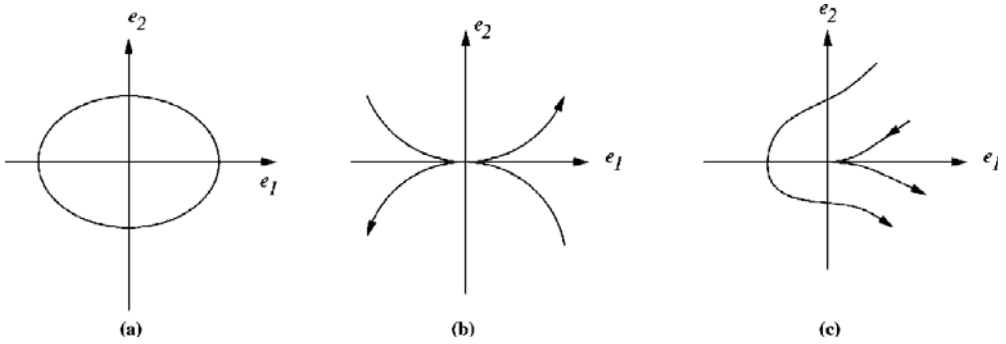
$$D\vec{u}(x_0)e_1 = 0, \ |e_1| = 1 \tag{1.14}$$

durumunu sağlayan bir e_1 özvektörüne sahiptir.

e_2, e_1 vektörüne dik olan birim vektör olsun. Bu takdirde

$$D\vec{u}(x_0)e_2 = \alpha e_1 \tag{1.15}$$

ifadesi bazı $\alpha \neq 0$ sabitleri için sağlanır.



Şekil 1.7. (a) index 1 (b) index -1 (c) index 0

Bu durumda $D\vec{u}(x_0)$ matrisini ve e_1, e_2 vektörlerini

$$D\vec{u}(x_0) = D\vec{u}(0) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \alpha \neq 0$$
$$e_1 = (1,0) \ , \ e_2 = (0,1) \tag{1.16}$$

olarak yazabiliriz. Geometrik olarak e_1 ve e_2, *Şekil 1.7* deki gibi çizilebilir.

1.2. İndeks ve Kinematik Şartları

Şimdi $\vec{u}$ nun x_0 noktasındaki Taylor seri açılımında farklı mertebelerdeki katsayıları ile x_0 noktasındaki indeksi arasındaki bağlantıları inceleyeceğiz. Kabul edelim ki $x_0 \in \overset{\circ}{M}$, $\vec{u}$ nun ayrık dejenere singüler noktası olsun, ve

$$D\vec{u}(x_0) \neq 0 \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial^m (\vec{u}(x_0).e_2)}{\partial e_1^m} \begin{cases} = 0, & 1 \leq m < n, \\ \neq 0, & m = n \end{cases} \tag{1.18}$$

sağlansın. (1.17) ve (1.18) koşulları altında $\vec{u}(x)$ in Taylor seri açılımı (1.16) dan

$$\vec{u}(x) = \begin{cases} \alpha x_2 + f(x_1) + x_2 g_1(x) \\ \beta x_1^n - x_2 f'(x_1) + x_2^2 g_2(x) + o(|x_1|^n) \end{cases} \tag{1.19}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\alpha, \beta \neq 0$, $f(x_1) = o(|x_1|)$ ve $g_i(0) = 0$ $(i = 1,2)$ şeklindedir. $k = \deg f$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{z^k} = \lambda \neq 0, \ k \leq \infty$$

şeklinde tanımlansın

Lemma 1.3. Kabul edelim ki $x_0 \in \overset{\circ}{M}$, (1.17) ve (1.18) şartlarını sağlayan $\vec{u}$ nun ayrık dejenere singüler noktası olsun. Bu takdirde

(1) Eğer $2k > n+1$ ise,

$$ind(\vec{u}, x_0) = \begin{cases} 0, \ n \ çift \ ise, \\ -1, \ n \ tek \ ve \ (2.13) \ de \ \alpha.\beta > 0, \\ 1, \ n \ tek \ ve \ \alpha.\beta < 0 \end{cases}$$

(2) Ya $2k < n+1$ ya da $2k = n+1$ ve $\propto .\beta \neq -k\lambda^2$ ise, $ind\vec{u}(x_0) = -1$

dir [1].

İspat (1): Kabul edelim ki

$$\vec{u_t}(x) = \begin{cases} \propto x_2 + t\left[f(x_1) + x_2 g_1(x)\right] \\ \beta x_1^n + t\left[-x_2 f'(x_1) + x_2^2 g_2(x) + o(|x_1|^n)\right] \end{cases}$$

olsun. Burada $0 \leq t \leq 1$ dir. $2k - 1 > n$ olduğundan $x_0 (= 0)$ noktasının bir $U \subset M$ komşuluğunun olduğunu görmek kolaydır. Öyle ki bütün $t \in [0,1]$ için $\vec{u_t}(x)$, U da yalnızca bir $x_0 = 0$ singüler noktasına sahiptir. İndex' in homotopy değişmezliğinden aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$ind(\vec{u_0}, x_0) = ind(\vec{u_1}, x_0) = ind(\vec{u}, x_0) \tag{1.20}$$

x_0' ın bir komşuluğunda $\vec{u_0} = (\alpha x_2, \beta x_1^n)$' in yörüngeleri aşağıdaki eşitlikle verilir.

$$\frac{\alpha}{2} x_2^2 - \frac{\beta}{n+1} x_1^{n+1} = C \ , \ 0 \leq |C| < \delta \tag{1.21}$$

(1.21) den açıkça görebiliriz ki eğer n çift ise, $x=0$ ın bir komşuluğunda $\overrightarrow{u_0}$ nun akışı *Şekil 1.7(c)* de gösterildiği gibidir; eğer n tek ve $\alpha.\beta>0$ ise, $\overrightarrow{u_0}$ nun akışı *Şekil 1.7(b)* de gösterildiği gibidir; eğer n tek ve $\alpha.\beta<0$ ise, $\overrightarrow{u_0}$ nun akışı *Şekil 1.7(a)* da gösterildiği gibidir. Bu yüzden biz (1.20) den bu sonucu çıkarırız.

İspat (2): $\varepsilon>0$ yeterince küçük alalım ve $x=0$ noktası civarında aşağıdaki vektör alanının singüler noktalarını düşünelim.

$$\overrightarrow{u_\varepsilon}(x)=\begin{cases}\propto x_2+f(x_1)+x_2g_1(x)\\ \beta x_1^n-x_2f'(x_1)+x_2^2g_2(x)+o(|x_1|^n)-\varepsilon\end{cases}$$

kabulden f, $x=0$ civarında

$$f(x_1)=\lambda x_1^k+o(|x_1|^k)\ ,\ \lambda\neq 0\ ,\ 1<k\leq\frac{n+1}{2}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu yüzden $x=0$ noktasının küçük bir komşuluğunda $\overrightarrow{u_\varepsilon}$ un singüler noktaları aşağıdaki denklemi sağlar.

$$\begin{aligned}x_2&=-\frac{\lambda}{\alpha}x_1^k+o(|x_1|^k,\\ \beta x_1^n&+\frac{1}{\alpha}k\lambda^2x_1^{2k-1}=\varepsilon+o(|x_1|^{2k-1}).\end{aligned}\qquad(1.22)$$

Açıkça $2k-1<n$ veya $2k-1=n$ ve $\alpha.\beta\neq -k\lambda^2$ olduğunda (1.22) denklemi tek bir çözüme sahiptir.

$$x_\varepsilon\approx(C\varepsilon^{1/(2k-1)},-\frac{\lambda}{\alpha}C^k\varepsilon^{k/(2k-1)}),$$

burada C

$$C=\begin{cases}\alpha k^{-1}\lambda^{-2} & ,\ 2k-1<n\\ \alpha(\alpha\beta+\lambda^2)^{-1} & ,\ 2k-1=n\ \text{ ve }\ \alpha\beta\neq k\lambda^2.\end{cases}$$

şeklindedir.

$$sign \det D\vec{u}_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}) = -1 \tag{1.23}$$

olduğunu test etmek kolaydır. Yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için küçük bir bölgedeki index değişmezliğinden ve (1.23) ten $ind(\vec{u}, x_0) = -1$ olduğunu sonucunu çıkarırız. Bu da ispatı tamamlar.

2. BÖLÜM

SIFIR İNDEKSLİ SİNGÜLER İÇ NOKTA CİVARINDAKİ YAPISAL ÇATALLANMA

2.1. Temel Teoremler

Kabul edelim ki $\vec{u} \in C^1([0,T], D^r(TM))\ (r \geq 1)$ divergens serbest vektör alanının bir parametreli bir ailesi olsun. $t_0 (0 < t_0 < T)$ noktasında $\vec{u}(x,t)$ nin Taylor açılımını düşünelim.

$$\vec{u}(x,t) = \overrightarrow{u^0}(x) + (t-t_0)\overrightarrow{u^1}(x) + o(|t-t_0|)$$

$$\overrightarrow{u^0}(x) = \vec{u}(x,t_0) \tag{2.1}$$

$$\overrightarrow{u^1}(x) = \frac{\partial}{\partial t}\vec{u}(x,t_0)$$

Yapısal çatallanmalar için aşağıdaki kabullerle başlayalım.

Kabul (H1): Kabul edelim ki $x_0 \in \overset{\circ}{M}$, $\overrightarrow{u^0}(x)$ in bir ayrık dejenere singüler noktası olsun. Ve

$$ind(\overrightarrow{u^0}, x_0) = 0 \tag{2.2}$$

$$D\overrightarrow{u^0}(x_0) \neq 0 \tag{2.3}$$

$$\overrightarrow{u^1}(x_0).e_2 \neq 0 \tag{2.4}$$

olduğunu farz edelim. Burada e_2 (1.15) da tanımlandığı gibi birim vektördür.

Kabul (H2): H1 kabulünün şartları altında biz sadece bazı $n \geq 2$ için $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ civarında $\vec{u} \in C^n$ olduğunu farz edelim ve

$$\frac{\partial^k (\overrightarrow{u^0}(x_0).e_2)}{\partial e_1^k} \begin{cases} = 0\ ,\ 1 \leq k < n = \text{çift}, \\ \neq 0\ ,\ k = n = \text{çift}. \end{cases} \tag{2.5}$$

olsun.

