T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KÖŞE CİVARINDAKİ AKIŞ MODELLERİ VE Z-ŞEKLİNDEKİ KAVİTİ İÇERİSİNDEKİ GİRDAP OLUŞUMUNA ETKİSİ

Hazırlayan
Ebutalib ÇELİK

Danışman
Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU

Doktora Tezi

Temmuz 2019
KAYSERİ

T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KÖŞE CİVARINDAKİ AKIŞ MODELLERİ VE Z-ŞEKLİNDEKİ KAVİTİ İÇERİSİNDEKİ GİRDAP OLUŞUMUNA ETKİSİ

(Doktora Tezi)

Hazırlayan
Ebutalib ÇELİK

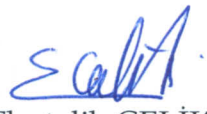
Danışman
Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU

Bu çalışma TÜBİTAK tarafından 114F525 proje numaralı 3001 kodlu proje ile desteklenmiştir.

Temmuz 2019
KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.



Ebutalib ÇELİK

"Köşe Civarındaki Akış Modelleri Ve Z-Şeklindeki Kaviti İçerisindeki Girdap Oluşumuna Etkisi" adlı Doktora tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Hazırlayan
Ebutalib ÇELİK

Danışman
Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU

Matematik ABD Başkanı
Prof. Dr. Hüseyin ALTINDİŞ

Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU danışmanlığında **Ebutalib ÇELİK** tarafından hazırlanan **"Köşe Civarındaki Akış Modelleri Ve Z-Şeklindeki Kaviti İçerisindeki Girdap Oluşumuna Etkisi"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Doktora** tezi olarak kabul edilmiştir.

26../07/2019

JÜRİ :

Danışman : Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU

Üye : Prof. Dr. İlhan ÖZTÜRK

Üye : Prof. Dr. Durmuş DAĞHAN

Üye : Doç. Dr. A. Nihal TUNCER

Üye : Doç. Dr. Şenol KARTAL

ONAY :

Bu tezin kabülü Enstitü Yönetim Kurulunun 30/07/2019 tarih ve 2019/55-28 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

30/07/2019

Prof. Dr. Mehmet AKKURT

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Tez danışmanlığımın yanında her durumda yakın ilgi ve desteğiyle yardımlarını esirgemeyen, çalışmalarımın her safhasında önerileriyle yol gösteren değerli hocam Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU' na teşekkür ederim.

Akademik gelişimime önemli katkıları olan, engin bilgi ve deneyimleri ile beni yönlendiren saygıdeğer hocam Prof. Dr. Fuat GÜRCAN' a, doktora çalışmalarım sırasında tez izleme komitesi üyeliğini üstlenen değerli hocalarım Prof. Dr. İlhan ÖZTÜRK ve Doç. Dr. A. Nihal TUNCER' e teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarım süresince birçok fedakârlık göstererek sabırla beni daima destekleyen hayat arkadaşım Zehra ÇALIŞIR ÇELİK' e, maddi ve manevi desteklerini hissettiğim aileme ve tüm dostlarıma en içten duygularımla teşekkür ederim.

Ebutalib ÇELİK

Temmuz 2019, KAYSERİ

KÖŞE CİVARINDAKİ AKIŞ MODELLERİ VE Z-ŞEKLİNDEKİ KAVİTİ İÇERİSİNDEKİ GİRDAP OLUŞUMUNA ETKİSİ

Ebutalib ÇELİK

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Doktora Tezi, Temmuz 2019
Danışman: Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU

ÖZET

Bu tez dört ana başlıktan oluşmaktadır. İlk bölümde, tez boyunca kullanılan tanım, teorem ve yöntemler verildi. İkinci bölümde, durağan, sıkıştırılamaz, viskoz akış için girinti nokta civarında yerel eğri analizi yapıldı. Bunun için bi-harmonik denklemin ($\nabla^4\psi = 0$) birinci ve ikinci dereceden asimptotik çözümü duvar kesme gerilimi yardımıyla incelendi. Köşe civarında meydana gelen ayırma çizgisi ve ayırma baloncuğunun yapısı ile katsayılar arasında ilişki kuruldu ve farklı katsayı değerlerine göre muhtemel akış yapıları verildi.

Üçüncü bölümde, alt ve üst kapağı aynı yönde hareket eden Z-şeklindeki kavitide meydana gelen akış yapılarını bulmak ve girdap oluşum mekanizmasını incelemek için sınır değer problemi oluşturuldu. Bölge, basit alt bölgelere ayrılarak, her bölgedeki akış fonksiyonu Papkovich-Fadle özfonksiyonu cinsinden yazıldı ve katsayılar, çift dikleştirme yöntemi ile belirlendi. Kavitinin alt kısmının yüksekliği h_1^* ve üst kısmının yüksekliği h_2^* olmak üzere, (h_1^*, h_2^*) kontrol-uzay diyagramı oluşturuldu. Girinti köşe noktası civarında oluşan ayırma baloncuğunun detaylı incelenmesi asimptotik eşleme yöntemi kullanarak yapıldı. Son olarak Reynolds sayısının girdap oluşumu üzerine etkisi araştırıldı.

Dördüncü bölümde, x eksenine göre simetrik akış fonksiyonunun normal formu elde edildi ve çatallanma diyagramı oluşturuldu. Bu çalışmanın bir uygulaması olarak üst kapağı hareketli T-şeklindeki kaviti akış problemi ele alındı. Galerkin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak, kaviti içerisindeki akış yapıları ve girdap sayısının artması için oluşan temel çatallanma serileri elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Z-şeklindeki kaviti, T-şeklindeki kaviti, Asimptotik eşleme, Girintili köşe, Çıkıntılı Köşe.

FLOW PATTERNS NEAR THE CORNER AND ITS EFFECT ON THE FORMATION OF EDDY GENERATION IN THE Z-SHAPED CAVITY

Ebutalib ÇELİK

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
Ph.D. Thesis, July 2019
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ali DELİCEOĞLU

ABSTRACT

This thesis consists of four main chapter. In the first chapter, definitions, theorems and methods used throughout the thesis are given. In the second chapter, for stationary, incompressible, viscous flow, local streamline analysis is performed around the re-entrant corner point. For this purpose, the first and the second order asymptotic solution of the bi-harmonic equation ($\nabla^4\psi = 0$) are examined using wall shear stress. The connection between the separation line or the bubble formed near the corner and the coefficients are established, so possible flow structures are given according to different coefficients values. In the third chapter, the boundary value problem is created to find the flow structures occurring in the Z-shaped cavity with the upper and lower lid moving in the same direction. The region is divided into simple sub-regions and the stream function in each region is written in terms of Papkovich-Fadle eigenfunction, and the coefficients are determined by the bi-orthogonality method. A control-space diagram (h_1^*, h_2^*) is formed. Detailed examination of the separation bubble around the re-entrant corner is performed by using the asymptotic matching method. Finally, the effect of Reynolds number on vortex formation is investigated. In the fourth chapter, a normal form of a stream function which is symmetric according to x is obtained and the bifurcation diagram is formed. As an application of this study, the problem of T-shaped cavity flow with a moving upper-lid is discussed. Using the Galerkin finite element method, the basic bifurcation series for increasing vortex number and the flow structures in the cavity are obtained.

Keywords: Z-shaped cavity, T-shaped cavity, Asymptotic matching, Re-entrant corner, Salient corner.

İÇİNDEKİLER

KÖŞE CİVARINDAKİ AKIŞ MODELLERİ VE Z-ŞEKLİNDEKİ KAVİTİ İÇERİSİNDEKİ GİRDAP OLUŞUMUNA ETKİSİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK SAYFASI i

YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI ii

KABUL VE ONAY iii

TEŞEKKÜR iv

ÖZET v

ABSTRACT vi

İÇİNDEKİLER vii

TABLOLAR LİSTESİ ix

ŞEKİLLER LİSTESİ x

GİRİŞ 1

1. BÖLÜM
GENEL BİLGİ VE KAVRAMLAR

1.1. Stokes Denkleminin Ayrılabilir Çözümü **6**

1.2. Köşe Civarındaki Akış Yapısı: Moffatt Girdapları **7**

1.3. Çıkıntılı Köşe Civarında Akış Yapısı: Sonsuz Girdap **9**

1.4. Tekil Noktalarda Eşleştirme Yöntemi **10**

1.4.1. Sayısal yöntemin uygulanabilirliği ve sonuçların diğer yöntemlerle karşılaştırılması **13**

1.5. Galerkin Sonlu Elemanlar Yöntemi **16**

1.5.1. Stokes Akış İçin Galerkin Sonlu Elemanlar Yöntemi **18**

2. BÖLÜM
GİRİNTİLİ NOKTA CİVARINDA AKIŞ YAPISI

2.1. Birinci Dereceden Asimptotik Çözümün İncelenmesi 22

2.2. İkinci Dereceden Asimptotik Çözümün İncelenmesi 25

3. BÖLÜM
Z-ŞEKLİNDEKİ KAVİTİ İÇİNDEKİ GİRDAP OLUŞUM MEKANiZMASI

3.1. Z-Şeklindeki Kaviti İçin Akış Fonksiyonları 28

3.2. Sınır Şartları ve Katsayıların Elde Edilmesi 31

3.3. $S = 1$ İçin Z-Şeklindeki Kaviti İçerisindeki Akış Yapıları 36

3.4. Köşe Civarında Detaylı Çalışma 44

3.5. Reynolds Sayısının Akış Yapılarına Etkisi 49

4. BÖLÜM
İKİ BOYUTLU SIKIŞTIRILAMAZ SİMETRİK AKIŞ İÇİN YAPISAL ÇATALLANMALAR VE UYGULAMASI

4.1. Basit Dejenere Kritik Noktaların Çatallanmaları 54

4.1.1. $N = 6$ için çatallanma diyagramı 56

4.2. T-Şeklindeki Kaviti İçindeki Girdap Oluşum Mekanizması 58

4.3. Akış Yapıları ve Girdap Oluşum Senaryosu 58

4.4. Köşe Civarında Detaylı Çalışma 64

KAYNAKLAR 68

ÖZGEÇMİŞ 73

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 1.1. $\lambda_{a,n}$ ve $\lambda_{s,n}$ nin bazı açılardaki ilk üç değeri. 9

Tablo 1.2. Çıkıntılı köşe noktası civarında ve iç noktada elde edilen çözümlerin kıyaslanması. 14

Tablo 1.3. $Re = 1000$ için sol köşe girdabın merkezinin konumu ve akış fonksiyon değerlerinin kıyaslanması. 16

Tablo 3.1. Z-Şeklindeki kavitideki köşe civarında meydana gelen ayırma baloncuğunun duvar üzerindeki hareketi. 50

Tablo 3.2. Farklı Re sayıları için kaviti içerisinde ikinci girdabın oluştuğu h_1^* ve h_2^* değerleri. 51

Tablo 4.1. Sayısal yöntem ile elde edilen hız vektör bileşenlerinin değerleri. 63

Tablo 4.2. T-Şeklindeki kavitinin köşe noktası civarında oluşan ayırma çizgisinin hareketi. 67

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. Köşe açısı 2α olan duvar ile çevrelenmiş köşedeki akış. (a) Antisimetrik akış, (b) Simetrik akış. 8

Şekil 1.2. Köşe noktası civarında eşleme noktalarının gösterimi. 11

Şekil 1.3. (a) Analitik çözüm ile elde edilen tek kapağı hareketli $h = 1.75$ için kaviti içindeki akış çizgileri. (b) ve (d) kavitinin köşe noktasına iki defa yakınlaşmış hali, (c) ve (e) eşleştirme ile elde edilen akış çizgileri. 15

Şekil 1.4. Sayısal yöntem ile $h = 1$ ve $Re = 100$ için elde edilen seviye eğrileri. Sol sütun (b)-(d) eşleme yapılmamış hali. Sağ sütun (c)-(e) eşleme ile iyileştirilmiş hali. 17

Şekil 1.5. Dördüncü dereceden problemler için bikubik dikdörtgensel eleman. 19

Şekil 1.6. (a) Lagrange interpolasyon yaklaşımı, (b) Hermite interpolasyon yaklaşımı ($p \leqslant N$). 21

Şekil 2.1. Asimptotik çözümün ilk terimlerine göre girintili köşe noktası civarında ayırma çizgi topolojisi (a) Ayırma çizgisi yok, (b) $C_1 > 0$ için ayırma çizgisi üst duvar üzerinde, (c) $C_1 = 0$ için ayırma çizgisi tam köşe noktası üzerinde, (d) $C_1 < 0$ için ayırma çizgisi alt duvar üzerinde. 23

Şekil 2.2. $\theta = 45^\circ$ döndürülmesiyle oluşan hız vektör bileşenleri. 24

Şekil 2.3. (a) $A_1 = -0.05, A_2 = 1 + 3i$, (b) $A_1 = -0.1, A_2 = 5 + i$, (c)$A_1 = 0, A_2 = 5 + i$, (d) $A_1 = 0.03, A_2 = 4 + i$, (e) $A_1 = 0.08, A_2 = 4 + i$, (e) $A_1 = 1, A_2 = 3 + i$. 27