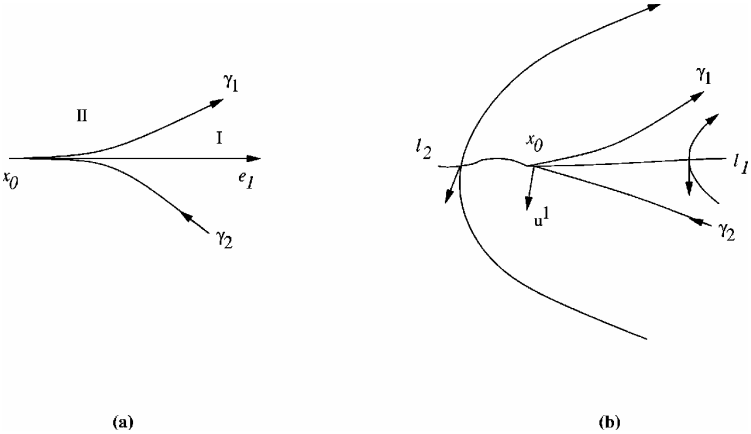
Uyarı 2.1. Burada *Lemma 1.2,* (2.2) ve (2.3) şartlarını gerektirir, öyle ki x_0 civarında $\overrightarrow{u^0}$ ın akışı *Şekil 1.7-(c)* de gösterildiği gibidir. x_0 a bağlantılı $\overrightarrow{u^0}$ ın her iki yörüngesi x_0 noktasında birbirlerine teğettir ve $D\vec{u}(x_0)$ ın birim vektörü e_1 bunların ortak teğet vektörüdür. Biz burada (2.2) ve (2.3) şartlarının iç yapı çatallanmaları için genel olduğunu göstereceğiz.

Uyarı 2.2. Fluid Mekanik uygulamaları açısından şart (2.4) $D\vec{u}(x_0)$ ın öz vektörü olan e_1' e dik yörünge içerisindeki akışın sıfırdan farklı bir ivmeye denk olmasıdır. Bu yapısal çatallanmalar için doğal bir şarttır.

Uyarı 2.3. Şart (2.5), *Lemma 1.3* ün (x_0,t_0) noktasında $\vec{u}(x,t)$ nin çatallanmış singüler noktalarının düzgünlüğünü sağlayan teknik bir terimdir. Ayrıca (1.16) dan (2.5)' i sağlayan n tamsayısının $n \geq 2$ olabileceğini görebiliriz.
Bir singüler nokta civarında sıfır indeksli $\vec{u}(x,t)$ nin iç yapı çatallanması aşağıdaki teoremle tanımlanır.

Teorem 2.1. Kabul edelim ki $\vec{u} \in C^1([0,T]\,,\, D^r(TM))(r \geq 1)$ H1 kabulünü sağlasın. Bu takdirde
(1) $\vec{u}$ vektör alanı (x_0,t_0) noktasında $\vec{u}$ nun yerel yapısında bir çatallanmaya sahiptir. Daha açık olarak $\vec{u}(x,t)$ nun t_0 a yeterince yakın $t < t_0$ (veya $t > t_0$) için x_0'ın küçük bir komşuluğunda singüler noktası yoktur ve $\vec{u}(x,t)$ $t > t_0$ (veya $t < t_0$) iken x_0 noktasından en az iki noktaya çatallanır ve
(2) Eğer $x_0 \in \overset{\circ}{M}$, $\overrightarrow{u^0}$ 'ın sıfır indeksli tek bir noktası ise, $\vec{u}(x,t)$ $t = t_0$ noktasında $\vec{u}$ 'nun global yapısında bir çatallanmaya sahiptir [1].

Teorem 2.2. Kabul edelim ki $\vec{u} \in C^1([0,T]\,,\, D^r(TM))(r \geq 1)$ H2 kabulünü sağlasın. O zaman $\vec{u}(x,t)$ vektör alanı (x_0,t_0) noktasından tam olarak iki dejenere olmayan singüler noktaya çatallanır. Bunlardan biri **center** diğeri ise **saddle** dır [1].



Şekil 2.1. Teorem 2.1 in ispatının gösterimi

Uyarı 2.4. Hem Teorem 2.1 hem de Teorem 2.2 $ind(\overrightarrow{u^0},x_0)=0$ olduğunda bir x_0 iç noktası civarındaki $\vec{u}$ nun yapısal çatallanmasını inceler. $ind(\overrightarrow{u^0},x_0)\neq 0$ olduğunda iç yapı çatallanması Örnek 2.2 ve 2.3 de olduğu gibi meydana gelmeyebilir. Dahası Teorem 2.4, Teorem 2.1 ve Teorem 2.2 de verilen çatallanmaları gösterir. Bu sınırdaki singüler bir nokta civarındaki yapısal çatallanmalardan oldukça farklıdır [2] ve [3]. [2] ve [3] te uygun ve gerekli koşullar altında $\vec{u}(x,t)$'nin, indeksi $-1/2$ den farklı olan sınırdaki singüler bir nokta civarında her zaman yapısal bir çatallanmaya sahip olacağı gösterilmiştir. [2] de serbest-dar sınır koşulları ile birlikte vektör alanlarını incelerken [3] te ise Dirichlet sınır koşulları ile ilgili vektör alanlarını inceler, ki bu viscous sıvı akışındaki boundary layer separation problemi ile ilgilidir.

Teorem 2.1 in ispatı: t_0 noktasında $\vec{u}(x,t)$ nin yapısal çatallanmasını incelemek için (2.1) Taylor açılımı ve (2.4) şartından, yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için (2.1) Taylor seri açılımının yalnızca $\overrightarrow{u^0} \pm \varepsilon \overrightarrow{u^1}$ ilk teriminin topolojik yapısını düşünmemizi sağlar.

Lemma 1.2 den kabul edelim ki γ_1 ve γ_2 $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ noktasına bağlantılı $\overrightarrow{u^0}(x)$ in iki yörüngesi olsun. $D\overrightarrow{u^0}(x_0)$ ın özvektörü e_1, x_0 noktasında γ_1 ve γ_2 yörüngelerinin ortak tanjant vektörüdür (*Şekil 2.1-(a)*).

Hem γ_1 hem de γ_2, Şekil 2.1-(a) da gösterildiği gibi x_0' ın komşuluğunu I ve II açık bölgelerine ayırır. γ_1 ve γ_2 üzerindeki $\overrightarrow{u^0}$ ın vektörleri ve e_1 arasındaki açı $0 < \theta < \pi$ arasında değiştiğinden ve e_1 ile $\overrightarrow{u^1}(x_0)$ arasındaki θ açısının $0 < \theta < \pi$ arasında olması kabulünden x_0'a bağlantılı, I bölgesinde l_1 eğrisi, II bölgesinde l_2 eğrisi vardır öyle ki l_1 ve l_2 üzerinde $\vec{u}^0$ ve $\vec{u}^1$ paraleldir (*Şekil 2.1-(b)*). $\overrightarrow{u^0} \pm \varepsilon\overrightarrow{u^1}$ in singüler noktalarının yalnızca l_1 ve l_2 gibi eğriler üzerinde olduğu aşikardır. Genellemeler dışına çıkmadan farz edelim ki $\overrightarrow{u^0}$ ve $\overrightarrow{u^1}$ l_1 ve l_2 üzerinde zıt yönelime sahip olsunlar yani $\overrightarrow{u^0}$ ve $-\varepsilon\overrightarrow{u^1}$ l_1 ve l_2 üzerinde aynı yönelime sahip olsun. Şart (2.4) ten $\overrightarrow{u^0} - \varepsilon\overrightarrow{u^1}$ l_1 ve l_2 üzerinde singüler noktalara sahip değildir ve bu yüzden x_0'ın bir komşuluğunda singüler bir noktası yoktur. $x_0 \in \overset{\circ}{M}$, $\overrightarrow{u^0}$ ın ayrık singüler noktası olduğu için $\delta > 0$ yeterince küçük olmak üzere $\left|\overrightarrow{u^0}(x)\right|$ değeri l_1 ve l_2 üzerinde 0 dan δ'ya kadar değişir.

$$0 < \left|\overrightarrow{u^0}(x)\right| < \delta \quad , \quad \forall x \in l_1 \cup l_2, \tag{2.6}$$

$$\sup_{l_1 \cup l_2}\left|\overrightarrow{u^0}\right| = \delta \quad , \quad \inf_{l_1 \cup l_2}\left|\overrightarrow{u^0}\right| = 0$$

(2.6) yı takiben yeterince küçük bir ε_0 vardır öyle ki herhangi bir $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ için $\overrightarrow{u^0} + \varepsilon\overrightarrow{u^1}$ vektör alanı l_1 ve l_2 üzerinde en az bir singüler noktaya sahiptir. Yani $\overrightarrow{u^0} + \varepsilon\overrightarrow{u^1}$ x_0 civarında en az iki singüler noktaya sahiptir. Bu yüzden $\overrightarrow{u^0} + \varepsilon\overrightarrow{u^1}$ ve $\overrightarrow{u^0} - \varepsilon\overrightarrow{u^1}$ vektör alanları x_0'ın komşuluğunda topolojik olarak denk değildir. Böylece teoremin (1) kısmı ispat edilmiş olur.

Aşikar olarak eğer sıfır indeksli x_0, $\overrightarrow{u^0}(x)$ in tek bir singüler noktası ise, $\overrightarrow{u^0}+\varepsilon\overrightarrow{u^1}$ ve $\overrightarrow{u^0}-\varepsilon\overrightarrow{u^1}$ vektör alanları M üzerinde topolojik olarak denk değildir. Bu yüzden $\vec{u}(x,t)$ $t=t_0$ noktasında global yapısal çatallanmaya sahiptir.

İspat Teorem 2.2: Kabul H2 ve *Lemma 1.3* den $\overrightarrow{u^0}(x)$ vektör alanının $x_0(x=0)$ noktasındaki Taylor açılımı

$$\vec{u}^0(x)=\begin{cases}\alpha x_2+f(x_1)+x_2g_1(x)\\ \beta x_1^{2m}-x_2f'(x_1)+x_2g_2(x)+o(|x_1|^{2m})\end{cases} \tag{2.7}$$

şeklindedir. Burada $\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0$ dır, ve

$$\begin{aligned} &f(x_1)=o(|x_1|^{m+\frac{1}{2}})\\ &f'(x_1)=o(|x_1|^{m-\frac{1}{2}})\\ &g_i(0)=0\quad i=(1,2)\end{aligned} \tag{2.8}$$

dır. (2.4) ten

$$\vec{u}^1(x)=\begin{cases}\lambda_1+h_1(x)\\ \lambda_2+h_2(x)\end{cases} \tag{2.9}$$

yazabiliriz. Burada $\lambda_2\neq 0$ ve $h_i(x)=O(|x|),\ i=1,2$ dir.

Teorem 2.1 den $\overrightarrow{u^0}\pm\varepsilon\overrightarrow{u^1}$ lerden biri hiçbir singüler noktaya sahip değildir ve diğeri $\varepsilon>0$ yeterince küçük olmak üzere x_0 civarında en az iki singüler noktaya sahiptir. $\overrightarrow{u^0}-\varepsilon\overrightarrow{u^1}$ in singüler noktasının olduğunu farz edelim yani (2.7) de $\beta>0$ ve (2.9) da $\lambda_2>0$ olsun. Burada aşağıdaki denklemlerin iki tane çözümünün olduğunu ispatlamaya ihtiyaç duyarız.

$$\alpha x_2+x_2g_1(x)=\lambda_1\varepsilon+\varepsilon h_1(x)-f(x_1) \tag{2.10}$$

$$\beta x_1^{2m}-x_2f'(x_1)+x_2g_2(x)+o(|x_1|^{2m})=\lambda_2\varepsilon+\varepsilon h_2(x) \tag{2.11}$$

Kapalı fonksiyon teoremi gereğince (2.8) ve (2.10) dan

$$x_2 = \alpha^{-1}\lambda_1\varepsilon - f(x_1) + G(\varepsilon, x_1),$$
$$G(\varepsilon, x_1) = o(|\varepsilon|, |x_1|^{m+\frac{1}{2}}). \tag{2.12}$$

elde ederiz. (2.12) ifadesini (2.11) de kullanırsak,

$$\beta x_1^{2m} = \lambda_2\varepsilon + \alpha^{-1}\lambda_1\varepsilon f'(x_1) + \varepsilon.O(|x|) + o(|\varepsilon|, |x_1|^{2m}) \tag{2.13}$$

cebirsel denklemini elde ederiz. Burada $\beta, \lambda_2 > 0$ dır. Yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için (2.13) denkleminin

$$x_1 = \pm(\beta^{-1}\lambda_2)^{1/2m}\varepsilon^{1/2m} + o(\varepsilon^{1/2m}).$$

şeklinde iki çözümü vardır. Bu yüzden $x(\varepsilon) = (x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon))$ olmak üzere $\overrightarrow{u^0} - \varepsilon\overrightarrow{u^1}$ vektör alanının aşağıda gösterildiği gibi tam olarak iki singüler noktasının olduğu sonucuna ulaşırız.

$$x_1^{\pm}(\varepsilon) = \pm(\beta^{-1}\lambda_2)^{1/2m}\varepsilon^{1/2m} + o(\varepsilon^{1/2m}),$$
$$x_2^{\pm} = \alpha^{-1}\lambda_1\varepsilon + o(\varepsilon, |x_1^{\pm}|^{m+1/2}). \tag{2.14}$$

Sonuç olarak yeterince küçük $\forall\varepsilon > 0$ için $x^{\pm}(\varepsilon)$ un dejenere bir nokta olmadığını gösterebiliriz. $div\vec{u} = 0$ olduğu için

$$\det D(\overrightarrow{u^0} - \varepsilon\overrightarrow{u^1}) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(\overrightarrow{u_1^0} - \varepsilon\overrightarrow{u_1^1})\right)^2 - \frac{\partial}{\partial x_2}(\overrightarrow{u_1^0} - \varepsilon\overrightarrow{u_1^1}).\frac{\partial}{\partial x_1}(\overrightarrow{u_2^0} - \varepsilon\overrightarrow{u_2^1})$$
$$= [\text{ (2.8) ve (2.14) ten }]$$
$$= \pm 2m\alpha\beta(\beta^{-1}\lambda_2)^{(2m-1)/2m}\varepsilon^{(2m-1)/2m} + o(\varepsilon^{(2m-1)/2m})$$

elde ederiz. Buradan

$$\det D(\overrightarrow{u^0} - \varepsilon\overrightarrow{u^1}) \begin{cases} > 0 \ , \ x = x^- \\ < 0 \ , \ x = x^+ \end{cases}$$

Bu yüzden yeterince küçük $\varepsilon > 0$ değeri için $\overrightarrow{u^0} - \varepsilon\overrightarrow{u^1}$ vektör alanının x^+ ve x^- olmak üzere iki singüler noktasının olduğunu ispat etmiş oluruz ve x^- bir **center** noktası, x^+ ise bir **saddle** noktasıdır. x^+ ve x^- dejenere olmayan noktalardır. Bu da ispatı tamamlar.

2.2. Sıvı Akışının İç Ayrımı İçin Uygulamalar

Yapısal çatallanmanın sıvı akışının iç noktasında nasıl meydana geldiğini resmeden tipik bir örnekle başlayalım.

$\vec{u} \in C^1([0.T], D^r(TM))$ ve $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ noktası $\overrightarrow{u^0}(x) = \vec{u}(x, t_0)$ nun ayrık singüler noktası olsun $(0 < t_0 < T)$.

Örnek 2.1. $\overrightarrow{u^0}(x)$ in indeksinin $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ noktasında sıfır olduğunu ve x_0 noktasındaki jakobiyen matrisinin sıfırdan farklı olduğunu düşünelim, yani

$$ind(\overrightarrow{u^0}, x_0) = 0 \quad , \quad D\overrightarrow{u^0}(x_0) \neq 0.$$

Yapısal çatallanmalar, sıvı mekaniğinde iç ayrım olaylarını ifade eden *Şekil 2.2* de gösterildiği gibi meydana gelir.

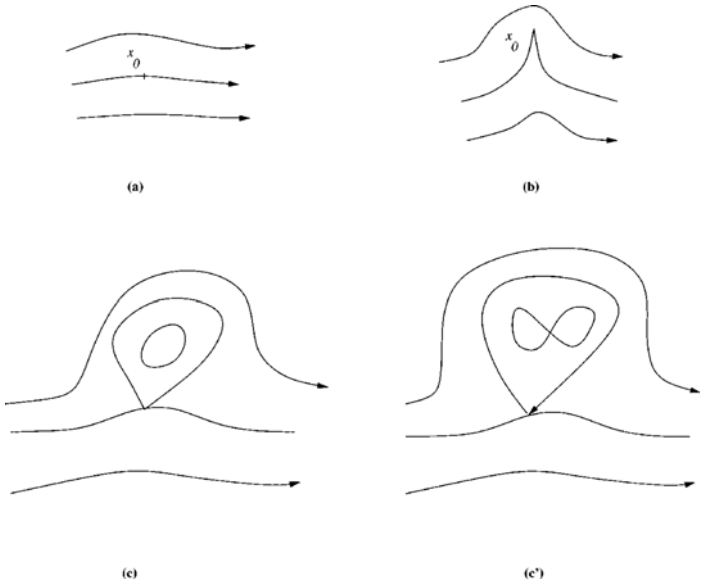
Yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için $t = t_0 - \varepsilon$ olduğu zaman $\vec{u}(x, t_0 - \varepsilon)$ un akışı *Şekil 2.2(a)* da gösterildiği gibidir ve burada x_0'ın komşuluğunda $\vec{u}(x, t_0 - \varepsilon)$ un singüler noktası yoktur. $t = t_0$ noktasında $\overrightarrow{u^0} = \vec{u}(x, t_0)$ ın akışı *Şekil 2.2(b)* deki gibidir. Burada indeks sıfır ve $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ noktası $\overrightarrow{u^0} = \vec{u}(x, t_0)$ ın ayrık singüler noktasıdır. $\varepsilon > 0$ için $t = t_0 + \varepsilon$ noktasında $\vec{u}(x, t_0 + \varepsilon)$ un akışı *Şekil 2.2(c)* ve *Şekil 2.2(c')* de verildiği gibidir. Hatta daha karmaşık sirkülasyon kalıpları sıvı akışının gerisindedir. Teorem 2.4 de göreceğimiz gibi *Şekil 2.2(c)* de göreceğimiz akış yapısı geneldir. Öte yandan *Şekil 2.2(a)* dan *Şekil 2.2*(b) ye ve sonra *Şekil 2.2(c)* ye veya tam tersi olan akış değişimleri hem deneysel hem de nümerik olarak elde edilmiş genel yapı değişimidir. Örneğin Kaynak 8 den elde edilen *Şekil 2.3* de gösterilen axisymetric kuş tüğü gibi. Burada tanımlandığı gibi *Şekil 2.3* de gösterilen üç hava kabarcığı iç ayrıma sebep olur.

Teorem 2.3. Kabul edelim ki $\vec{u} \in C^1([0,T],\, D^1(TM))$ H1 kabulünü sağlasın, sonra

1) *Şekil 2.2*(c) veya *Şekil 2.2*(c') de gösterildiği gibi $\vec{u}$ nun $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ noktasından başka bazı center noktaları olmalıdır.

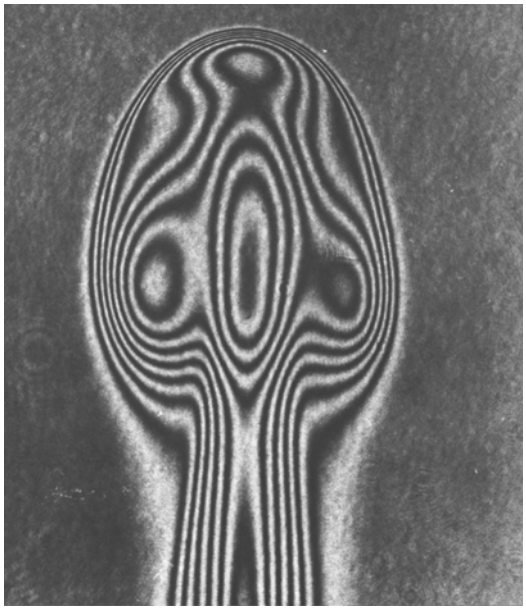
2) Center noktaları $\vec{u}(.,t)$ nin yörüngelerinden oluşan kapalı bir $\gamma(t)$ yörüngesi tarafından çevrilirler ve $t \to t_0$ iken $\gamma(t)$ x_0'a yakınsar ve

3) Eğer H2 kabulü sağlanırsa, *Şekil 2.2*(c) de gösterildiği gibi $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ den ayrılan center tektir.