Şekil 2.4. (a) $A_1 = 0.05, A_2 = 3 + i, B_1 = -0.2, B_2 = 3 + i$,(b) $A_1 = 0.05, A_2 = 3 + i, B_1 = -0.7, B_2 = 3 + i$, (c)$A_1 = 0.05, A_2 = 3 + i, B_1 = 0, B_2 = 0$, (d) $A_1 = 0.05, A_2 = 3+i, B_1 = -0.5, B_2 = 3+i$, (e) $A_1 = 0.05, A_2 = 3 + i, B_1 = -0.2, B_2 = 3 + i$. 27

Şekil 2.5. (a) $A_1 = -0.05, A_2 = 5 + i, B_1 = -0.3, B_2 = 3 + i$,(b) $A_1 = -0.05, A_2 = 5 + i, B_1 = -0.1, B_2 = 3 + 2i$, (c)$A_1 = -0.05, A_2 = 6 + i, B_1 = 0, B_2 = 0$, (d) $A_1 = -0.05, A_2 = 5 + i, B_1 = 0.2, B_2 = 3 + i$, (e) $A_1 = -0.05, A_2 = 4 + i, B_1 = 0.2, B_2 = 3 + i$. 27

Şekil 3.1. Z-Şeklindeki kaviti için sınır değer problemi. 28

Şekil 3.2. $-1.8 \leq h_1^* \leq -1.4$ ve $1.4 \leq h_2^* \leq 1.8$ aralığında Z-şeklindeki kaviti için çatallanma eğrileri. (h_1^*, h_2^*) parametre uzayı 30 alt kaviti 30 üst kaviti olmak üzere 60 bölgeye bölünmüştür. Her bir bölge numarası Şekil 3.4 ve Şekil 3.5' de verilen akış yapılarıyla aynıdır. Topolojik olarak aynı olan bölge numaralandırmasında eşitlik kullanılmıştır. 38

Şekil 3.3. Z-Şeklindeki kaviti içerisinde alt kaviti ve üst kavitide meydana gelen topolojik olarak birbirine eş akış yapılarının gösterimi. 39

Şekil 3.4. Z-Şeklindeki kaviti içerisinde elde edilen akış yapıları. (1) $h_1^* = -1.4, h_2^* = 1.5$, (2) $h_1^* = -1.47, h_2^* = 1.59$, (3) $h_1^* = -1.47, h_2^* = 1.65$, (4) $h_1^* = -1.54, h_2^* = 1.71$, (5) $h_1^* = -1.53, h_2^* = 1.785$, (6) $h_1^* = -1.475, h_2^* = 1.5$, (7) $h_1^* = -1.475, h_2^* = 1.5$, (8) $h_1^* = -1.47, h_2 = 1.512$, (9) $h_1^* = -1.467, h_2^* = 1.517$, (10) $h_1^* = -1.49, h_2^* = 1.5$, (11) $h_1^* = -1.5, h_2^* = 1.512$, (12) $h_1^* = -1.5, h_2^* = 1.525$. 40

Şekil 3.5. Z-Şeklindeki kaviti içerisinde elde edilen akış yapıları (devam): (13) $h_1^* = -1.51, h_2^* = 1.54$, (14) $h_1^* = -1.512, h_2^* = 1.514$, (15) $h_1^* = -1.545, h_2^* = 1.555$, (16) $h_1^* = -1.545, h_2^* = 1.57$, (17) $h_1^* = -1.52, h_2^* = 1.552$, (18) $h_1^* = -1.523, h_2^* = 1.562$, (19) $h_1^* = -1.53, h_2^* = 1.57$, (20) $h_1^* = -1.57, h_2^* = 1.584$, (21) $h_1^* = -1.545, h_2^* = 1.607$, (22) $h_1^* = -1.514, h_2^* = 1.644$, (23) $h_1^* = -1.578, h_2^* = 1.587$, (24) $h_1^* = -1.562, h_2^* = 1.612$. 41

Şekil 3.6. Z-Şeklindeki kaviti içerisinde elde edilen akış yapıları (devam): (25) $h_1^* = -1.536, h_2^* = 1.639$, (26) $h_1^* = -1.525, h_2^* = 1.65$, (27) $h_1^* = -1.595, h_2^* = 1.614$, (28) $h_1^* = -1.67, h_2^* = 1.715$, (29) $h_1^* = -1.69, h_2^* = 1.775$, (30) $h_1^* = -1.765, h_2^* = 1.791$. 42

Şekil 3.7. Kaviti içerisinde ikinci girdap için meydana gelen yapısal dönüşüm serisi (a) üst kaviti için, (b) alt kaviti için. 43

Şekil 3.8. Kaviti içerisinde ikinci girdap için meydana gelen yapısal dönüşüm serisi (devamı). 45

Şekil 3.9. Kavitinin üst bölgesinde ikinci girdap oluşması için gerekli yapısal dönüşümlerin tamamı. 46

Şekil 3.10. Şekil 3.2' de ayırma baloncuğu oluşan bölgenin büyütülmüş hali. 47

Şekil 3.11. Girintili köşe noktası yakınlarında meydana gelen ayırma baloncuğunun şematik gösterimi. 48

Şekil 3.12. Köşe noktası civarında meydana gelen ayırma baloncuğunun iç noktadaki diğer akış yapıları ile etkileşimi. 48

Şekil 3.13. Köşe noktası civarında meydana gelen ayırma baloncuğunun iç noktadaki diğer akış yapıları ile etkileşimi (devamı). 49

Şekil 3.14. $Re = 50$ için Z-şeklindeki kavitinin (h_1^*, h_2^*) kontrol uzay diyagramı. Bölge numaraları Şekil 3.2' dekiler ile aynı olup $Re = 0$ da görülmeyen yapılar G-i, i=1,...,9 ile gösterilmiştir. . . 52

Şekil 3.15. Şekil 3.2' de oluşmayan ancak $Re = 50$ için gözlenen akış yapılarının gösterimi. Akış yapılarının numaraları Şekil 3.14' deki bölgeleri temsil etmektedir. 53

Şekil 4.1. Dinamik sistemler kullanılarak elde edilen çatallanma diyagramı. 57

Şekil 4.2. Üst kapağı hareketli T-şeklindeki kaviti için sınır değer problemi. 58

Şekil 4.3. T-Şeklindeki kaviti için $-3.5 < h_1 < -0.2$ ve $0.2 < h_2 < 10.5$ olmak üzere (h_1, h_2) kontrol uzay diyagramı. 59

Şekil 4.4. ψ akış fonksiyonunun derecesi 6 olan normal formu için dinamik sistemler ile elde edilen akış yapılarının T-şeklindeki kaviti içerisinde gösterimi. 60

Şekil 4.5. Kritik nokta civarında v hız vektör bileşeninin işaret değişimi. . 60

Şekil 4.6. Şekil 4.7-(5) akış yapısının detaylı incelenmesi. 60

Şekil 4.7. T-Şeklindeki kaviti içerisinde elde edilen akış yapıları: (1) $h_1 = -0.29, h_2 = 0.3$, (2) $h_1 = -1.75, h_2 = 0.35$, (3) $h_1 = -3.1, h_2 = 0.35$, (4) $h_1 = -3.4, h_2 = 0.35$, (5) $h_1 = -0.205, h_2 = 0.42$, (6) $h_1 = -1.3, h_2 = 0.7$, (7) $h_1 = -2.64, h_2 = 0.7$, (8) $h_1 = -3.3, h_2 = 0.7$, (9) $h_1 = -0.6, h_2 = 5.45$, (10) $h_1 = -1.1, h_2 = 4.95$, (11) $h_1 = -2.6, h_2 = 3.45$, (12) $h_1 = -3.4, h_2 = 9.3$, (13) $h_1 = -3.47, h_2 = 9.5$, (14) $h_1 = -0.2, h_2 = 9.605$. 61

Şekil 4.8. T-Şeklindeki kaviti içerisinde elde edilen akış yapıları (devam): (15) $h_1 = -0.23, h_2 = 9.7$, (16) $h_1 = -0.28, h_2 = 9.75$, (17) $h_1 = -1.5, h_2 = 9.9$, (18) $h_1 = -2.57, h_2 = 9.87$, (19) $h_1 = -3.3, h_2 = 9.9$, (20) $h_1 = -0.23, h_2 = 10.1$, (21) $h_1 = -1.2, h_2 = 10.4$, (22) $h_1 = -1.7, h_2 = 10.4$, (23) $h_1 = -2.8, h_2 = 10.4$. 62

Şekil 4.9. T-Şeklindeki kaviti içersinde ikinci girdap oluşumu için yapısal dönüşüm serisi 65

Şekil 4.10. T-Şeklindeki kaviti içersinde ikinci girdap oluşumu için yapısal dönüşüm serisi (devam) 66

GİRİŞ

Girintili ve çıkıntılı köşe içeren akış problemleri üzerine birçok çalışma vardır. Kaviti akış problemleri, genişleyen kanal problemleri ve kanat kenarındaki akış problemleri bu çalışmalara örnektir. Analitik çözümü mevcut olan Stokes akış için köşeye yakın yerlerde sınırdaki ani değişim akış fonksiyonunda tekilliğe sebep olmaktadır. Bu tekillik, köşe civarında akış çizgilerinde bozulmalara neden olmaktadır. Tekil noktalarda, akış fonksiyonunun kesilmiş (truncated) seri çözümleri doğru sonuca ulaşabilmek için daha fazla terime ihtiyaç duyar. Benzer şekilde hem Stokes hem de Navier-Stokes denklemlerinin çözümü için kullanılan sayısal yöntemler, sınırdaki bu ani değişimden dolayı sınır şartlardaki sürekliliği sağlayamamaktadır. Daha doğru sonuca ulaşmak için ya ızgara oranı (grid size) ya da element sayısı arttırılır. Her iki durumda da çözülecek denklem sisteminin boyutu artmaktadır. Büyük boyutlu denklem sistemlerinin çözümü hem zaman açısından ekonomik değildir, hem de kesme hatasına neden olmaktadır. Bu yüzden yapılan çalışmalar daha az nokta veya element (daha az zaman) ile daha iyi sonuç elde etmek üzerinedir.

Phillips [1] köşe civarında Stokes akış için eşleştirilmiş özfonskiyonu kullandı. İlk olarak, akış fonksiyonunu Papkovich-Fadle öz fonksiyonları cinsinden yazmak için çalıştığı bölgeyi basit dikdörtgensel bölgeye ayırdı. Sonra, bölgeler arası sürekliliği sağlatarak serinin katsayılarını hesapladı. Elde ettiği çözümleri eşleştirilmiş özfonksiyon yönteminde çıkıntılı ve girintili nokta civarında Moffatt' ın asimptotik çözümlerindeki katsayıları belirlemek için kullandı.

Driesen vd. [2] kısmen kapalı bölge içindeki düşük sayılı Reynolds sayılı akışı inceledi. Her bir bölge için akış fonksiyonlarını oluşturduktan sonra çift dikleştirme yöntemi uygulayarak sonlu terimli serinin katsayılarını elde etti. Daha sonra girintili ve çıkıntılı köşelere yakın seçtiği noktalarda seri çözümlerin

doğruluğunu araştırdı ve bu noktalardaki çözümlere iki defa Richardson's interpolasyon yöntemi uygulayarak daha doğru çözümler elde etti.

Hawa ve Rusak [3] sayısal-asimptotik çözüm eşleme yöntemi kullanarak keskin dik açılı köşe (sharp right-angle expansion corner) civarında viskoz akışın yerel (local) davranışını inceledi. Moffatt' ın asimptotik çözümünün ilk iki terimini (simetrik ve asimetrik fonksiyonların ilk terimleri), Navier-Stokes denklemi için zamana bağlı sonlu farklar yöntemi ile eşledi. Sayısal yöntem için daha az iyileştirme (refiniments) yaparak daha iyi sonuçlar elde ettiğini gösterdi. Asimptotik çözümün zamana bağlı ilk iki katsayıları D_{α_1} and D_{α_2} olmak üzere görüntü oranının ve Reynolds sayısının katsayılara etkisini araştırdı.

Foucard ve Franck [4], Moes vd. [5] tarafından geliştirilen ve Moffatt' ın asimptotik çözümünün integrasyonuna dayanan genişletilmiş sonlu elemanlar yöntemini (X-FEM) kullanarak keskin köşe civarında (çıkıntılı) Stokes akış için yerel akış analizi yaptılar. Bunun için zenginleştirilmiş şekil fonksiyonu geliştirdiler ve bunları Navier-Stokes denklemini çözmek için genişletilmiş sonlu elemanlar yöntemine entegre ettiler. Bu zenginleştirilmiş uzaydaki sonlu elemanlar yöntemi ile çatlak ucu (crack tip) civarındaki yerel akış analizini ızgarada iyileştirmeye gerek kalmadan incelediler ve köşe civarında daha iyi sonuçlar elde ettiler.

Bu çalışmalara ilave olarak, Çelik [45] tezinde asimptotik çözümün katsayılarını bulmak için eşleştirme yöntemini kullandı. Bu çalışmanın devamı niteliğinde, bu tez döneminde hem girinti noktası hemde çıkıntı noktası civarında yerel akış analizi yapmak için bu eşleştirme yöntemi uygulandı. Bu eşleştirme yönteminin en önemli özelliği uygulanabilirliğinin kolay olmasıdır. Öyle ki yöntem Stokes denkleminin analitik çözümlerine uygulanabildiği gibi, lineer olmayan Navier-Stokes denklemine de uygulanabilmektedir. Ayrıca asimptotik çözümün birinci ve ikinci dereceden terimleri duvar kesme gerilimi yardımıyla incelendi ve duvar üzerindeki yansıma noktaları (inflection point) elde edildi. Duvar üzerindeki yansıma noktaları ile çözümün katsayıları arasındaki ilişki kurularak köşe civarında meydana gelen akış yapıları topolojik olarak incelendi. Teorik

olarak elde edilen bu veriler, eşleştirme yöntemi ile farklı kaviti problemlerinden elde edilen çözümler ile desteklendi.

Kapalı bölge üzerinde Stokes denkleminin çözümü ve bu bölge içindeki akış yapıları akışkanlar dinamiğinde her zaman ilgi çekici bir çalışma alanı olmuştur. Geometrik şekillerin basitliği ve ilgili sınır değer probleminin kolayca oluşturulması nedeniyle bu alanda oldukça fazla çalışmalar yapılmıştır [7–14]. Bunun yanında akışkanlar dinamiğinde akış çizgilerinin nitel özelliklerinin araştırıldığı teorik çalışmaların bir uygulaması olarak kaviti problemleri ele alındı [15–18].

Literatürde hem nümerik hem de teorik olarak dikdörtgensel kaviti akış üzerine birçok çalışma bulunmaktadır [2, 19–23]. Gürcan [24] hem tek kapak sürgülü hem de çift kapak sürgülü dikdörtgensel kaviti akış problemini araştırdı ve kaviti içerisindeki girdap oluşum mekanizmasını elde etti. Bunun için, çalışmalarında kritik nokta civarında seriye açılmış akış fonksiyonunun analitik çözümünü kullandı. Görüntü oranı A ve hız oranı S olmak üzere (S, A) kontrol uzay diyagramını oluşturdu ve A görüntü oranının arttıkça kavitideki girdap sayısının nasıl değiştiğini inceledi.

Kaviti akış problemlerinde yaygın olarak kullanılan karesel ve dikdörtgensel bölgelerin yanı sıra farklı kapalı bölgeler üzerinde de çalışmalar yapılmaktadır. Mcquain vd. [25] kaviti geometrisinin akış yapısı üzerinde etkisini araştırmak için karesel, ikizkenar yamuk ve üçgen içindeki durağan, viskoz akışı incelemiştir. Gaskell vd. [26] döner ortak eksenel silindirler arasında yarı dolu halka içerisindeki Stokes akışı düşündü ve kaviti içerisindeki farklı akış yapılarını elde etti. Ribbens vd. [27], Gaskell vd. [28], Ertürk ve Gökçöl [12] makalelerinde üçgensel kaviti içindeki durağan, sıkıştırılamaz akışı sayısal yöntemlerle incelediler. Gürcan ve Bilgil [29], farklı kapak hız oranı için A görüntü oranının azalmasıyla sektörel kaviti içerisindeki girdap oluşum mekanizmasını analiz ettiler. $A(1.6, 1.65)$ ve $S[-1, 0]$ kontrol parametreleri olmak üzere kritik noktalardaki yapısal değişimleri temsil eden eğrilerden oluşan (S, A) parametre uzay diyagramını oluşturdular. Son olarak Bilgil ve Gürcan [30] Reynolds

sayısının aynı bölge üzerindeki akış çatallanmalarına ve girdap oluşumuna etkisini araştırdılar.

Son zamanlarda farklı geometri üzerinde akış problemi olarak, Deliceoğlu ve Aydın [31] kapakları zıt yönde hareket eden L-şeklindeki kaviti akış problemini sayısal yöntem kullanarak ele aldılar. Akışı yöneten Stokes ve Navier-Stokes denklemlerinin çözümlerini Galerkin sonlu elemanlar yöntemi kullanarak buldular ve L-şeklindeki kavitinin yükseklik parametreleri h_1 ve h_2 olmak üzere, (h_1,h_2) kontrol uzay diyagramını elde ettiler. Bu diyagramın Reynolds sayısı 500 iken nasıl değiştiğini ortaya koydular. Ayrıca onlar, çalışmasında aynı bölge üzerinde durağan, viskoz ve tek kapağı hareketli kaviti için de Stokes denkleminin çözümlerini hem analitik hem de sayısal olarak elde ettiler. h_1 ve h_2 yükseliklerine bağlı olarak girdap oluşum mekanizmasını oluşturdular [14].

Bu tez çalışmasında yukarıdaki kavitilerden farklı olarak Z ve T-şeklinde kaviti içerisindeki durağan, sıkıştıralamaz akış incelendi. İlk olarak alt ve üst kapakları aynı yönde hareket eden Z-şeklindeki kaviti içerisindeki akış yapıları ve çatallanma eğrileri oluşturuldu. Bunun için Z-şeklindeki kaviti daha basit alt bölgelere ayrıldı ve her bir bölge içerisindeki akış fonksiyonu Papkovich-Fadle öz fonksiyonları cinsinden yazıldı. Kaviti içerisindeki akışın sürekliliğinin sağlanması için bölgeler arası sınırda süreklilik şartları ile kaviti sınır şartları uygulandıktan sonra çift dikleştirme yöntemi uygulandı ve kesilmiş serinin bilinmeyen katsayıları elde edildi. Alt kaviti yüksekliği $2h_1 = h_1^*$ ve üst kaviti yüksekliği $2h_2 = h_2^*$ olmak üzere (h_1^*, h_2^*) çatallanma diyagramı oluşturuldu ve çeşitli girdap oluşum senaryoları elde edildi. Köşe civarında yerel akış analizi yapmak için eşleştirme yöntemi uygulandı ve çıkıntılı nokta civarında meydana gelen ayırma baloncuğunun duvar üzerindeki hareketi ve girdap oluşum mekanizmasında diğer yapılarla ile olan etkileşimi ortaya kondu. Son olarak Z-şeklindeki kaviti içerisindeki girdap oluşumuna Reynolds sayısının etkisinin araştırılması için Navier-Stokes denklemi sonlu elemanlar yöntemi ile çözüldü ve $Re = 50$ için çatallanma diyagramı yeniden elde edildi. Daha önce görülmeyen farklı akış yapıları ortaya kondu. h_1^* sabit iken farklı Reynolds sayıları için ikinci girdap oluşumunun izlendiği h_2^* değerleri elde edildi ve

bu değerlerin Reynolds sayısı artar iken azalması Reynolds sayısının girdap oluşumunu hızlandırdığı ortaya koyuldu.

Son bölümde dinamik sistemler yardımıyla iki boyutlu sıkıştırılamaz simetrik akış için akış fonksiyonunun normal formu elde edildi. $N = 6$ için akış fonksiyonunun çatallanma diyagramı oluşturuldu. Bu teorik çalışmanın bir uygulaması olarak üst kapağı hareketli, x eksenine göre simetrik iki çıkıntı noktası içeren T-şeklindeki kaviti için sınır değer problemi oluşturuldu ve biharmonik denklem ($\nabla^4\psi = 0$) Galerkin sonlu elemanlar yöntemi ile çözüldü. (h_1, h_2) paramatre uzayında kaviti yüksekliğinin değişimine bağlı olarak meydana gelen akış yapılarındaki değişimler elde edilerek normal form teorisindekine benzer çatallanma diyagramı oluşturuldu. Köşe noktası civarında oluşan ayırma çizgisinin hareketini, katsayılara bağlı olarak elde etmek için eşleştirme yöntemi kullanıldı.

1. BÖLÜM

GENEL BİLGİ VE KAVRAMLAR

1.1. Stokes Denkleminin Ayrılabilir Çözümü

Girintili veya çıkıntılı köşe noktası civarında Stokes denkleminin kutupsal koordinat düzleminde çözümleri kartezyen koordinat sistemindeki çözümüne göre daha kullanışlıdır. Kutupsal koordinatlarda biharmonik (Stokes) denklemi,

$$\nabla^4\psi(r,\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)^2 \psi(r,\theta) = 0, \tag{1.1}$$

dir. Burada ψ akış fonksiyonudur. Akış fonksiyonuna bağlı olarak hız bileşenleri $u_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$ ve $u_\theta = \frac{\partial\psi}{\partial r}$ dır. (1.1) denklemi değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözülsün. Çözümün $r^\lambda f(\theta)$ tipinde olduğu kabul edilsin. O halde $r^\lambda f(\theta)$ nin gerekli türevleri alınıp (1.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$r^{(\lambda-4)}\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + \lambda^2\right)\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + (\lambda-2)^2\right) f(\theta) = 0, \tag{1.2}$$

elde edilir. Üstel fonsiyon her zaman pozitif olacağından

$$\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + \lambda^2\right)\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + (\lambda-2)^2\right) f(\theta) = 0, \tag{1.3}$$

diferansiyel denklemi bulunur. Böylece (1.1) kısmi türevli diferansiyel denklemi (1.3) adi türevli diferansiyel denklemine indirgenir. (1.3) diferansiyel denkleminin karakteristik denklemi

$$(r^2+\lambda^2)(r^2+(\lambda-2)^2) = 0,$$

dir. Burada kökler $r_{1,2} = \pm i\lambda$ ve $r_{3,4} = \pm i(\lambda-2)$ bulunur ki $f(\theta) = e^{i\lambda\theta}$ ve $f(\theta) = e^{i(\lambda-2)\theta}$ dır. O halde köklerin 3 farklı durumuna göre (1.1) denkleminin çözümü aşağıdaki gibi listelenebilir [32]:

(i) Eğer $\lambda = 0$ ise

$$\psi(r,\theta) = A + B\theta + C\cos(2\theta) + D\sin(2\theta),$$

(ii) Eğer $\lambda = 1$ ise

$$\psi(r,\theta) = r(\cos\theta(A + C\theta) + \sin\theta(B + D\theta)),$$

(iii) Eğer $\lambda = 2$ ise

$$\psi(r,\theta) = r^2(A + B\theta + C\cos(2\theta) + D\sin(2\theta)),$$

(iv) Eğer $\lambda \neq 0, 1, 2$ ise

$$\psi(r,\theta) = r^\lambda(A\cos(\lambda\theta) + B\sin(\lambda\theta) + C\cos((\lambda-2)\theta) + D\sin((\lambda-2)\theta)),$$

dir. Bu durumda Stokes denkleminin çözümü $\psi(r,\theta) = r^\lambda f(\theta)$ ifadesinde λ nın durumuna göre belirlenecektir.

1.2. Köşe Civarındaki Akış Yapısı: Moffatt Girdapları

$\theta = \pm\alpha$ da duvar ile çevrelenmiş 2α açılı köşeye yakın yerdeki akışı ele alalım (Şekil (1.1)). (1.1) biharmonik denklemi lineer olduğundan çalışılacak bölgeyi θ ya göre simetrik ve anti-simetrik olarak düşünmek uygundur. Bölüm 1.1 belirlenen akış fonksiyonunun anti-simetrik terimleri

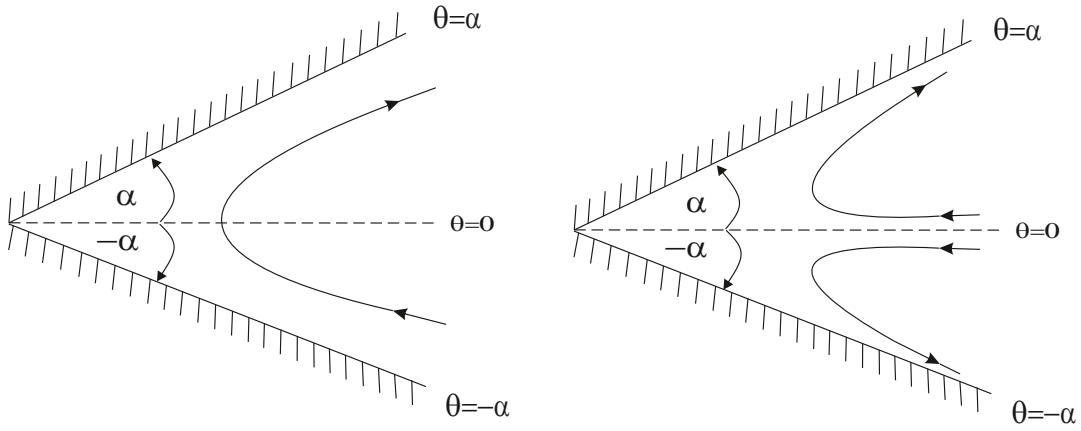
$$\psi(r,\theta) = r^{\lambda_a}(A\cos(\lambda_a\theta) + C\cos((\lambda_a-2)\theta)).$$

dır. $\theta = \pm\alpha'$ da duvar olduğundan $u_r(\pm\alpha) = u_\theta(\pm\alpha) = 0$ olur ki bu da $f_a(\pm\alpha) = f_a'(\pm\alpha) = 0'$ dır. Sınır koşulları akış fonksiyonuna uygulanırsa;

$$\begin{aligned} A\cos(\lambda_a\alpha) + C\cos((\lambda_a-2)\alpha) &= 0, \\ A\lambda_a\sin(\lambda_a\alpha) + C(\lambda_a-2)\sin((\lambda_a-2)\alpha) &= 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

elde edilir. (1.4) denklem sistemi matris formunda

$$\begin{bmatrix} \cos(\lambda_a\alpha) & \cos((\lambda_a-2)\alpha) \\ \lambda_a\sin(\lambda_a\alpha) & (\lambda_a-2)\sin((\lambda_a-2)\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$