Şekil 2.2. $ind(\overrightarrow{u^0}, x_0) = 0$ olması durumundaki yapısal çatallanma

Gerçek sıvılarda *Şekil 2.2*(c) ve *Şekil 2.2*(c') deki centerlar ayrık girdaba veya *Şekil 2.2*(c') de birlikte dönen center çiftine denk gelir. Bu teorem Teorem 2.1, Teorem 2.2 ve genişletilmiş yörüngelerin kararlılık lemmasının bir sonucudur. Şimdi bu kararlılık lemmasını tanıyalım.



Şekil 2.3. Sıvı akışının iç ayrımı

Tanım 2.1. $\vec{v} \in C^r(TM)$ bir vektör alanı olsun. Eğer $\gamma \subset M$ eğrisi aşağıdaki şartları sağlıyorsa, γ ya $\vec{v}$ nin genişletilmiş yörüngesi denir.

i) γ birleşik bir yörüngedir

$$\gamma = \bigcup_{i=1} \gamma_i ;$$

ii) γ_i ya $\vec{v}$ nin bir yörüngesidir ya da hem $\vec{v}$ nin yörüngeleri hem de singüler noktalarından oluşur.

iii) γ_i ve γ_{i+1} $\vec{v}$ nin yürüngeleri ise , γ_i nin limit cümlesi w, γ_{i+1} in limit cümlesi α olmak üzere

$$\omega(\gamma_i) = \alpha(\gamma_{i+1})$$

yani γ_i nin son noktası $\vec{v}$ nin singüler noktasıdır ve γ_{i+1} in başlangıç noktası γ_i nin bitim noktasıdır. $\varphi_1 = \alpha(\gamma_1)$ genişletilmiş γ yörüngesinin başlangıç noktasıdır.

Şimdi genişletilmiş yörüngeler için kararlılık lemmasını verelim. Bu lemma vektör alanı ailesinin yörüngelerinin analizinde ve iki boyutlu sıkıştırılamaz sıvı akışında bazı problemlerin çözümü için oldukça kullanışlı bir lemmadır.

Lemma 2.1 **(Genişletilmiş Yörüngelerin Kararlılığı [4])**

Kabul edelim ki $\overrightarrow{v^n} \in C^r(TM)$ vektör alanlarının bir dizisi ve $\lim_{n\to\infty} \vec{v}^n = \vec{v} \in C^r(TM)$ olsun. Farz edelim ki $\gamma^n \subset M$ $\overrightarrow{v^n}$ in genişletilmiş bir yörüngesi olsun ve γ^n in p_1^n başlangıç noktaları p_1'e yakınsak olsun. O halde $\overrightarrow{v^n}$ in genişletilmiş yörüngeleri γ^n ler p_1 ile birlikte $\vec{v}$ nin genişletilmiş yörüngesi γ ya yakınsaktır.

2.3. İndeksin Sıfır Olması Durumunda Yapısal Çatallanmaların Genelleştirilmesi

Şimdi *Şekil 2.2(c)* de gösterildiği gibi yapısal çatallanmaların tipini göstereceğiz. Yani bir **center** iç ayrımı yapısal çatallanmalarda geneldir. Bu dikkate değer bir şekilde sınırdaki yapısal çatallanmalardan farklıdır. Burada ayrıca çoklu **center** lar için iç ayrım ve sıfır indeksli tekil noktaların iç akış ayrımının sıvı hareketlerinde nadiren gözlendiği açıklanır.

Kabul edelim ki $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ ve $0 < t_0 < T$ olsun. $B \subset C^1([0,T], D^2(TM))$ topolojik uzayını

$$B = \left\{ \vec{u} \in C^1([0,T], D^2(TM)) \,|\, \overrightarrow{u^0}(x_0) = 0,\ \det D\overrightarrow{u^0}(x_0) = 0,\ \overrightarrow{u^0} = \vec{u}(.,t_0) \right\}$$

şeklinde tanımlayalım. B topolojik uzayının $C^1([0,T], D^2(TM)$ deki bütün vektör alanlarını ihtiva ettiği açıktır. Bu vektör alanları (x_0,t_0) noktasında yerel yapısal çatallanmaya sahiptirler.

$$B_0 = \left\{ \vec{u} \in B \mid D\overrightarrow{u^0}(x_0) \neq 0\ ,\ \frac{\partial^2(\overrightarrow{u^0}(x_0).e_2)}{\partial e_1^2} \neq 0\ ,\ \overrightarrow{u^1}(x_0).e_2 \neq 0 \right\}$$

cümlesi B de açık ve yoğundur. Burada $\vec{u}^1(x) = \frac{\partial}{\partial t}\vec{u}(x,t_0)$ dır [1].

Teorem 2.4. (Yapısal Çatallanmaların Genelleştirilmesi [1])

Herhangi bir $\vec{u} \in B_0$ için, $\vec{u}$ (x_0,t_0) noktasında yerel yapısal çatallanmaya sahiptir. Daha açık olarak $\vec{u}$ vektör alanı (x_0,t_0) noktasından tam olarak iki dejenere olmayan singüler noktaya çatallanır. Bunlardan biri **center** diğeri ise **saddle** dir. Bunlar *Şekil*

2.2(a)-(c) de gösterildiği gibidir. Dahası B_0 cümlesi B topolojik uzayında açık ve yoğundur. Burada B topolojik uzayı (x_0,t_0) noktasında yerel yapısal çatallanmaya sahip olan $C^1([0,T]\,,\,D^2(TM))$ deki bütün vektör alanlarını içerir.

İspat: Eğer $\vec{u} \in B_0$ ise, $\overrightarrow{u^0} \in D^2(TM)$ ve $\overrightarrow{u^0}$ vektör alanı $n=2$ olmak üzere (2.13) de ifade edildiği gibi bir Taylor açılımına sahiptir. Ayrıca

$$\deg f = k \geq 2 \;\; (f \in C^2 \text{ ve } f(z) = o(|z|) \text{ olduğundan})$$

dır. Bu yüzden *Lemma 2.3* ten

$$ind(\overrightarrow{u^0}, x_0) = 0$$

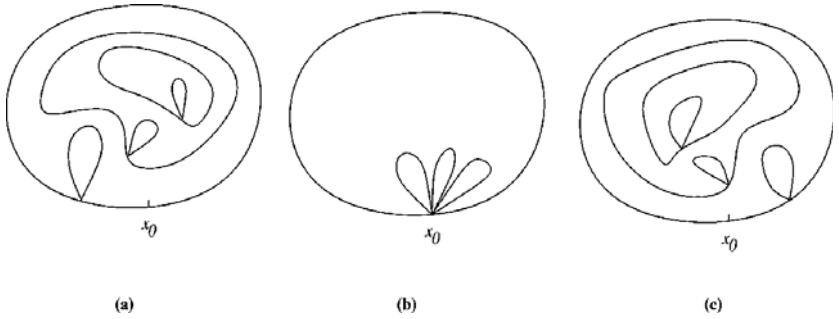
olur. Sonra bu teorem Teorem 2.1 ve Teorem 2.2 yi takip eder. Bu da ispatı tamamlar.

2.4 Yapısal Çatallanma Olmayan Örnekler

Bir $\vec{v} \in D^r(TM)$ vektör alanının yerel yapısal kararlı singüler noktası için

$$ind(\vec{v}, x_0) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \quad , & x_0 \in \partial M \\ -1 \text{ veya } +1 \quad , & x_0 \in \overset{\circ}{M} \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz. [2] de ifade edilen yapısal çatallanma teoreminde $\vec{u}(x,t) = \overrightarrow{u^0}(x) + (t-t_0)\overrightarrow{u^1}(x) + o(|t-t_0|)$ vektör alanı için eğer x_0 sınırdaki singüler bir nokta, $ind(\overrightarrow{u^0}, x_0) \neq -\dfrac{1}{2}$ ve $\overrightarrow{u^1} \neq 0$ ise $\vec{u}(x,t)$ vektör alanı (x_0,t_0) noktasında, $\vec{u}$ nun yerel yapısında bir çatallanmaya sahiptir. Aksine $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ singüler nokta ve $ind(\overrightarrow{u^0}, x_0) \neq 1, -1$ olduğunda $\vec{u}(x,t)$ vektör alanı (x_0,t_0) civarında yapısal çatallanmaya sahip olmayabilir. Bunları göstermek için aşağıdaki iki örneği verelim.

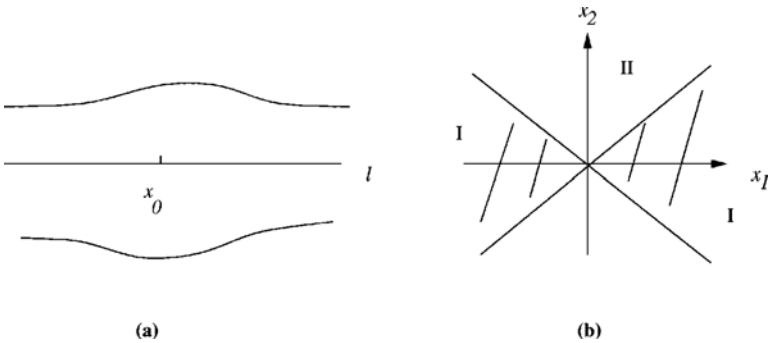


Şekil 2.4. Örnek 2.2 nin şematik gösterimi

Örnek 2.2. *Şekil 2.4*, t zamanından t_0 zamanına geçerken $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ noktası civarında bir $\vec{u}(x,t)$ vektör alanının yapısal değişimini gösterir. Burada $ind(\vec{u}^0, x_0) = -n \ (n > 1)$, $\overrightarrow{u^0} = \vec{u}(x,t_0)$ ve $\overrightarrow{u^1}(x_0) = \dfrac{\partial}{\partial t}\vec{u}(x_0,t) \neq 0$ dır.

Şekil 2.4 te $\vec{u}(x,t_0-\varepsilon)$ vektör alanının (a) da , $\vec{u}(x,t_0+\varepsilon)$ vektör alanının (c) de verildiğini görürüz ki bu vektör alanları yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için topolojik olarak denktirler. Bu yüzden $\vec{u}(x,t)$ vektör alanı (x_0,t_0) noktasında yapısal çatallanmaya sahip değildir.

Örnek 2.3. Kabul edelim ki $ind(\overrightarrow{u^0}, x_0) = 0$, $D\vec{u}(x_0) \neq 0$ ve x_0 noktası civarındaki $\overrightarrow{u^0}$ vektör alanının yapısı *Şekil 3.5 (a)* da gösterildiği gibi olsun.