Şekil 1.1. Köşe açısı 2α olan duvar ile çevrelenmiş köşedeki akış. (a) Antisimetrik akış, (b) Simetrik akış.

yazıldığında, (1.5) denklem sisteminin aşikar çözümünden farklı çözümlerin olabilmesi için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmak zorundadır. Yani;

$$(\lambda_a - 2)\cos(\lambda_a\alpha)\sin((\lambda_a - 2)\alpha) - \lambda_a \sin(\lambda_a\alpha)\cos((\lambda_a - 2)\alpha) = 0, \tag{1.6}$$

olmalıdır. $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$ eşitliği kullanılırsa (1.6) denklemi

$$(\lambda_a - 1)\sin(2\alpha) + \sin(2\alpha(\lambda_a - 1)) = 0, \tag{1.7}$$

dır. Bu denklemin kökleri anti-simetrik akış için akış fonksiyonunun öz değerleridir. $f_a(\pm\alpha) = 0$ sınır şartı yerine yazılırsa;

$$f_a(\theta) = A\cos(\lambda_a\alpha) + C\cos((\lambda_a - 2)\alpha) = 0,$$

dir. Buradan $A = \frac{-C\cos((\lambda_a-2)\alpha)}{\cos(\lambda_a\alpha)}$ ifadesini tekrar $f_a(\theta)$ da yerine koyulursa

$$f_a(\theta) = \frac{-C}{\cos(\lambda_a\alpha)}\left[\cos((\lambda_a - 2)\alpha)\cos(\lambda_a\theta) - \cos(\lambda_a\alpha)\cos((\lambda_a - 2)\theta)\right), \tag{1.8}$$

elde edilir. Sabitlerin çarpımının sabit olacağı düşünüldüğünde (1.8) eşitliği

$$f_a(\theta) = (\cos((\lambda_a - 2)\alpha)\cos(\lambda_a\theta) - \cos(\lambda_a\alpha)\cos((\lambda_a - 2)\theta)), \tag{1.9}$$

olur. Benzer işlemler simetrik akış için yapıldığında özfonksiyon aşağıdaki gibi elde edilir;

$$f_s(\theta) = (\sin((\lambda_s - 2)\alpha)\sin(\lambda_s\theta) - \sin(\lambda_s\alpha)\sin((\lambda_s - 2)\theta)). \tag{1.10}$$

Buradaki λ_s özdeğerleri

$$(\lambda - 1)\sin(2\alpha) - \sin(2\alpha(\lambda - 1)) = 0, \tag{1.11}$$

denkleminin kökleridir. Anti-simetrik ve simetrik akış için elde edilen çözümlerin üst üste bindirilmesiyle (süperposition) köşeye yakın yerler için akış fonksiyonu

$$\psi(r,\theta) = \Re \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n r^{\lambda_{a,n}} f_{\lambda_{a,n}}(\theta) + B_n r^{\lambda_{a,n}} f_{\lambda_{a,n}}(\theta) \right], \tag{1.12}$$

olarak yazılır. Burada A_n ve B_n hesaplanması gereken karmaşık(kompleks) katsayılardır. Bazı açılar için $\lambda_{a,n}$ ve $\lambda_{s,n}$ nin ilk üç değeri Tablo 1.1′ da listelendi.

Tablo 1.1. $\lambda_{a,n}$ ve $\lambda_{s,n}$ nin bazı açılardaki ilk üç değeri.

n	λ_a	λ_s
$\alpha = 30$		
n=1	5.0593289+1.9520498i	8.1819580+2.4556728i
n=2	11.245726+2.7779630i	14.286015+3.0171363i
n=3	17.314163+3.2077889i	20.335105+3.3664567i
$\alpha = 45$		
n=1	3.7395932+1.1190244i	5.8082506+1.4639280i
n=2	7.8451349+1.6816346i	9.8688257+1.8423839i
n=3	11.885552+1.9701994i	13.898090+2.0764157i
$\alpha = 135$		
n=1	1.5444837	1.9085291
n=2	2.6292573+0.2312505i	3.3013270+0.3158367i
n=3	3.9718437+0.3739312i	4.6414200+0.4187867i

1.3. Çıkıntılı Köşe Civarında Akış Yapısı: Sonsuz Girdap

Moffatt yeteri kadar köşeye yakın yerlerde (1.12) akış fonksiyonunu ilk teriminin baskın olacağını ve akışı yöneteceğini ifade etti ve yaklaşık olarak $2\alpha \leqslant 146$ için λ özdeğerlerinin karmaşık sayı olmasının köşe noktası civarında sonsuz girdap dizisinin varlığına neden olduğunu gösterdi [33]. Burada kısaca bu ispat

verilecektir. Anti-simetrik akış için (1.12) seri çözümünün ilk teriminin

$$\psi(r,\theta) \approx \Re\{A_1 r^{\lambda_{a,1}}(\cos((\lambda_{a,1}-2)\alpha)\cos(\lambda_{a,1}\theta) - \cos(\lambda_{a,1}\alpha)\cos((\lambda_{a,1}-2)\theta))\}$$

ve $\theta = 0$ üzerinde açısal hızın $v_{\theta=0} = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_{\theta=0}$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca $\lambda_{a,1}$ öz değeri karmaşık sayı ve $\cos(\lambda_{a,1}-2)\alpha - \cos(\lambda_{a,1}\alpha)$ ifadesi sabit olduğundan

$$v(r,0) = \Re\{-\lambda_{a,1}A_1 r^{\lambda_{a,1}-1}\left[\cos(\lambda_{a,1}-2)\alpha - \cos(\lambda_{a,1}\alpha)\right]\} = \Re\{(a+ib)r^{\lambda_{a,1}-1}\},$$

ifade edilir. $\lambda_{a,1} = p+1+iq$ için açısal hız

$$\begin{aligned} v(r,0) &\approx \Re\left[(a+ib)r^{p+iq}\right] = \Re\left[(a+ib)r^p e^{iqlnr}\right] \\ &= \Re\left[(a+ib)r^p\left(\cos(q\ln r) + i\sin(q\ln r)\right)\right] \\ &= r^p\left[a\cos(q\ln r) - b\sin(q\ln r)\right] \\ &= \gamma r^p \sin(q\ln r + \epsilon) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada γ sabittir. Bu ifade $r \to 0$ için sonsuz defa işaret değiştirir. Gerçekten

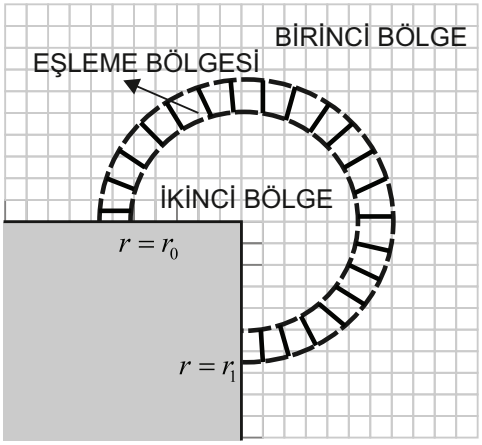
$$\begin{aligned} r \in q\ln r + \epsilon &= n\pi, \qquad (n = 0,1,...) \\ r = r_n &= e^{\frac{n\pi-\epsilon}{q}}, \qquad (n = 0,1,...) \end{aligned}$$

dır. Bu ise akış bölgesinin sonsuz girdap dizisini içerdiğini gösterir [33].

1.4. Tekil Noktalarda Eşleştirme Yöntemi

Bu bölümde yazarın yüksek lisans tezinde geliştirmiş olduğu asimptotik özfonksiyon eşleme yönteminden kısaca bahsedilecektir. Bu yöntem ile girintili ve çıkıntılı köşe noktası civarında tekil noktalardaki akış yapıları eşleme yapılarak daha net ve anlaşılır hale getirildi. Geliştirilen yöntem, çıkıntılı köşe noktası içeren dikdörtgensel kaviti için hem Stokes hem de Navier-Stokes denklemine uygulandı ve sonuçlar daha önceki elde edilenler ile kıyaslandı.

Şekil 1.2 ile gösterilen girinti köşe civarındaki akış yapılarını iyileştirmek için birinci bölgedeki noktalarda elde edilen nümerik veya analitik çözümler eşleme bölgesindeki noktalarda geliştirilen yöntem ile ikinci bölgeye taşınmaktadır.



Şekil 1.2. Köşe noktası civarında eşleme noktalarının gösterimi.

Bu yöntem ile birinci ve ikinci bölgedeki farklı eksenlerdeki hız vektör bileşenleri gerekli dönüşümler sonrasında en küçük kareler yöntemi kullanılarak eşlenecektir. Bu yöntem anti-simetrik akış fonksiyonuna uygulanacak olup benzer işlemler simetrik akış fonksiyonu için de yapılabilir.

Girinti köşe civarında eşleme yapmak ve ikinci bölgedeki çözümleri bulmak için Bölüm 1.2′ de verilen

$$\psi(r,\theta) = \Re \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\lambda_{a,n}} f_{\lambda_{a,n}}(\theta), \tag{1.13}$$

bi-harmonic denklemin kutupsal koordinatlardaki çözümü kullanıldı. Birinci bölgedeki xy koordinat sisteminde elde edilen çözüm

$$u_r^I = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) u_x + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) u_y,$$

$$u_\theta^I = -\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) u_x + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) u_y,$$

dönüşümleri yardımıyla kutupsal koordinat sistemine dönüştürülür. Eşleme bölgesindeki M noktada çözüme (1.13) serisinin ilk N terimi ile yaklaşalım. İlk N terimle çözüme ulaşılmak istendiğinden dolayı bu yaklaşık bir çözümdür. Yaklaşık çözüm ile oluşacak hatayı minimum eden katsayıları bulmak için her noktada hatanın karesi alınır. Yani, $(r_1,\theta_1),(r_2,\theta_2),...,(r_M,\theta_M)$, M tane noktada

hataların karesinin toplamı,

$$E^2 = \sum_{k=1}^{M} \left\{ -\psi_\theta^{II}(r_0,\theta_k) + \sum_{j=1}^{N}(a_j\phi_j(\theta_k) - b_j\mu_j(\theta_k)) \right\}^2 + \sum_{k=1}^{M} \left\{ -\psi_r^{II}(r_0,\theta_k) + \sum_{j=1}^{N}(a_j\varphi_j(\theta_k) - b_j\omega_j(\theta_k)) \right\}^2 \tag{1.14}$$

dır. Burada $\psi_r^{II}, \psi_\theta^{II}$, ikinci bölgedeki hız vektör bileşenleri olmak üzere ϕ_j, μ_j, φ_j ve ω_j aşağıdaki gibi oluşturulur:

$$\phi_j = \Re[f_{a,j}^{'}(\theta)r^{\lambda_{a,j}}],\ \mu_j = \mathsf{Im}[f_{a,j}^{'}(\theta)r^{\lambda_{a,j}}],$$

$$\varphi_j = \Re[\lambda_j f_{a,j}(\theta)r^{\lambda_{a,j}-1}],\ \omega_j = \mathsf{Im}[\lambda_j f_{a,j}(\theta)r^{\lambda_{a,j}-1}].$$

(1.14) eşitliğine en küçük kareler metodu uygulanırsa;

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \sum\{\phi_1\phi_1+\varphi_1\varphi_1\} & -\sum\{\mu_1\phi_1+\omega_1\varphi_1\} & \cdots & \sum\{\phi_n\phi_1+\varphi_n\varphi_1\} & -\sum\{\mu_n\phi_1+\omega_n\varphi_1\} \\ \sum\{\phi_1\mu_1+\varphi_1\omega_1\} & -\sum\{\mu_1\mu_1+\omega_1\omega_1\} & \cdots & \sum\{\phi_n\mu_1+\varphi_n\omega_1\} & -\sum\{\mu_n\mu_1+\omega_n\omega_1\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum\{\phi_1\phi_n+\varphi_1\varphi_n\} & -\sum\{\mu_1\phi_n+\omega_1\varphi_n\} & \cdots & \sum\{\phi_n\phi_n+\varphi_n\varphi_n\} & -\sum\{\mu_n\phi_n+\omega_n\varphi_n\} \\ \sum\{\phi_1\mu_n+\varphi_1\omega_n\} & -\sum\{\mu_1\mu_n+\omega_1\omega_n\} & \cdots & \sum\{\phi_n\mu_n+\varphi_n\omega_n\} & -\sum\{\mu_n\mu_n+\omega_n\omega_n\} \end{pmatrix}$$

ve

$$x = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_n \end{pmatrix},\ B_{i,j} = \begin{pmatrix} \sum\{\psi_\theta^{II}\phi_1 + \psi_r^{II}\varphi_1\} \\ \sum\{\psi_\theta^{II}\mu_1 + \psi_r^{II}\omega_1\} \\ \vdots \\ \sum\{\psi_\theta^{II}\phi_n + \psi_r^{II}\varphi_n\} \\ \sum\{\psi_\theta^{II}\mu_n + \psi_r^{II}\omega_n\} \end{pmatrix},$$

olmak üzere $Ax = B$ şeklinde denklem sistemi elde edilir. Bu sistem bilgisayar ortamına aktarılması ve algoritma oluşturulması için daha kullanışlı düzende aşağıdaki gibi yazılabilir [34]:

$$i_1 = 2i-1,\ i_2 = 2i \text{ ve } j_1 = 2j-1,\ j_2 = 2j, \text{ öyle ki } i,j = 1,...N,$$

olmak üzere

$$q = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_n \end{pmatrix},$$

öyle ki

$$q_{i_1} = a_i,\ q_{i_2} = b_i,\ i = 1, ..., N,$$

ve

$$\begin{aligned}
A_{i_1 j_1} &= \sum_{k=1}^{M} \{\phi_j(\theta_k)\phi_j(\theta_k) + \varphi_j(\theta_k)\varphi_j(\theta_k)\}, \\
A_{i_1 j_2} &= -\sum_{k=1}^{M} \{\mu_j(\theta_k)\phi_j(\theta_k) + \omega_j(\theta_k)\varphi_j(\theta_k)\}, \\
A_{i_2 j_1} &= \sum_{k=1}^{M} \{\phi_j(\theta_k)\mu_j(\theta_k) + \varphi_j(\theta_k)\omega_j(\theta_k)\}, \\
A_{i_2 j_2} &= -\sum_{k=1}^{M} \{\mu_j(\theta_k)\mu_j(\theta_k) + \omega_j(\theta_k)\omega_j(\theta_k)\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{i_1} &= \sum_{k=1}^{M} \{\psi_\theta^{II}\phi_i(\theta_k) + \psi_r^{II}\varphi_i(\theta_k)\}, \\
B_{i_2} &= \sum_{k=1}^{M} \{\psi_\theta^{II}\mu_i(\theta_k) + \psi_r^{II}\omega_i(\theta_k)\}.
\end{aligned}$$

1.4.1. Sayısal yöntemin uygulanabilirliği ve sonuçların diğer yöntemlerle karşılaştırılması

Bu bölümde eşleme yönteminin hem Stokes hem de Navier-Stokes denklemine uygulanabilirliğinden bahsedilecekdir. Bunun için test problemi olarak en çok bilinen kaviti problemi olan üst kapağı hareketli karesel kaviti ele alındı.

İki boyutlu viskoz, sıkıştırılamaz akış için Stokes denkleminin karesel kaviti içerisindeki çözümü

$$\begin{aligned}
\psi(x,y) = &\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\phi_{a,n}(x)}{\lambda_{a,n}^2} \left(a_n \frac{\sinh(\lambda_{a,n} y)}{\sinh(\lambda_{a,n} h)} + b_n \frac{\cosh(\lambda_{a,n} y)}{\cosh(\lambda_{a,n} h)} \right) \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\phi_{s,n}(x)}{\lambda_{s,n}^2} \left(c_n \frac{\sinh(\lambda_{s,n} y)}{\sinh(\lambda_{s,n} h)} + d_n \frac{\cosh(\lambda_{s,n} y)}{\cosh(\lambda_{s,n} h)} \right)
\end{aligned} \tag{1.15}$$

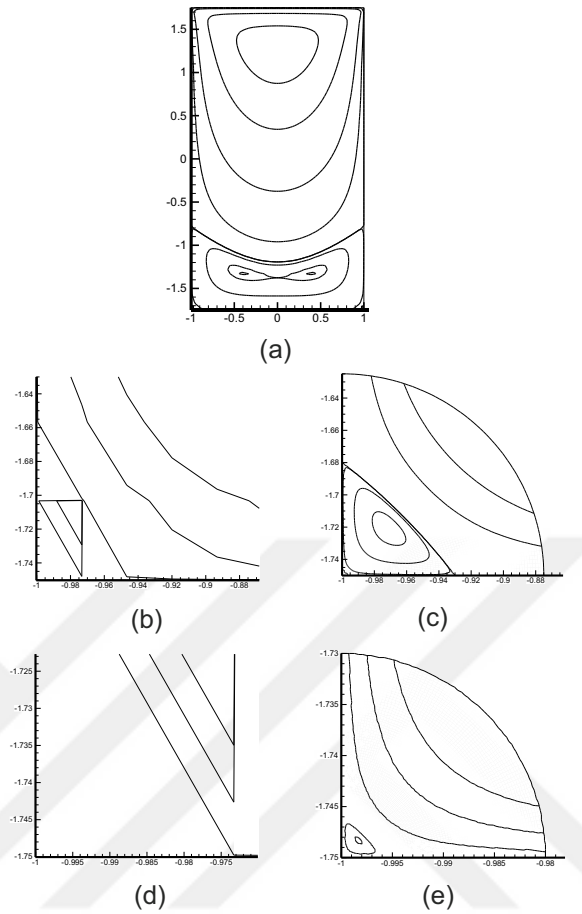
şeklindedir. Burada $\phi_{a,n}(x)$ ve $\phi_{s,n}(x)$ Papkovich-Fadle özfonksiyonları ve a_n, b_n, c_n, d_n bilinmeyen katsayılardır. Bu katsayıları belirlemek için çift dikleştirme yöntemi kullanılır. Bu yöntem ile seri bir n değeri için kesilir ve hesaplama yapılır. Ancak özellikle köşe noktalarına yakınlaştıkça daha doğru

sonuç elde edebilmek için seri daha fazla terime ihtiyaç duyar. Bu, hem zaman hem de hesaplama açısından verimli değildir. Bu yüzden karesel kavitinin çıkıntılı köşe noktası civarında eşleme eğrisi boyunca hız vektör bileşenleri biharmonik denklemin (1.12) çözümü ile eşleştirildi. Köşe noktasına yakın bazı noktalarda elde edilen sonuçların karşılaştırılması Tablo 1.2′ de verilmiştir. Ayrıca kaviti yükseliği $h = 1.75$ için akış çizgileri elde edildi. Köşe noktasında analitik ve eşleşme ile elde edilen çözüm eğrilerinin kıyaslanması Şekil 1.3′ de verilmiştir.

Tablo 1.2. Çıkıntılı köşe noktası civarında ve iç noktada elde edilen çözümlerin kıyaslanması.

	Eşleme Yöntemi	Joseph and Sturge' ın Yöntemi	Phillips' in Yöntemi
(a)			
(x,y)=(-0.5,-0.5)	$N_L = 4$, r=0.75		$N_P = 5$, r=0.75
N_B	(u,v) ($\times 10^{-2}$)	(u,v) ($\times 10^{-2}$)	(u,v) ($\times 10^{-2}$)
50	(-6.699490,5.257592)	(-6.699490,5.257592)	(-6.698172,5.259163)
100	(-6.700331,5.258166)	(-6.700331,5.258176)	(-6.699013,5.259747)
150	(-6.700357,5.258198)	(-6.700357,5.258198)	(-6.699039,5.259769)
200	(-6.700349,5.258191)	(-6.700349,5.258191)	(-6.699931,5.259762)
(b)			
(x,y)=(-0.9,-0.9)	$N_L = 4$, r=0.2		$N_P = 5$, r=0.2
N_B	(u,v) ($\times 10^{-4}$)	(u,v) ($\times 10^{-4}$)	(u,v) ($\times 10^{-4}$)
50	(-2.557140,2.767782)	(-2.592294,2.636462)	(-2.592285,2.636449)
100	(-2.591653,2.638508)	(-2.592213,2.636391)	(-2.592220,2.636394)
150	(-2.592193,2.636857)	(-2.592264,2.636442)	(-2.592271,2.636444)
200	(-2.592311,2.636441)	(-2.592249,2.636426)	(-2.592256,2.636429)
(c)			
(x,y)=(-0.99,-0.99)	$N_L = 4$, r=0.2		$N_P = 5$, r=0.2
N_B	(u,v) ($\times 10^{-6}$)	(u,v) ($\times 10^{-6}$)	(u,v) ($\times 10^{-6}$)
50	(1.196849,-1.196932)	(1.279112,-1.171585)	(1.196695,-1.196778)
100	(1.196776,-1.196859)	(1.220103,-1.190374)	(1.196776,-1.196859)
150	(1.196788,-1.196871)	(1.204718,-1.199730)	(1.196788,-1.196871)
200	(1.196784,-1.196866)	(1.199009,-1.199050)	(1.196784,-1.196867)

Eşleştirme yöntemi Navier-Stokes denklemine de uygulanabilmektedir. Bunun



Şekil 1.3. (a) Analitik çözüm ile elde edilen tek kapağı hareketli $h = 1.75$ için kaviti içindeki akış çizgileri. (b) ve (d) kavitinin köşe noktasına iki defa yakınlaşmış hali, (c) ve (e) eşleştirme ile elde edilen akış çizgileri.

için eşleme bölgesindeki noktalarda nümerik yöntemden elde edilen hız vektör bileşenlerine (1.12) serisinin ilk N terimi ile yaklaşım yapılsın. Bunun için literatürde en çok karşılaştırma problemi olarak ele alınan karesel kaviti ele alındı. Kaviti içerisinde Navier-Stokes denklemin çözümleri Gürcan [24] tarafından verilen sonlu elemanlar yönteminden elde edildi. $Re = 1000$ için kaviti içerisindeki köşe girdapların konumları ve o noktalardaki ψ akış fonksiyonu değerleri diğer çözümler ile kıyaslandı (Tablo 1.3). $Re = 100$ için kaviti yüksekliği $h = 1$ iken vektör alanı çizdirildi ve eşleme yapılan kısım ile sayısal yöntemden elde edilen akış çizgileri karşılaştırıldı (Şekil 1.4). Yöntem hakkında detaylı bilgi için Deliceoğlu vd. [35]' ne bakılabilir.

Tablo 1.3. $Re = 1000$ için sol köşe girdabın merkezinin konumu ve akış fonksiyon değerlerinin kıyaslanması.

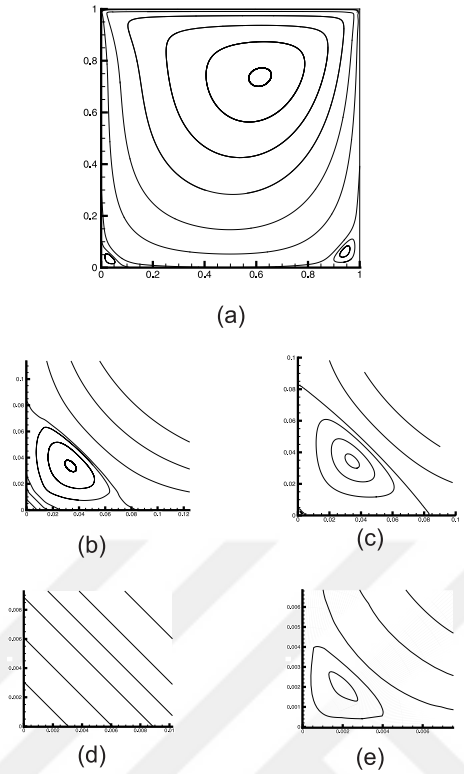
Sol Köşe Girdabı	Referanslar	Izgara Oranı	Girdabın Merkezinin Konumu	Akış fonksiyon Değerleri
Birinci Girdap				
	Eşleme Yöntemi [35]	-	(0.0843,0.0775)	0.23658e-5
	Ertürk [12]	-	(0.0833,0.0783)	0.23261e-3
	Nishida ve Satofuka [36]	129×129	(0.0859,0.0781)	0.23352e-5
	Ghia vd. [22]	129×129	(0.0859,0.0781)	0.23113e-5
	Botella ve Peyret [23]	N=160	(0.0833,0.0781)	0.23345e-5
	Vanka [37]	321×321	(0.075,0.0813)	0.224e-5
	Goyon [38]	129×129	(0.0859,0.0781)	0.211e-5
	Grigoriev [39]	-	(0.083,0.078)	0.242e-5
	Schreiber and Keller	129×129	(0.0857,0.0714)	0.217e-5
	Hou vd. [42]	-	(0.0902,0.0784)	0.222e-5
İkinci Girdap				
	Eşleme Yöntemi [35]	-	(0.0048,0.0048)	-0.64759e-10
	Ertürk [12]	-	(0.0050,0.0050)	-0.84221e-8
	Nishida ve Satofuka [36]	129×129	(0.0078,0.0078)	-0.16003e-9
	Botella and Peyret [23]	N=160	(0.00768,0.00765)	-0.50394e-9

1.5. Galerkin Sonlu Elemanlar Yöntemi

Bu bölümde 4. Bölüm' de incelenecek T-şeklinde kaviti içerisindeki akış yapılarını bulma probleminde kullanacağımız nümerik yöntem verilecektir. Sonlu elemanlar yönteminin çalışma mekanizması aşağıdaki gibidir:

1. Tüm bölge sonlu elemanlara bölünür,
2. Her bir temsilci element için birincil ve ikincil değişkenler arasında bağıntı kurulur,
3. Tüm sistem için birincil ve ikincil değişkenler arasındaki ilişkiyi elde etmek için elementleri birleştirilir.