Şekil 2.5. *Örnek 2.3 ün şematik gösterimi.*

Şekil 2.5 (b) deki koordinat sisteminin x_1 ekseni, x_0 noktasında *Şekil 2.5*(a) daki ℓ yörünge çizgisine teğet olsun. x_0 civarında $\overrightarrow{u^0}$ ve x_1 ekseni arasındaki açı *Şekil 2.5(b)*

deki taralı I bölgesinde değişir. Bu yüzden, eğer x_1 ekseni ve $\overrightarrow{u^1}(x_0)$ arasındaki açı *Şekil 2.5*(b) de II bölgesinde olursa, $\overrightarrow{u^1}(x)$ x_0 civarında $\overrightarrow{u^0}(x)$'i keser. Bu ise $\vec{u}(x,t) = \overrightarrow{u^0}(x) + (t-t_0)\overrightarrow{u^1} + o(|t-t_0|^2)$ vektör alanının (x_0, t_0) civarında yapısal çatallanmaya sahip olmadığını gösterir.

3. BÖLÜM

ANTİSİMETRİK DURUMDA SİNGÜLER NOKTA CİVARINDAKİ YAPISAL ÇATALLANMALAR

Bu bölümde iki boyutlu divergens serbest vektör alanının, orijin noktası $O(0,0)$' a göre anti-simetrik olması durumunda iç yapı çatallanmalarının nasıl meydana geldiği göstereceğiz, yani $\vec{u}(x,y)$ vektör alanı,

$$\vec{u}(-x,-y) = -\vec{u}(x,y)$$

eşitliğini sağlar. Bu durumdaki $\vec{u}(x,y)$ vektör alanlarının cümlesini

$$R^r(TM) = \left\{ \vec{u} \in D^r(TM) \,|\, \vec{u}(-x,-y) = -\vec{u}(x,y) \right\}$$

şeklinde gösterebiliriz.

Eğer $P = -P'$ ise P' noktası P noktasının simetrik görüntüsüdür. Benzer şekilde bir N cümlesinin simetrik görüntülerinin cümlesi $N' = \{-P \,|\, P \in N\}$ şeklinde temsil edilir. Şimdi $R^r(TM)$ de bir divergens serbest vektör alanının yapısal kararlılığı için gerek ve yeter şartları sağlayan aşağıdaki teoremi ifade edelim [5].

Teorem 3.1. Bir $\vec{u} \in R^r(TM)(r \geq 2)$ divergens serbest vektör alanı aşağıdaki şartları sağlıyorsa $R^r(TM)$ de yapısal kararlıdır.

(1) $\vec{u}$ regülerdir,

(2) $\vec{u}$ nun her bir iç saddle noktası P, ya birbirlerine bağlantılıdır ya da P nin simetrik görüntüsü P' ile bağlantılıdır,

(3) $N \subset M$ olmak üzere N nin P' simetrik görüntüsüne sahip sınırın her bir saddle noktası $Q \in N \cup N' \setminus \{P, P'\}$ noktasına bağlantılıdır. Burada N, $N' \subset M$ simetrik görüntüsüne sahip sınırın bağlantılı bileşenidir .[5]

Dahası bütün yapısal kararlı vektör alanlarının cümlesi $R^r(TM)$ de açık ve yoğundur. $\vec{u} \in C^1([0,T], R^r(TM))\ (r \geq 2)$ divergens serbest vektör alanının bir parametreli bir ailesi olsun. $t_0 (0 < t_0 < T)$ noktasında $\vec{u}(x,t)$ nin Taylor açılımını

$$\begin{aligned} \vec{u}(x,t) &= \overrightarrow{u^0}(x) + (t-t_0)\overrightarrow{u^1}(x) + o(|t-t_0|) \\ \overrightarrow{u^0}(x) &= \vec{u}(x,t_0) \\ \overrightarrow{u^1}(x) &= \frac{\partial}{\partial t}\vec{u}(x,t_0) \end{aligned} \tag{3.1}$$

ele alalım. Şimdi yapısal çatallanmalar için aşağıdaki kabullerle başlayalım.

Kabul (D1): Kabul edelim ki $x_0 \in \overset{\circ}{M}$, $\overrightarrow{u^0}(x)$ in bir ayrık dejenere singüler noktası olsun, ve

$$ind(\overrightarrow{u^0}, x_0) = -1 \tag{3.2}$$

$$D\overrightarrow{u^0}(x_0) \neq 0 \tag{3.3}$$

$$\overrightarrow{u^1}(x_0).e_2 \neq 0 \tag{3.4}$$

olduğunu farz edelim. Burada e_2 (1.16) da tanımlandığı gibi birim vektördür.

Kabul (D2): D1 kabulünün şartları altında biz sadece bazı $n \geq 2$ için $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ civarında $\vec{u} \in C^n$ olduğunu farz edelim ve

$$\frac{\partial^k (\overrightarrow{u^1}(x_0).e_2)}{\partial e_1^k} \begin{cases} = 0\ ,\ 1 \leq k < n = \text{tek}, \\ \neq 0\ ,\ k = n = \text{tek}. \end{cases} \tag{3.5}$$

olsun.

Kabul (D3): Kabul edelim ki $x_0 \in \overset{\circ}{M}$, $\overrightarrow{u^0}(x)$ in bir ayrık dejenere singüler noktası ve

$$ind(\overrightarrow{u^0}, x_0) = 1 \tag{3.6}$$

$$D\overrightarrow{u^0}(x_0) \neq 0 \tag{3.7}$$

$$\overrightarrow{u^1}(x_0).e_2 \neq 0 \tag{3.8}$$

olsun.

Kabul (D4): D3 kabulünün şartları altında biz sadece bazı $n \geq 2$ için $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ civarında $\vec{u} \in C^n$ olduğunu farz edelim ve

$$\frac{\partial^k (\overrightarrow{u^0}(x_0).e_2)}{\partial e_1^k} \begin{cases} = 0 \ , \ 1 \leq k < n = \text{tek}, \\ \neq 0 \ , \ k = n = \text{tek}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Olsun. Bir singüler nokta civarında indeks değeri, $ind(\vec{u}, x_0) = -1$ olan $\vec{u}(x,t)$ nin iç yapı çatallanması aşağıdaki teoremle tanımlanır.

Teorem 3.2. $\vec{u} \in C^2([0,T], R^r(TM))(r \geq 2)$ vektör alanı D1 kabulünü sağlasın. O zaman

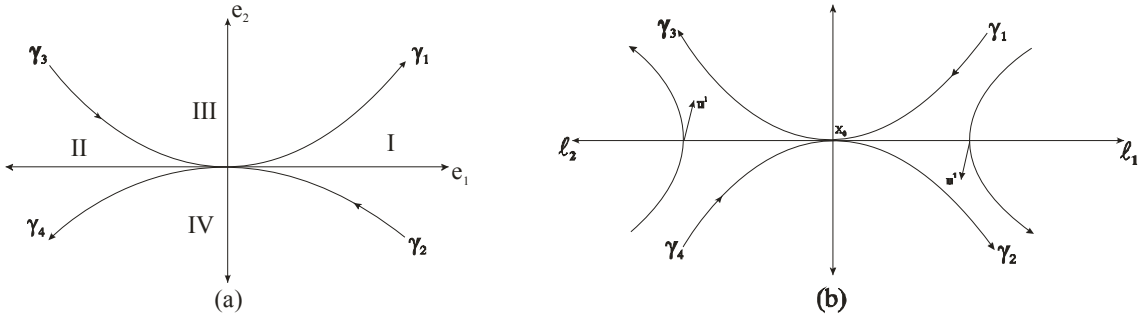
(1) $\vec{u}$ vektör alanı (x_0, t_0) noktasında $\vec{u}$ nun yerel yapısında bir çatallanmaya sahiptir. Daha açık olarak $\vec{u}(x,t)$ vektör alanı , t_0 'a yeterinca yakın $t < t_0$(veya $t > t_0$) için x_0 ın yeterince küçük bir komşuluğunda tek bir singüler noktaya sahiptir ve $\vec{u}(x,t)$, t_0 'a yeterince yakın $t > t_0$ (veya $t < t_0$) için x_0 ın yeterince küçük bir komşuluğunda tam olarak üç singüler noktaya sahiptir.

(2) Eğer $x_0 \in \overset{\circ}{M}$, index değeri $ind(\vec{u}^0, x_0) = -1$ olan $\overrightarrow{u^0}$ ın tek bir singüler noktası ise $\vec{u}(x,t)$ vektör alanı $t = t_0$ noktasında $\vec{u}$ nun global yapısında bir çatallanmaya sahiptir.

Teorem 3.3. $\vec{u} \in C^2([0,T], R^r(TM))(r \geq 2)$ vektör alanı D2 kabulünü sağlasın. O zaman x_0 ın yeterince küçük bir komşuluğunda $t < t_0$(veya $t > t_0$) için $\vec{u}(x,t_0)$ vektör alanı (x_0, t_0) noktasından dejenere olmayan tek bir singüler noktaya çatallanır ve bu nokta bir saddle noktasıdır. x_0 ın yeterince küçük bir komşuluğunda $t > t_0$(veya $t < t_0$) için

$\vec{u}(x,t_0)$ vektör alanı (x_0,t_0) noktasından dejenere olmayan üç singüler noktaya çatallanır ve bu noktalardan ikisi saddle, diğeri ise bir center noktasıdır.

Teorem 3.2 nin ispatı: t_0 noktasında $\vec{u}(x,t)$ nin yapısal çatallanmasını incelemek için (3.1) Taylor açılımı ve (3.4) şartından, yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için (3.1) Taylor seri açılımının yalnızca $\overrightarrow{u^0} \pm \varepsilon \overrightarrow{u^1}$ ilk teriminin topolojik yapısını düşünmemizi sağlar.