Sonlu elemanlar yönteminde, her bir element üzerinde denklemin yaklaşık çözümü aranacaktır. Örneğin 2. mertebe bir $F(x, u, u', u'') = f(x)$ denkleminin



Şekil 1.4. Sayısal yöntem ile $h = 1$ ve $Re = 100$ için elde edilen seviye eğrileri. Sol sütun (b)-(d) eşleme yapılmamış hali. Sağ sütun (c)-(e) eşleme ile iyileştirilmiş hali.

gerçek çözümü $u(x)$ olsun. $u_h^e(x)$ sonlu elemanlar yaklaşımı aşağıdaki şekilde aranır:

$$\begin{aligned} u(x) \approx u_h^e &= c_1^e\varphi_1^e(x) + c_2^e\varphi_2^e(x) + c_3^e\varphi_3^e(x) + ... + c_n^e\varphi_n^e(x), \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j^e\varphi_j^e(x). \end{aligned} \tag{1.16}$$

Burada $\varphi_j^e(x)$ seçilecek olan şekil fonkiyonu, c_j^e belirlenecek olan sabitlerdir. Burada n tane bilinmeyen olduğu için onları belirlemek için n tane bağıntıya ihtiyaç vardır. (1.16) yaklaşık çözümü denklemde yerine yazılırsa genel olarak sağ tarafa yani $f(x)$ fonkiyonuna eşit olmayacaktır. Çünkü bu bir tam çözüm değildir. Aradaki farka kalan yada rezidü denir. Yani,

$$F\left(x, u_h^e, (u_h^e)', (u_h^e)''\right) - f(x) \equiv R^e\left(x, c_1^e, c_2^e, ..., c_n^e\right) \neq 0.$$

Kalanı sıfır yapmak için ağırlıklı integral yöntemini kullanılacaktır öyle ki $\omega_i^e (i = 1, ..., n)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$\int_{x_a}^{x_b} \omega_i^e(x) R^e(x, c_1, ..., c_n) = 0 \quad i = 1, ..., n \tag{1.17}$$

şeklinde bir iç çarpım olarak tanımlanır. Bu iç çarpımın sıfıra eşit olması için ağırlık fonksiyonu ω_i^e sıfır olmadığı için ancak R^e (rezidü) sıfır olmalıdır. Bu denklem bize $c_j^e(j = 1, 2, ..., n)$ parametreleri arasında n tane cebirsel bağıntı verir. $\{\omega_1^e(x), \omega_2^e(x), ..., \omega_n^e(x)\}$ kümesi lineer bağımsız olmalıdır ve dolayısıyla (1.17) cebirsel denklemleri de lineer bağımsızdır ve katsayılar matrisinin tersi alınabilirdir. Bu çalışmada ω_i^e ağırlık fonkiyonu $\varphi_i^e(x)$ şekil fonksiyonu ile aynı seçildi. Bu özel seçimli sonlu elemanlar yöntemine Galerkin sonlu elemanlar yöntemi denir.

1.5.1. Stokes Akış İçin Galerkin Sonlu Elemanlar Yöntemi

Bu bölümde Stokes akışı yöneten denklemin sonlu elemanlar formülasyonu elde edildi. Durağan (zamandan bağımsız), vizkos, sıkıştırılamaz akış için Navier-Stokes denklemi $\Omega \subset \Re^2$ bölge ve $\partial\Omega$ bölgenin sınırı olmak üzere aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{cases} (\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{Re}} \triangle \mathbf{u} + \nabla \mathbf{p} = \mathbf{f} \quad \Omega \text{ içinde} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \Omega \text{ içinde} \\ \mathbf{u} = 0 \quad \partial\Omega \text{ üzerinde}. \end{cases} \tag{1.18}$$

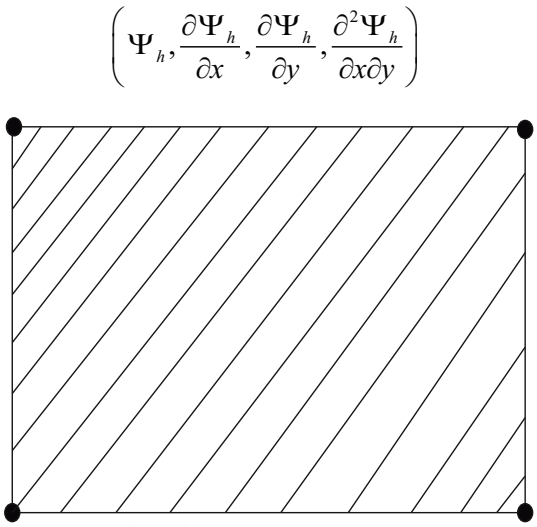
Stokes akış denklemini elde etmek için (1.18) denkleminde lineer olmayan terim ihmal edilirse,

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{Re} \triangle \mathbf{u} + \nabla \mathbf{p} &= \mathbf{f} \quad \Omega \text{ içinde} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \Omega \text{ içinde}, \end{aligned} \tag{1.19}$$

elde edilir. Eğer dış kuvveti sıfır alınırsa ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$), o halde denklem akış fonksiyonu cinsinden bi-harmonik operator olarak Ψ aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} = \nabla^4 \Psi = 0, \\ \\ \Psi = 0, \quad \dfrac{\partial \Psi}{\partial n} = 0. \end{cases} \tag{1.20}$$

Sonlu elemanlar yöntemini uygulamak için öncelikle (1.20) denkleminin zayıf formu elde edilir. Denklemin zayıf formu yönetici denkleme ve ilgili sınır şartlarına eşit olan bir ağırlıklı integral ifadesidir. (1.20) denklemine $\Psi = \sum c_j \Phi_j$



Şekil 1.5. Dördüncü dereceden problemler için bikubik dikdörtgensel eleman.

ile yaklaşım yapılsın. Bu durumda rezidü $f(x) = 0$ olduğu için

$$0 = \int_{\Omega} \Phi \left\{ \Psi_{xxxx} + 2\Psi_{xxyy} + \Psi_{yyyy} \right\} d\Omega \tag{1.21}$$

dir. Türev ifadelerini Φ ve Ψ arasında eşit olarak dağıtılsın. Bu işlem sadece Ψ_{xxxx} için yapıldı, diğer terimler için de benzer şekilde yapılabilir. Bunun için divergence teoremi kullanıldı ancak önce kullanışlı bazı eşitlikleri ifade edelim. Çarpımın türevi ifadesi

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi \Psi_{xxx} \right) = \Phi_x \Psi_{xxx} + \Phi \Psi_{xxxx}$$

dır. Buradan $\Phi \Psi_{xxxx}$ ifadesinin yerine eşiti yazılırsa;

$$\int_{\Omega} \Phi \Psi_{xxxx} d\Omega = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi \Psi_{xxx} \right) - \Phi_x \Psi_{xxx} \right\} d\Omega, \tag{1.22}$$

elde edilir. Divergence teoremi gereğince bölge üzerindeki integral, bölgeyi çevreleyen sınır integraline dönüşür. Buna göre (1.22) denklemi

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi \Psi_{xxx} \right) - \Phi_x \Psi_{xxx} \right\} d\Omega = \int_{\Omega} -\Phi_x \Psi_{xxx} d\Omega + \int_{\partial \Omega} n_x \left(\Phi \Psi_{xxx} \right) d\partial\Omega,$$

olarak tekrar yazılır. Burada n_x sınır üzerindeki birim normal vektör bileşenidir.

Sınır üzerinde Ψ değeri sıfıra eşit olduğu için

$$\int_{\Omega} \Phi \Psi_{xxxx} d\Omega = \int_{\Omega} -\Phi_x \Psi_{xxx} d\Omega, \tag{1.23}$$

elde edilir. Benzer şekilde işlem yapıldığında:

$$\int_{\Omega} -\Phi_x \Psi_{xxx} d\Omega = \int_{\Omega} \Phi_{xx} \Psi_{xx} d\Omega, \tag{1.24}$$

elde edilir ki buradan

$$\int_{\Omega} \Phi \Psi_{xxxx} d\Omega = \int_{\Omega} \Phi_{xx} \Psi_{xx} d\Omega, \tag{1.25}$$

bulunur. Φ ve Ψ arasında türev dağıtma işlemi benzer şekilde (1.21) denklemindeki diğer terimler için de yapıldığında (1.20) denkleminin zayıf (bi-lineer) formu $\Psi \in H_0^2(\Omega)$ öyle ki $\forall \Phi \in H_0^2(\Omega)$ için [41]

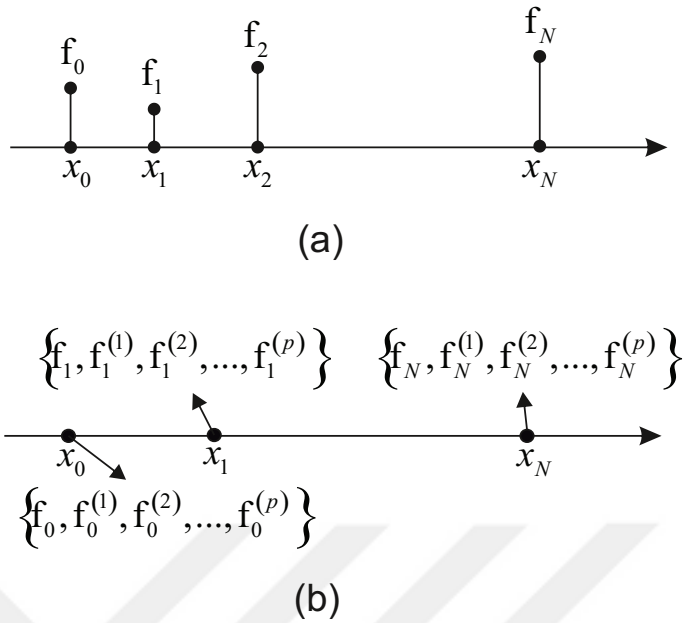
$$\begin{aligned} B(\Psi, \Phi) &= \int_{\Omega} \{\Phi_{xx}\Psi_{xx} + \Phi_{xx}\Psi_{yy} + \Phi_{yy}\Psi_{xx} + \Phi_{yy}\Psi_{yy}\} d\Omega, \\ &= \int_{\Omega} \{\Phi_{xx} + \Phi_{yy}\} \{\Psi_{xx} + \Psi_{yy}\} d\Omega = \int_{\Omega} \Delta\Psi \Delta\Phi d\Omega = 0, \end{aligned} \tag{1.26}$$

dır. Burada Δ, Laplace operatörü ve $H_0^2(\Omega)$ ise sınır şartlarını sağlayan H^2 (ikinci türevinin karesi integrallenebilir fonksiyonların sınıfı) fonksiyonlarının bir sınıfıdır. Son olarak (1.26) yaklaşımına uygun olan elemanı belirlensin. Ψ_h yaklaşım fonksiyonu bu problemde H^2 ait olması gerektiği için şekil fonkiyonu ortak eksen boyunca sürekli birinci türevleri olmak zorundadır ($\phi_j \in C^1$). Normal yöndeki türev noktadan ziyade kenar boyunca sürekli olacağından, daha fazla eleman ihtiyacı ortaya çıkacaktır. Örneğin dört noktalı dikdörtgensel elemanı ele alınsın. Yukarıdaki probleme uygun şartlar her bir eleman için

$$\left\{ \Psi_h, \frac{\partial \Psi_h}{\partial x}, \frac{\partial \Psi_h}{\partial y}, \frac{\partial^2 \Psi_h}{\partial x \partial y} \right\}, \tag{1.27}$$

olarak yazılırsa bu bize 4 nokta 4 şart verir ki bu toplamda 16 şart demektir. O halde Ψ_h^e bilinmeyen fonksiyonu için yaklaşık çözüm aşağıdaki gibi aranır;

$$\begin{aligned} \Psi_h^e(x,y) = {} & a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8 x^2 y + a_9 xy^2 \\ & + a_{10} y^3 + a_{11} x^3 y + a_{12} x^2 y^2 + a_{13} xy^3 + a_{14} x^3 y^2 + a_{15} x^2 y^3 + a_{16} x^3 y^3. \end{aligned} \tag{1.28}$$



Şekil 1.6. (a) Lagrange interpolasyon yaklaşımı, (b) Hermite interpolasyon yaklaşımı ($p \leqslant N$).

Burada bilinmeyen a_j katsayıları dikdörtgenin 4 köşe noktası üzerinde (1.27) şartlarıyla elde edilir ki bu ise bize şekil fonsiyonları olarak Hermite interpolasyon fonkiyonlarını verir. Elde edilen Ψ_h yaklaşım fonkiyonları denklemin (1.26) zayıf formunda yerine yazıldığında her bir element için katsayılar matrisi, daha sonra elemanların toplanmasıyla global matris elde edilerek çözüme gidilir.

2. BÖLÜM

GİRİNTİLİ NOKTA CİVARINDA AKIŞ YAPISI

Girintili nokta civarında akış topolojisinin incelenmesi literatürde daha önce yapılmamıştır. Bunun için ilk önce (1.12) çözümünün anti-simetrik ve simetrik akış için ilk terimleri incelenecek daha sonra ise anti-simetrik akış için ilk iki terim göz önünde bulundurulacaktır.

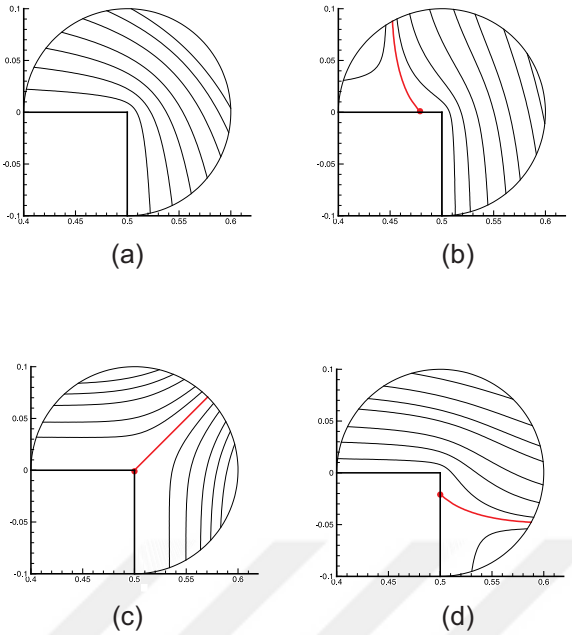
2.1. Birinci Dereceden Asimptotik Çözümün İncelenmesi

Hawa ve Rusak [3] birinci dereceden asimptotik çözümün girintili köşe civarında ortaya çıkan ayırma çizgisini analiz etti. Akış fonksiyonunun katsayılarının birbirine göre baskın olma durumlarında ayırma çizgisinin hareketini incelemiş ve bunu nümerik yöntemiyle elde ettiği verilerle desteklemiştir. Bu çalışmada ise ayırma çizgisinin çıkış noktası olan yansıma noktasının (inflection point) konumunu akış fonksiyonunun katsayılarına bağlı olarak elde edildi. (1.12) akış fonksiyonunun anti-simetrik ve simetrik olmak üzere ilk terimlerini göz önüne alınsın. Köşe noktası girintili olduğundan $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ için

$$\psi(r,\theta) \approx \Re\left\{A_1 r^{\lambda_{a,1}}\left(\cos(\lambda_{a,1}-2)\frac{3\pi}{4}\right)\cos(\lambda_{a,1}\theta) - \cos\left(\lambda_{a,1}\frac{3\pi}{4}\right)\cos((\lambda_{a,1}-2)\theta))\right\}$$
$$+\Re\left\{B_1 r^{\lambda_{s,1}}\left(\sin(\lambda_{s,1}-2)\frac{3\pi}{4}\right)\sin(\lambda_{s,1}\theta) - \sin\left(\lambda_{s,1}\frac{3\pi}{4}\right)\sin((\lambda_{s,1}-2)\theta))\right\},$$

dır. Burada $A_1 = a_{1,r} + ia_{1,i}$ ve $B_1 = b_{1,r} + ib_{1,i}$ katsayıları bilinmeyen karmaşık sayılardır. Ancak $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ olduğundan $\lambda_{a,1}$ ve $\lambda_{s,1}$ özdeğerleri gerçel sayıdır (Tablo 1.1).

Eğer B_1 katsayısı sıfır ise akış fonksiyonu anti-simetriktir ve bu akış bölgesinde herhangi bir ayırma çizgisinin olmadığını ifade eder (Şekil 2.1-(a)). Gerçekten



Şekil 2.1. Asimptotik çözümün ilk terimlerine göre girintili köşe noktası civarında ayırma çizgi topolojisi (a) Ayırma çizgisi yok, (b) $C_1 > 0$ için ayırma çizgisi üst duvar üzerinde, (c) $C_1 = 0$ için ayırma çizgisi tam köşe noktası üzerinde, (d) $C_1 < 0$ için ayırma çizgisi alt duvar üzerinde.

$r \neq 0$ için $\psi(r,\theta) = 0$ yapan θ değeri yoktur. Eğer A_1 sıfır ise bu durumda akış fonksiyonu simetriktir ve $\theta = 0$ için $\psi(r,\theta) = 0$ olur. Bu ise akış bölgesini simetrik bir şekilde ayıran ayırma çizgisinin varlığını ifade eder (Şekil 2.1-(c)). Şimdi katsayıların diğer durumlarını incelemek için akış fonskiyonunda her iki tarafı B_1 ile bölelim; $C_1 = \frac{A_1}{B_1}$ olmak üzere akış fonksiyonu aşağıdaki gibi tekrar yazılsın:

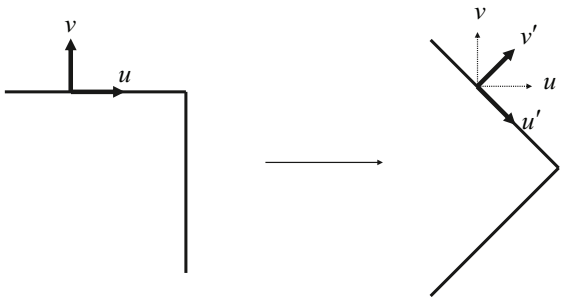
$$\psi(r,\theta) \approx \left\{ C_1 r^{\lambda_{a,1}} \left(\cos(\lambda_{a,1} - 2)\frac{3\pi}{4} \right) \cos(\lambda_{a,1}\theta) - \cos\left(\lambda_{a,1}\frac{3\pi}{4} \right) \cos((\lambda_{a,1} - 2)\theta)) \right\},$$
$$+ \left\{ r^{\lambda_{s,1}} \left(\sin(\lambda_{s,1} - 2)\frac{3\pi}{4} \right) \sin(\lambda_{s,1}\theta) - \sin\left(\lambda_{s,1}\frac{3\pi}{4} \right) \sin((\lambda_{s,1} - 2)\theta)) \right\}.$$

Köşe civarındaki yansıma noktasını (inflection point) duvar kesme gerilimi (wall shear stress) ile belirlendi. Öncelikle duvar kesme geriliminin tanımını verelim; duvar kesme gerilimi duvara teğet hız vektörün normal vektör yönündeki türevi olarak tanımlanır, matematiksel olarak μ dinamik viscosity ve t duvara teğet birim vektör olmak üzere

$$\tau_{\text{duvar}} = \mu \frac{\partial\,(u,v)}{\partial n} \cdot t,$$

dır. Çalışma bölgesinde Moffatt çözümü kullanıldığı için girintili nokta bölgesinin $\alpha = 45°$ döndürülmesi gerekmektedir. Bunun için u ve v vektörleri

döndürülerek işlem yapılmalıdır (Şekil 2.2). Örneğin üst duvar için (u, v) hız



Şekil 2.2. $\theta = 45°$ döndürülmesiyle oluşan hız vektör bileşenleri.

vektör bileşenlerinin $45°$ derece saat yönünde döndürülmesi ile oluşan vektörler (u', v'), $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ ve $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ olmak üzere

$$u' = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(u - v) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\psi_x + \psi_y),$$
$$v' = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(u + v) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(-\psi_x + \psi_y).$$

Şimdi u' bileşeninin $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ yönündeki türevi; yönlü türev tanımı gereğince;

$$\nabla u' \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\psi_{xx} + \psi_{yx}, \psi_{xy} + \psi_{yy}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1) = \frac{1}{2}(\psi_{xx} + 2\psi_{xy} + \psi_{yy}),$$

elde edilir ki bu üst duvar için duvar kesme gerilimidir. Benzer işlemler alt duvar içinde yapıldığında hem alt hem üst duvar için kesme gerilimi

$$\tau_{\text{üst}} = \psi_{xx} + 2\psi_{xy} + \psi_{yy}, \tag{2.1}$$

$$\tau_{\text{alt}} = \psi_{xx} + \psi_{yy}, \tag{2.2}$$

olarak elde edilir. Şimdi üst duvar için kesme geriliminin kökünü bulalım: $\theta = \frac{3\pi}{4}$ için ψ nin gerekli türevler alınıp denklem (2.1)′ te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\tau_{\text{üst}} =& \frac{2r^{\lambda_{a,1}}}{r^2} C_1 (\lambda_{a,1} - 1)\left(\lambda_{a,1} + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\lambda_{a,1}\right) - 2\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\lambda_{a,1}\right)\right), \\ &+ \frac{2r^{\lambda_{s,1}}}{r^2}(\lambda_{s,1} - 1)\left((\lambda_{s,1} - 2) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\lambda_{s,1}\right) + 2\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\lambda_{s,1}\right)\right),\end{aligned} \tag{2.3}$$

elde edilir. Bu ifade r ye göre çözülürse ($C_1 > 0$ için);

$$r = \left(\frac{-C_1(\lambda_{a,1} - 1)\left(\lambda_{a,1} + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\lambda_{a,1}\right) - 2\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\lambda_{a,1}\right)\right)}{(\lambda_{s,1} - 1)\left((\lambda_{s,1} - 2) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\lambda_{s,1}\right) + 2\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\lambda_{s,1}\right)\right)}\right)^{\left(\frac{1}{\lambda_{s,1} - \lambda_{a,1}}\right)}, \tag{2.4}$$

dır. Bu, yatay üst duvarda uygun bir $C_1 > 0$ için duvar kesme geriliminin kökü olduğunu yani, uygun katsayılar için duvar üstünde ayırma çizgisi olduğunu ifade eder. Benzer hesaplama alt duvar için yapılırsa $\theta = \frac{-3\pi}{4}$ için $C_1 < 0$ olmak üzere

$$r = \left(-\frac{C_1 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\lambda_{a,1}\right)(\lambda_{a,1}-1)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\lambda_{s,1}\right)(\lambda_{s,1}-1)} \right)^{\left(\frac{1}{\lambda_{s,1}-\lambda_{a,1}}\right)}, \tag{2.5}$$

dır. Eğer $\lambda_{a,1} = 1.54448373$ ve $\lambda_{s,1} = 1.90852918$ değerleri denklem (2.4) ve denklem (2.5)' de yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned} r &\approx (1.661 C_1)^{2.746} \quad \text{için} \quad C_1 > 0, \\ r &\approx (-1.203 C_1)^{2.746} \ \text{için} \quad C_1 < 0, \end{aligned} \tag{2.6}$$

yansıma noktasının konumu elde edilir. Böylece $C_1 > 0$ için ayırma çizgisi üst duvarda Şekil (2.1-(b)), $C_1 < 0$ için ayırma çizgisi alt duvarda (Şekil 2.1-(d)) ve $C_1 = 0$ için ayırma çizgisi tam köşe noktasından çıkmaktadır (Şekil 2.1-(c)).

2.2. İkinci Dereceden Asimptotik Çözümün İncelenmesi

Bir önceki bölümde (1.12) çözümün anti-simetrik ve simetrik olmak üzere serinin ilk terimleri için inceleme yapıldı. Şimdi (1.12) serisinin anti-simetrik akış için ilk iki terimi göz önüne alınsın. Akış fonksiyonu,

$$\begin{aligned} \psi = A_1 r^{\lambda_{a,1}} &\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}(\lambda_{a,1}-2)\right)\cos(\lambda_{a,1}\theta) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\lambda_{a,1}\right)\cos((\lambda_{a,1}-2)\theta)\right), \\ + A_2 r^{\lambda_{a,2}} &\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}(\lambda_{a,2}-2)\right)\cos(\lambda_{a,2}\theta) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\lambda_{a,2}\right)\cos((\lambda_{a,2}-2)\theta)\right), \end{aligned} \tag{2.7}$$

dır. Ayırma noktasını araştırmak için duvar kesme gerilimini hesaplayalım. (2.7) akış fonksiyonu (2.1) denklemine konursa $\theta = 3\pi/4$ için

$$\tau_{\text{üst}} = \frac{0.91339\, A_1 r^{1.54448} - 1.546121\, A_2 r^{2.62925+0.23125\,i} + 4.095862\, i A_2 r^{2.62925+0.23125\,i}}{r^2}, \tag{2.8}$$

elde edilir. Elde edilen bu ifade karmaşık bir sayıdır ancak reel eksende çalışıldığından dolayı bu ifadenin reel kısmı incelenecektir. Bunun için $A_1 =$

$a_1, A_2 = (a_2 + b_2 i)$ eşitlikleri duvar kesme gerilimi (2.8)'de yerine konursa;

$$\begin{aligned}\tau_{\text{üst}} = &((-4.095862\cos(0.23125\ln(r)) + 1.546121\sin(0.23125\ln(r)))b_2,\\ &+ (-1.546121\cos(0.23125\ln(r)) - 4.095862\sin(0.23125\ln(r))a_2))r^{1.084773},\\ &+ 0.913394a_1 \end{aligned} \tag{2.9}$$

elde edilir. Üst duvar için elde edilen (2.9) denkleminin $r \to 0$ için limiti alınırsa