Şekil 3.1: Teorem 3.2 nin ispatının şematik gösterimi

$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ ve γ_4, $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ noktasına bağlantılı $\overrightarrow{u^0}(x)$ in dört yörüngesi olsun. $D\overrightarrow{u^0}(x_0)$ ın özvektörü e_1, x_0 noktasında $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ ve γ_4 yörüngelerinin ortak tanjant vektörüdür (*Şekil 3.1-(a))*. Bu yörünge şekilde gösterildiği gibi x_0 ın komşuluğunu I, II, III ve IV açık bölgelerine ayırır. γ_1 ve γ_2 üzerindeki $\overrightarrow{u^0}$ ın vektörleri ve e_1 arasındaki açı $0 < \theta < \pi$ arasında değişir. γ_3 ve γ_4 üzerindeki $\overrightarrow{u^0}$ ın vektörleri ve e_1 arasındaki açı ise $0 < \theta < 2\pi$ arasında değişir ve e_1 ile $\overrightarrow{u^1}(x_0)$ arasındaki θ açısının $0 < \theta < \pi$ arasında olması kabulünden x_0'a bağlantılı, I bölgesinde ℓ_1 eğrisi, II bölgesinde ℓ_2 eğrisi vardır öyle ki ℓ_1 ve ℓ_2 üzerinde $\vec{u}^0$ ve $\vec{u}^1$ paraleldir(*Şekil 3.1-(b)*). $\overrightarrow{u^0} \pm \varepsilon \overrightarrow{u^1}$ in singüler noktalarının yalnızca ℓ_1 ve ℓ_2 gibi eğriler üzerinde olduğu aşikardır. Farz edelim ki $\overrightarrow{u^0}$ ve $\overrightarrow{u^1}$, ℓ_1 ve ℓ_2 üzerinde aynı yönelime sahip olsunlar yani $\overrightarrow{u^0}$ ve $-\varepsilon\overrightarrow{u^1}$ ℓ_1 ve ℓ_2 üzerinde zıt yönelime sahiptir. $\overrightarrow{u^0}$ ın yörüngeleri anti-simetrik olduğu için $\overrightarrow{u^1}$ in x_0 noktasındaki değeri sıfırdır. Dolayısıyla $\overrightarrow{u^0} + \varepsilon\overrightarrow{u^1}$ x_0 noktasında tek bir singüler noktaya

sahiptir. Yani x_0 ın yeterince küçük bir komşuluğunda $\overrightarrow{u^0}+\varepsilon\overrightarrow{u^1}$ vektör alanının x_0 noktasından başka hiçbir singüler noktası yoktur.

$x_0 \in \overset{\circ}{M}$, $\overrightarrow{u^0}$' ın ayrık singüler noktası olduğu için $\delta > 0$ yeterince küçük olmak üzere $\left|\overrightarrow{u^0}(x)\right|$ değeri ℓ_1 ve ℓ_2 üzerinde 0 dan δ'ya kadar değişir ve $\overrightarrow{u^0}(x_0)=0$ dır.

$$0<\left|\overrightarrow{u^0}(x)\right|<\delta \quad , \quad \forall x \in \ell_1 \cup \ell_2, \tag{3.10}$$

$$\sup_{\ell_1\cup\ell_2}\left|\overrightarrow{u^0}\right|=\delta \quad , \quad \inf_{\ell_1\cup\ell_2}\left|\overrightarrow{u^0}\right|=0$$

$\overrightarrow{u^0}$ ın yörüngeleri anti-simetrik olduğu için $\overrightarrow{u^1}$ in x_0 noktasındaki değeri sıfırdır. Dolayısıyla $\overrightarrow{u^0}-\varepsilon\overrightarrow{u^1}$ vektör alanı x_0 noktasında tek singüler noktaya sahiptir. (3.10) u takiben yeterince küçük $\varepsilon>0$ vardır öyle ki herhangi bir $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ için $\overrightarrow{u^0}-\varepsilon\overrightarrow{u^1}$ vektör alanı ℓ_1 ve ℓ_2 nin her biri üzerinde bir singüler noktaya sahiptir. Dolayısıyla $\overrightarrow{u^0}-\varepsilon\overrightarrow{u^1}$ vektör alanı x_0 ın komşuluğunda üç singüler noktaya sahiptir. Bu yüzden $\overrightarrow{u^0}+\varepsilon\overrightarrow{u^1}$ ve $\overrightarrow{u^0}-\varepsilon\overrightarrow{u^1}$ vektör alanları x_0 ın komşuluğunda topolojik olarak denk değildir.

Dolayısıyla teoremin (1) kısmı ispat edilmiş olur.

Aşikar olarak eğer $x_0 \in \overset{\circ}{M}$, $\overrightarrow{u^0}(x)$ in index değeri $ind(\overrightarrow{u^0},x_0)=-1$ olan tek bir singüler noktası ise $\overrightarrow{u^0}+\varepsilon\overrightarrow{u^1}$ ve $\overrightarrow{u^0}-\varepsilon\overrightarrow{u^1}$ vektör alanları M üzerinde topolojik olarak denk değildir. Bu yüzden $\vec{u}(x,t)$ vektör alanı $t=t_0$ noktasında global yapısal çatallanmaya sahiptir. Böylelikle teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.3 ün ispatı: Kabul D2 ve *Lemma 1.3* den $\vec{u}^0(x)$ vektör alanının $x_0(x=0)$ noktasındaki Taylor açılımı aşağıdaki şekildedir.

$$\vec{u}^{0}(x)=\begin{cases}\alpha x_2 + f(x_1) + x_2 g_1(x) \\ \beta x_1^{2n+1} - x_2 f'(x_1) + x_2^2 g_2(x) + o(|x_1|^{2n+1})\end{cases} \tag{3.11}$$

burada $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha.\beta > 0$ dır ve,

$$\begin{aligned} &f(x_1) = o(|x_1|^{n+1}), \\ &f'(x_1) = o(|x_1|^{n}), \\ &g_i(0) = 0 \;\; i = (1,2). \end{aligned} \tag{3.12}$$

olur. $\overrightarrow{u^1}(x_0).e_2 \neq 0$ ve $\vec{u} \in R^r(TM)$ olduğundan $\overrightarrow{u^1}(x)$'i

$$\overrightarrow{u^1}(x)=\begin{cases}\lambda_1 x_2 + h_1(x) \\ \lambda_2 x_1 + h_2(x)\end{cases} \tag{3.13}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $\lambda_2 \neq 0$, $h_i(x) = O(|x|)(i = 1,2)$ dır.

Teorem 3.2 den $\overrightarrow{u^0} \pm \varepsilon \overrightarrow{u^1}$ vektör alanlarından biri yeterince küçük $\varepsilon > 0$ değeri için x_0'ın komşuluğunda tek bir singüler noktaya diğeri ise üç tane singüler noktaya sahipti. Kabul edelim ki $\overrightarrow{u^0} - \varepsilon \overrightarrow{u^1}$ vektör alanı üç tane singüler noktaya sahip olsun, yani (3.11) da $\beta > 0$ ve (3.13) de $\lambda_2 > 0$ olsun. $\overrightarrow{u^0} - \varepsilon \overrightarrow{u^1}$ vektör alanının singüler noktaları

$$\alpha x_2 + x_2 g_1(x) = \varepsilon \lambda_1 x_2 + \varepsilon h_1(x) - f(x_1) \tag{3.14}$$

$$\beta x_1^{2n+1} - x_2 f'(x_1) + x_2^2 g_2(x) + o(|x_1|^{2n+1}) = \varepsilon \lambda_2 x_1 + \varepsilon h_2(x) \tag{3.15}$$

eşitliklerini sağlar. Kapalı fonksiyon teoremi gereğince (3.12) ve (3.14) ten

$$x_2 = \frac{o(|\varepsilon|, |x_1|^{n+1})}{\alpha - \varepsilon \lambda_1} \tag{3.16}$$

eşitliğini elde ederiz. (3.16) ifadesini (3.15) te kullanırsak,

$$\beta x_1^{2n+1} - \varepsilon \lambda_2 x_1 - \frac{o(|\varepsilon|, |x_1|^{n+1})}{\alpha - \varepsilon \lambda_1}.f'(x_1) + o(|x_1|^{2n+1}) = 0,$$

$$\Rightarrow \; x_1(\beta x_1^{2n} - \varepsilon \lambda_2 - o(|\varepsilon|, |x_1|^{2n+1}) = 0 \tag{3.17}$$

denklemini elde ederiz. Burada $\beta, \lambda_2 > 0$ dır, dolayısıyla yeterince küçük $\varepsilon > 0$ değeri için (3.17) denkleminin

$$x_1 = x_0 = 0, \qquad x_1^{\pm}(\varepsilon) = \pm\left[(\beta^{-1}\varepsilon\lambda_2)^{1/2n} + \beta^{-1/2n} o(|\varepsilon|, |x_1|^{(2n+1)/2n})\right]$$

şeklinde üç tane çözümü vardır. Bu yüzden, $\overrightarrow{u^0} - \varepsilon\overrightarrow{u^1}$ vektör alanının

$$x_0 = \left(0\,,\, \frac{o(|\varepsilon|, |x_1|^{n+1})}{\alpha - \varepsilon\lambda_1}\right)$$

$$x^-(\varepsilon) = \left(-(\beta^{-1}\varepsilon\lambda_2)^{1/2n} - \beta^{-1/2n} o(|\varepsilon|, |x_1|^{(2n+1)/2n})\,,\, \frac{o(|\varepsilon|, |x_1|^{n+1})}{\alpha - \varepsilon\lambda_1}\right)$$

$$x^+(\varepsilon) = \left((\beta^{-1}\varepsilon\lambda_2)^{1/2n} + \beta^{-1/2n} o(|\varepsilon|, |x_1|^{(2n+1)/2n})\,,\, \frac{o(|\varepsilon|, |x_1|^{n+1})}{\alpha - \varepsilon\lambda_1}\right)$$

olacak şekilde tam olarak üç tane singüler çözümü vardır. Sonuç olarak yeterince küçük $\varepsilon > 0$ değeri için $\overrightarrow{u^0} - \varepsilon\overrightarrow{u^1}$ vektör alnının singüler noktalarının dejenere olmadığını gösterelim. $div\vec{u} = 0$ olduğu için $\overrightarrow{u^0} - \varepsilon\overrightarrow{u^1}$ vektör alanının jakobijen matrisinin determinantı,

$$\det D(\overrightarrow{u^0} - \varepsilon\overrightarrow{u^1}) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(\overrightarrow{u_1^0} - \varepsilon\overrightarrow{u_1^1})\right)^2 - \frac{\partial}{\partial x_2}(\overrightarrow{u_1^0} - \varepsilon\overrightarrow{u_1^1}).\frac{\partial}{\partial x_1}(\overrightarrow{u_2^0} - \varepsilon\overrightarrow{u_2^1})$$

$$= -\alpha\beta(2n+1)x_1^{2n} + \alpha\lambda_2\varepsilon - (f'(x_1))^2 + \alpha x_2 o(|x_1|^{n-1})$$

biçiminde yazılır. Buradan

$$\det D(\overrightarrow{u^0} - \varepsilon\overrightarrow{u^1})_{x=x_0} = \alpha\lambda_2\varepsilon > 0$$

$$\det D(\overrightarrow{u^0} - \varepsilon\overrightarrow{u^1})_{x=x^{\pm}(\varepsilon)} = -\alpha\lambda_2\varepsilon(2n) < 0$$

$$\det D(\overrightarrow{u^0} - \varepsilon\overrightarrow{u^1}) \begin{cases} > 0, & x = x_0 \\ < 0, & x = x^- \\ < 0, & x = x^+ \end{cases}$$

elde edilir. Bu yüzden yeterince küçük $\varepsilon > 0$ değeri için $\overrightarrow{u^0} - \varepsilon\overrightarrow{u^1}$ vektör alanının x_0, x^- ve x^+ olmak üzere üzere üç tane dejenere olmayan singüler noktasının olduğunu ispatlamış oluruz ki burada x_0 bir center noktası, x^- ve x^+ noktaları ise birer saddle noktasıdır.

Teorem 3.2 den, eğer $\overrightarrow{u^0} - \varepsilon\overrightarrow{u^1}$ vektör alnı üç singüler noktaya sahipse $\overrightarrow{u^0} + \varepsilon\overrightarrow{u^1}$ vektör alanı da bir singüler nokaya sahiptir. O halde aşağıdaki denklemin bir tek çözüme sahip olduğunu göstermeliyiz.

$$\alpha x_2 + f(x_1) + x_2 g_1(x) + \varepsilon\lambda_1 x_2 + \varepsilon h_1(x) = 0 \tag{3.18}$$

$$\beta x_1^{2n+1} - x_2 f'(x_1) + x_2^2 g_2(x) + o(|x_1|^{2n+1}) + \varepsilon\lambda_2 x_1 + \varepsilon h_2(x) = 0 \tag{3.19}$$

Kapalı fonksiyon teoremi gereğince (3.12) ve (3.18) den

$$x_2 = \frac{o(|\varepsilon|, |x_1|^{n+1})}{\alpha + \varepsilon\lambda_1} \tag{3.20}$$

eşitliğini elde ederiz. (3.20) ifadesini (3.19) de kullanırsak

$$\beta x_1^{2n+1} + \varepsilon\lambda_2 x_1 - \frac{o(|\varepsilon|, |x_1|^{n+1})}{\alpha - \varepsilon\lambda_1} . f'(x_1) + o(|\varepsilon|, |x_1|^{2n+1}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1(\beta x_1^{2n} + \varepsilon\lambda_2) = 0 \tag{3.21}$$

Burada $\beta, \lambda_2 > 0$ olduğu için, yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için (3.21) denklemi tek bir çözüme sahiptir. Buna göre

$$x_1 = x_0 = 0$$

dır. Bu yüzden $\overrightarrow{u^0} + \varepsilon\overrightarrow{u^1}$ vektör alanı

$$x_0 = \left(0 , \frac{o(|\varepsilon|, |x_1|^{n+1})}{\alpha + \varepsilon\lambda_1} \right)$$

olmak üzere tek bir singüler noktaya sahiptir.

Şimdi yeterince küçük $\varepsilon > 0$ değeri için $\overrightarrow{u^0} + \varepsilon\overrightarrow{u^1}$ vektör alanının singüler noktasının dejenere olmadığını gösterelim. $div\vec{u} = 0$ olduğu için

$$\det D(\overrightarrow{u^0} - \varepsilon\overrightarrow{u^1}) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(\overrightarrow{u_1^0} - \varepsilon\overrightarrow{u_1^1})\right)^2 - \frac{\partial}{\partial x_2}(\overrightarrow{u_1^0} - \varepsilon\overrightarrow{u_1^1}).\frac{\partial}{\partial x_1}(\overrightarrow{u_2^0} - \varepsilon\overrightarrow{u_2^1})$$

$$= -(2n+1)\alpha\beta x_1^{2n} + o(|x_1|^{2n}) - \varepsilon\lambda_2\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \det D(\overrightarrow{u^0} + \varepsilon\overrightarrow{u^1})_{x=x_0} = -\varepsilon\lambda_2\alpha < 0$$

dır. Böylelikle $\overrightarrow{u^0} + \varepsilon\overrightarrow{u^1}$ vektör alanının yeterince küçük $\varepsilon > 0$ değeri için dejenere olmayan bir x_0 singüler noktasının olduğunu gösterdik ki bu nokta bir saddle noktasıdır. Böylelikle teoremi ispat etmiş oluruz.

Bir singüler nokta civarında indeks değeri, $ind(\vec{u}, x_0) = 1$ olan $\vec{u}(x,t)$ nin iç yapı çatallanması aşağıdaki teoremle tanımlanır.

Teorem 3.4. $\vec{u} \in C^2([0,T], R^r(TM))(r \geq 2)$ vektör alanı D3 kabulünü sağlasın. O zaman

(1) $\vec{u}$ vektör alanı (x_0, t_0) noktasında $\vec{u}$ nun yerel yapısında bir çatallanmaya sahiptir. Daha açık olarak $\vec{u}(x,t)$ vektör alanı , t_0 'a yeterinca yakın $t < t_0$(veya $t > t_0$) için x_0 yeterince küçük bir komşuluğunda tek bir singüler noktaya sahiptir ve $\vec{u}(x,t)$, t_0 'a yeterince yakın $t > t_0$ (veya $t < t_0$) için x_0 ın yeterince küçük bir komşuluğunda tam olarak üç singüler noktaya sahiptir.

(2) Eğer $x_0 \in \overset{\circ}{M}$, index değeri $ind(\overrightarrow{u^0}, x_0) = 1$ olan $\overrightarrow{u^0}$ ın tek bir singüler noktası ise, $\vec{u}(x,t)$ vektör alanı $t = t_0$ noktasında $\vec{u}$ nun global yapısında bir çatallanmaya sahiptir.

Teorem 3.5. $\vec{u} \in C^2([0,T], R^r(TM))(r \geq 2)$ vektör alanı D4 kabulünü sağlasın. O zaman x_0 ın yeterince küçük bir komşuluğunda $t < t_0$(veya $t > t_0$) için $\vec{u}(x,t_0)$ vektör alanı (x_0, t_0) noktasından dejenere olmayan tek bir singüler noktaya çatallanır ve bu nokta bir center noktasıdır. x_0 ın yeterince küçük bir komşuluğunda $t > t_0$(veya $t < t_0$) için

$\vec{u}(x,t_0)$ vektör alanı (x_0,t_0) noktasından dejenere olmayan üç singüler noktaya çatallanır ve bu noktalardan ikisi center, diğeri ise bir saddle noktasıdır.

Teorem 3.4' ün ispatı Teorem 3.2'nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 3.5 in ispatı: Kabul D4 ve *Lemma 2.3* den $\vec{u}^0(x)$ vektör alanının $x_0(x=0)$ noktasındaki Taylor açılımını aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\vec{u}^0(x)=\begin{cases}\alpha x_2 + f(x_1) + x_2 g_1(x)\\ \beta x_1^{2n+1} - x_2 f'(x_1) + x_2^2 g_2(x) + o(|x_1|^{2n+1})\end{cases} \tag{3.22}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha.\beta < 0$ ve,

$$\begin{aligned} &f(x_1) = o(|x_1|^{n+1}),\\ &f'(x_1) = o(|x_1|^{n}),\\ &g_i(0) = 0 \;\; i=(1,2)\end{aligned} \tag{3.23}$$

dır. $\vec{u}^1(x_0).e_2 \neq 0$ ve $\vec{u} \in R^r(TM)$ olduğundan $\vec{u}^1(x)$'i aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\vec{u}^1(x)=\begin{cases}\lambda_1 x_2 + h_1(x)\\ \lambda_2 x_1 + h_2(x)\end{cases} \tag{3.24}$$

burada $\lambda_2 \neq 0$, $h_i(x) = O(|x|)(i=1,2)$ dır.

Teorem 3.4 den $\vec{u}^0 \pm \varepsilon\vec{u}^1$ vektör alanlarından biri yeterince küçük $\varepsilon > 0$ değeri için x_0'ın komşuluğunda tek bir singüler noktaya diğeri ise üç tane singüler noktaya sahipti. Kabul edelim ki $\vec{u}^0 - \varepsilon\vec{u}^1$ vektör alanı üç tane singüler noktaya sahip olsun, yani (3.22) da $\beta > 0$ ve (3.24) de $\lambda_2 > 0$ olsun. $\vec{u}^0 - \varepsilon\vec{u}^1$ vektör alanının singüler noktaları

$$\alpha x_2 + f(x_1) + x_2 g_1(x) = \varepsilon\lambda_1 x_2 + \varepsilon h_1(x) \tag{3.25}$$

$$\beta x_1^{2n+1} - x_2 f'(x_1) + x_2^2 g_2(x) + o(|x_1|^{2n+1}) = \varepsilon\lambda_2 x_1 + \varepsilon h_2(x) \tag{3.26}$$

eşitliklerini sağlar. Kapalı fonksiyon teoremi gereğince (3.23) ve (3.25) ten

$$x_2 = \frac{o(|\varepsilon|,|x_1|^{n+1})}{\alpha - \varepsilon\lambda_1} \tag{3.27}$$

eşitliğini elde ederiz. (3.27) ifadesini (3.26) da kullanırsak

$$\beta x_1^{2n+1} - \varepsilon\lambda_2 x_1 - \frac{o(|\varepsilon|,|x_1|^{n+1})}{\alpha - \varepsilon\lambda_1}.f'(x_1) + o(|x_1|^{2n+1}) = 0,$$

$$\Rightarrow\ x_1(\beta x_1^{2n} - \varepsilon\lambda_2 - o(|\varepsilon|,|x_1|^{2n+1}) = 0 \tag{3.28}$$

bulunur. Burada $\beta, \lambda_2 > 0$ dır. Dolayısıyla yeterince küçük $\varepsilon > 0$ değeri için (3.28) denkleminin

$$x_1 = x_0 = 0, \qquad x_1^{\pm}(\varepsilon) = \pm\left[(\beta^{-1}\varepsilon\lambda_2)^{1/2n} + \beta^{-1/2n} o(|\varepsilon|,|x_1|^{(2n+1)/2n})\right]$$

şeklinde üç tane çözümü vardır. Dolayısıyla $\vec{u}^{0} - \varepsilon\vec{u}^{1}$ vektör alanının singüler noktaları aşağıdaki şekildedir.

$$x_0 = \left(0\,,\ \frac{o(|\varepsilon|,|x_1|^{n+1})}{\alpha - \varepsilon\lambda_1}\right)$$

$$x^{-}(\varepsilon) = \left(-(\beta^{-1}\varepsilon\lambda_2)^{1/2n} - \beta^{-1/2n} o(|\varepsilon|,|x_1|^{(2n+1)/2n})\,,\ \frac{o(|\varepsilon|,|x_1|^{n+1})}{\alpha - \varepsilon\lambda_1}\right)$$

$$x^{+}(\varepsilon) = \left((\beta^{-1}\varepsilon\lambda_2)^{1/2n} + \beta^{-1/2n} o(|\varepsilon|,|x_1|^{(2n+1)/2n})\,,\ \frac{o(|\varepsilon|,|x_1|^{n+1})}{\alpha - \varepsilon\lambda_1}\right)$$

Sonuç olarak yeterince küçük $\varepsilon > 0$ değeri için $\overrightarrow{u^0} - \varepsilon\overrightarrow{u^1}$ vektör alnının singüler noktalarının dejenere olmadığını gösterelim. $div\vec{u} = 0$ olduğu için $\overrightarrow{u^0} - \varepsilon\overrightarrow{u^1}$ vektör alanının jakobijen matrisinin determinantı,

$$\det D(\overrightarrow{u^0} - \varepsilon\overrightarrow{u^1}) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(\overrightarrow{u_1^0} - \varepsilon\overrightarrow{u_1^1})\right)^2 - \frac{\partial}{\partial x_2}(\overrightarrow{u_1^0} - \varepsilon\overrightarrow{u_1^1}).\frac{\partial}{\partial x_1}(\overrightarrow{u_2^0} - \varepsilon\overrightarrow{u_2^1})$$

$$= -\alpha\beta(2n+1)x_1^{2n} + \alpha\lambda_2\varepsilon - (f'(x_1))^2 + \alpha x_2 o(|x_1|^{n-1})$$

biçiminde yazılır. Buradan

$$\det D(\overrightarrow{u^0} - \varepsilon\overrightarrow{u^1})_{x=x_0} = \alpha\lambda_2\varepsilon < 0$$

$$\det D(\overrightarrow{u^0} - \varepsilon\overrightarrow{u^1})_{x=x^{\pm}(\varepsilon)} = -\alpha\lambda_2\varepsilon(2n) > 0$$

$$\det D(\overrightarrow{u^0} - \varepsilon\overrightarrow{u^1}) \begin{cases} < 0, & x = x_0 \\ > 0, & x = x^- \\ > 0, & x = x^+ \end{cases}$$

dır. Bu yüzden yeterince küçük $\varepsilon > 0$ değeri için $\overrightarrow{u^0} - \varepsilon\overrightarrow{u^1}$ vektör alanının x_0, x^- ve x^+ olmak üzere üzere üç tane dejenere olmayan singüler noktasının olduğunu ispatlamış oluruz ki burada x_0 bir saddle noktası, x^- ve x^+ noktaları ise birer center noktasıdır.

Teorem 3.4 den, eğer $\overrightarrow{u^0} - \varepsilon\overrightarrow{u^1}$ vektör alanı üç singüler noktaya sahipse $\overrightarrow{u^0} + \varepsilon\overrightarrow{u^1}$ vektör alanı da bir singüler noktaya sahiptir. O halde aşağıdaki denklemin bir tek çözüme sahip olduğunu göstermeliyiz.

$$\alpha x_2 + f(x_1) + x_2 g_1(x) + \varepsilon\lambda_1 x_2 + \varepsilon h_1(x) = 0 \tag{3.29}$$

$$\beta x_1^{2n+1} - x_2 f'(x_1) + x_2^2 g_2(x) + o(|x_1|^{2n+1}) + \varepsilon\lambda_2 x_1 + \varepsilon h_2(x) = 0 \tag{3.30}$$

kapalı fonksiyon teoremi gereğince (3.23) ve (3.29) dan

$$x_2 = \frac{o(|\varepsilon|, |x_1|^{n+1})}{\alpha + \varepsilon\lambda_1} \tag{3.31}$$

eşitliğini elde ederiz. (3.31) ifadesini (3.30) de kullanırsak

$$\beta x_1^{2n+1} + \varepsilon\lambda_2 x_1 - \frac{o(|\varepsilon|, |x_1|^{n+1})}{\alpha - \varepsilon\lambda_1} . f'(x_1) + o(|\varepsilon|, |x_1|^{2n+1}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1(\beta x_1^{2n} + \varepsilon\lambda_2) = 0 \tag{3.32}$$

olur. Burada $\beta, \lambda_2 > 0$ olduğu için, yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için (3.32) denklemi

$$x_1 = x_0 = 0$$

olmak üzere tek bir çözüme sahiptir. Bu yüzden $\overrightarrow{u^0} + \varepsilon\overrightarrow{u^1}$ vektör alanı aşağıda ifade edildiği gibi tek bir singüler noktaya sahiptir.

$$x_0 = \left(0 \, , \frac{o(|\varepsilon|,|x_1|^{n+1})}{\alpha + \varepsilon\lambda_1} \right).$$

Şimdi yeterince küçük $\varepsilon > 0$ değeri için $\overrightarrow{u^0} + \varepsilon\overrightarrow{u^1}$ vektör alanının singüler noktasının dejenere olmadığını gösterelim. $div\vec{u} = 0$ olduğu için

$$\det D(\overrightarrow{u^0} - \varepsilon\overrightarrow{u^1}) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(\overrightarrow{u_1^0} - \varepsilon\overrightarrow{u_1^1}) \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x_2}(\overrightarrow{u_1^0} - \varepsilon\overrightarrow{u_1^1}).\frac{\partial}{\partial x_1}(\overrightarrow{u_2^0} - \varepsilon\overrightarrow{u_2^1})$$

$$= -(2n+1)\alpha\beta x_1^{2n} + o(|x_1|^{2n}) - \varepsilon\lambda_2\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \det D(\vec{u}^0 + \varepsilon\vec{u}^1)_{x=x_0} = -\varepsilon\lambda_2\alpha > 0$$

Böylelikle $\overrightarrow{u^0} + \varepsilon\overrightarrow{u^1}$ vektör alanının yeterince küçük $\varepsilon > 0$ değeri için dejenere olmayan bir x_0 singüler noktasının olduğunu gösterdik ki bu nokta bir center noktasıdır. Dolayısıyla teoremi ispat etmiş oluruz.

KAYNAKLAR

1. Ma, T., Wang, S., Interior structural bifurcation and seperation of 2D incompressible flows, J. Math. Phys., 45, pp. 1762-1776, 2004.
2. Ghil, M., Ma, T., Wang, S., Structural bifurcation of 2-D incompressible flows, Indiana Univ. Math. J. 50, 159-180, 2001.
3. Ghil, M., Ma, T., Wang, S., Structural bifurcation of 2-D non-divergent flows with drichlet boundary conditions: Aplications to boundary-layer seperation, SIAM J. Appl. Math. (submitted).
4. Ma, T., and Wang, S., "Structural classification and stability of incompressible vectorfields" Physica D 171, 107-126, 2002.
5. Hsian, C-H., Liu, J-C., Wang, C., Structural stability and bifurcation for 2-D incompressible flows with symmetry, Methods and applications of Analysis, 15, No. 4, pp. 495-512, December 2008.
6. Ma, T., and Wang, S. Topology of incompressible flows and applications to geophysical fluid Dynamics, Rev.R. Acad. Cien. Exactas Fis. Nat. Ser. A Mat. 96, 447-459, 2002.
7. Newton , P. K., The N-vortex Problem, Vol. 145 of Applied Mathematical Sciences (Springer-Verlag, New York), Analytical techniques, 2001.
8. Dyke, M.V., Album of Fluid Motion. (Parabolic, Stanford, CA), 1982.
9. Wiggins, s., Inroduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer, second edition, School of Mathematics University of Bristol Clifton.
10. Jodan, D.W., Smith, P. Nonlinear Ordinary Differential Equations: Problems and Solitions, Oxford University Pres, New York
11. Ricca, R.L., An Introduction to the Geometry and Topology of Fluid Flows, Physic and Chemistry, Vol. 47
12. Arnold, V., Conditions for nonlinear stability of stationary plane curvilinear flows of an ideal fluid, Dokl. Akad Nauk SSSR 162 (1965), 975-978, 1965.
13. Arnold, V., Khesin, B., Tophological methods in hydrodynamics, Springer-Verlag, New York, 1998.
14. Peixoto, M., Structual stability on two dimensional manifolds, Topology 1, 101-120,1962.
15. Ma, T., Wang, S., Dynamics of incompressible vector fields, Appl. Math. Lett. 12, 39-42, 1999.

16. Robinson, C., Generic properties of coservative systems, Parts I and II, Am. J. Math. 92, 562-603, 897-906, 1970.
17. Smale, S., Differential dynamical systems, Bull. AMS 73, 747-817, 1967.
18. Anasow, D., and Arnold, V., Dynamical Systems I, Springer, New York, 1985.
19. Ghil, M., LIU, J.-G., Wang, C., And Wang, S., Boundary-layer separation and adverse pressure gradient for 2-D viscous incompressible flow, Physica D, pp. 149173, 2004.
20. Broer,H., Quasiperiodic flow near a codimension one singularity of a divergence free vector field in dimension three, In Dynamical systems and turbulance, Warwick 1980 (Coventry, 1979/1980), Lecture notes in Math, Volume 898, pp. 75-89, Springer, Berlin, 1981.
21. Ma, T., Wang, S., Global structure of 2D incompressible flows, Discrete Contin. Dyn. Syst. 7 (2) 431-445, 2001.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı: Deniz BOZKURT
Uyruğu: Türkiye(TC)
Doğum Tarihi ve Yeri: 1 Ekim 1984, Pınarbaşı
Medeni Durumu: Bekar
email: denizcauchy@windowslive.com
Yazışma Adresi: Kiçiköy M. Kayabağlar Caddesi No:28/8 30280
Talas / KAYSERİ

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet
Yüksek Lisans	EÜ Fen Bilimleri Enstitüsü	2008 - 2011
Lisans	EÜ Fen Edebiyat Fakültesi	2004 - 2008
Lise	Fatma Kemal Timuçin A.L., Kayseri	1999 - 2003

YABANCI DİL

İngilizce