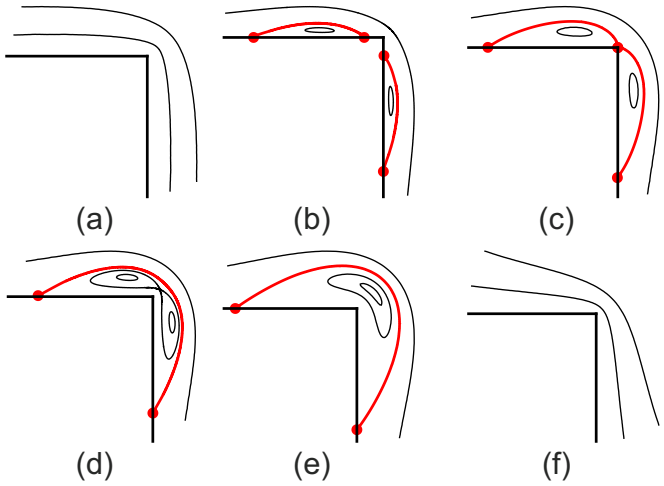
$$0.913394a_1,$$

elde edilir ki $r \to 0$ için gerilimin sıfır olması $a_1 = 0$ olduğu zaman mümkündür. Bu ise bize duvar üstünde $r = 0$ da ayırma çizgisinin olması için $a_1 = 0$ olması gerekiğini ifade eder. Tersine olarak eğer (2.9) ifadesinde $a_1 = 0$ alınır ve denklem r ye göre çözülürse;

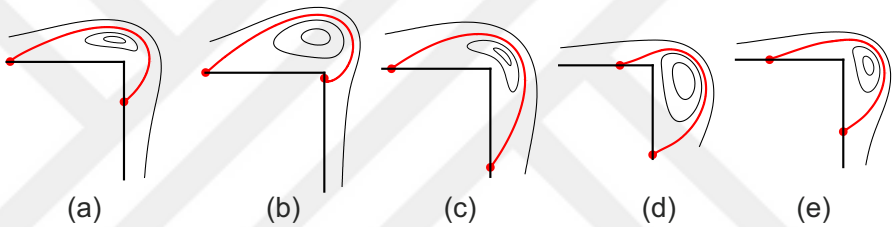
$$r = \mathrm{e}^{-4.324314\ \arctan\left(\frac{0.515373\times10^9\, a_2 + 0.1365287535\times10^{10}\, b_2}{0.1365287535\times10^{10}\, a_2 - 0.515373863\times10^9\, b_2}\right)},$$

elde edilir. Bu ise $a_1 = 0$ için duvar kesme geriliminin uygun a_2 ve b_2 katsayıları için sıfır olduğunu yani, duvar üstünde ayırma çizgisi olduğunu ifade eder. Benzer işlemler alt duvar için de yapılabilir. (2.7) akış fonksiyonu $a_1 = 0$ için çizdirildiğinde gerçekten bir tane kolu köşe noktasında olan bir tane kolu ise üst ve alt duvar üzerinde bulunan ayırma baloncuğu oluştuğu gözlenmiştir (Şekil 2.3-(c)). Köşe noktası civarında meydana gelen ayırma baloncuğunun diğer durumları bazı katsayılar için elde edilmiştir (Şekil 2.3).

Buraya kadar (1.12) akış fonksiyonunun anti-simetrik akış için ilk iki terimi incelendi. Doğal olarak simetrik akış için terimlerinin sisteme katkısı merak konusudur. Basitçe açıklamak gerekirse simetrik terimler anti-simetrik akış yapısını bozmaktır. Örneğin, Şekil 2.4-(c)' deki ayırma baloncuğu için akış fonksiyonunun simetrik terimleri sıfırdır. Eğer B_1 ve B_2 katsayıları akış fonksiyonuna eklenirse ayırma baloncuğunun anti-simetrik yapısı bozularak katsayıların durumuna göre yukarı veya aşağı hareket etme eğilimindedir (Şekil 2.4-(a),(b),(d),(e)). Benzer olarak akış fonksiyonunda simetrik terimler olmadan uygun katsayılar için köşe civarında biri üst duvar üzerinde biri alt duvar üzerinde olmak üzere iki tane ayırma baloncuğu vardır (Şekil 2.5-(c)). Ancak

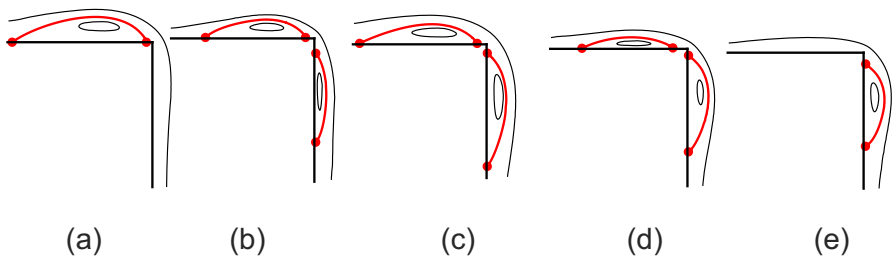


Şekil 2.3. (a) $A_1 = -0.05, A_2 = 1+3i$, (b) $A_1 = -0.1, A_2 = 5+i$, (c)$A_1 = 0, A_2 = 5+i$, (d) $A_1 = 0.03, A_2 = 4+i$, (e) $A_1 = 0.08, A_2 = 4+i$, (e) $A_1 = 1, A_2 = 3+i$.



Şekil 2.4. (a) $A_1 = 0.05, A_2 = 3+i, B_1 = -0.2, B_2 = 3+i$,(b) $A_1 = 0.05, A_2 = 3+i, B_1 = -0.7, B_2 = 3+i$, (c)$A_1 = 0.05, A_2 = 3+i, B_1 = 0, B_2 = 0$, (d) $A_1 = 0.05, A_2 = 3+i, B_1 = -0.5, B_2 = 3+i$, (e) $A_1 = 0.05, A_2 = 3+i, B_1 = -0.2, B_2 = 3+i$.

simetrik terimler B_1 ve B_2 katsayıları akış fonksiyonuna eklendiğinde katsayının durumuna göre alt duvar veya üst duvar üstündeki ayırma baloncuğu küçülerek tek bir ayırma baloncuğu kalmaktadır (Şekil 2.5-(a),(b),(d),(e)).

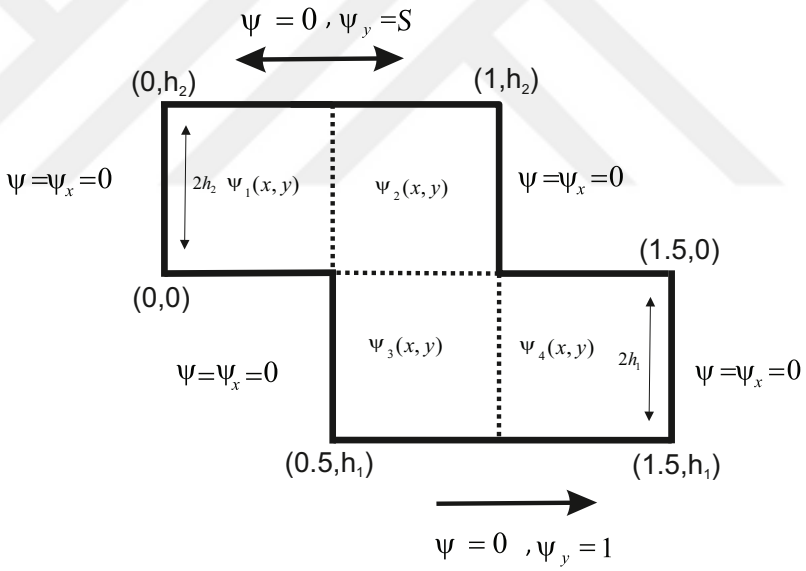


Şekil 2.5. (a) $A_1 = -0.05, A_2 = 5+i, B_1 = -0.3, B_2 = 3+i$,(b) $A_1 = -0.05, A_2 = 5+i, B_1 = -0.1, B_2 = 3+2i$, (c)$A_1 = -0.05, A_2 = 6+i, B_1 = 0, B_2 = 0$, (d) $A_1 = -0.05, A_2 = 5+i, B_1 = 0.2, B_2 = 3+i$, (e) $A_1 = -0.05, A_2 = 4+i, B_1 = 0.2, B_2 = 3+i$.

3. BÖLÜM

Z-ŞEKLİNDEKİ KAVİTİ İÇİNDEKİ GİRDAP OLUŞUM MEKANİZMASI

Bu bölümde, alt ve üst kapaklarının aynı yönde hareket etmesiyle Z-şeklindeki bir kaviti içerisinde ortaya çıkan akış yapıları elde edilecek olup kaviti içerisindeki girdap oluşum mekanizması incelenecektir. Bunun için Stokes denkleminin öz-fonksiyon çözüm yöntemi kullanılacaktır.



Şekil 3.1. Z-Şeklindeki kaviti için sınır değer problemi.

3.1. Z-Şeklindeki Kaviti İçin Akış Fonksiyonları

Z-şeklindeki kaviti içerisindeki akış yapılarının bulunması için bi-harmonik denklemin bölge üzerinde çözülmesi gerekmektedir. Bunun için Z-şeklindeki kaviti alt bölgelere ayrılarak her bir bölge için akış fonksiyonu yazıldı. Yazılan bu akış fonksiyonları bölgeler arası akışın sürekliliğini sağlamak zorundadır. Bu yüzden bölgeler arası hız vektör bileşenleri ve gerilimleri eşlenerek akışın

sürekliliği sağlanacaktır. Z- şeklindeki kaviti için sınır değer problemi Şekil 3.1 ' de gösterilmiştir.

Birinci bölgedeki akış fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır [2]:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\phi_{a,\,n}(x)}{{\lambda_{a,\,n}}^2}\left(\frac{a_n \sinh(\lambda_{a,\,n}\,(y-h_2))}{\sinh(\lambda_{a,\,n}\,h_2)} + \frac{b_n \cosh(\lambda_{a,\,n}\,(y-h_2))}{\cosh(\lambda_{a,\,n}\,h_2)}\right)\\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\phi_{s,\,n}(x)}{{\lambda_{s,\,n}}^2}\left(\frac{c_n \sinh(\lambda_{s,\,n}\,(y-h_2))}{\sinh(\lambda_{s,\,n}\,h_2)} + \frac{d_n \cosh(\lambda_{s,\,n}\,(y-h_2))}{\cosh(\lambda_{s,\,n}\,h_2)}\right)\\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_{a,\,n}(y)}{{\mu_{a,\,n}}^2}\left(\frac{e_n \sinh(\mu_{a,\,n}\,(x-0.25))}{\sinh(0.25\,\mu_{a,\,n})} + \frac{f_n \cosh(\mu_{a,\,n}\,(x-0.25))}{\cosh(0.25\,\mu_{a,\,n})}\right)\\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_{s,\,n}(y)}{{\mu_{s,\,n}}^2}\left(\frac{g_n \sinh(\mu_{s,\,n}\,(x-0.25))}{\sinh(0.25\,\mu_{s,\,n})} + \frac{h_n \cosh(\mu_{s,\,n}\,(x-0.25))}{\cosh(0.25\,\mu_{s,\,n})}\right).\end{aligned} \tag{3.1}$$

Burada

$$\mu_{a,\,n} = \frac{s_{a,\,n}}{h_2}, \quad \mu_{s,\,n} = \frac{s_{s,\,n}}{h_2}, \quad \lambda_{a,\,n} = 4s_{a,\,n}, \quad \lambda_{s,\,n} = 4s_{s,\,n},$$

ve

$$\phi_{a,\,n}(x) = s_{a,\,n}\,(\sin(s_{a,\,n})\,\cos(s_{a,\,n}\,(4\,x-1)) - (4\,x-1)\,\cos(s_{a,\,n})\,\sin(s_{a,\,n}\,(4\,x-1))),$$

$$\phi_{s,\,n}(x) = s_{s,\,n}\,(\cos(s_{s,\,n})\,\sin(s_{s,\,n}\,(4\,x-1)) - (4\,x-1)\,\sin(s_{s,\,n})\,\cos(s_{s,\,n}\,(4\,x-1))),$$

$$\xi_{a,\,n}(y) = s_{a,\,n}\left(\sin(s_{a,\,n})\cos\left(\frac{s_{a,\,n}\,(y-h_2)}{h_2}\right) - \frac{(y-h_2)\cos(s_{a,\,n})}{h_2}\sin\left(\frac{s_{a,\,n}\,(y-h_2)}{h_2}\right)\right),$$

$$\xi_{s,\,n}(y) = s_{s,\,n}\left(\cos(s_{s,\,n})\sin\left(\frac{s_{s,\,n}\,(y-h_2)}{h_2}\right) - \frac{(y-h_2)\sin(s_{s,\,n})}{h_2}\cos\left(\frac{s_{s,\,n}\,(y-h_2)}{h_2}\right)\right),$$

fonksiyonları simetrik ve anti-simetrik Papkovich-Fadle özfonksiyonlarıdır. Yan duvarların sabit olması $\phi(x)$ özfonksiyonuna uygulanması sonucu aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\sin(2\lambda_{a,n}) = -2\lambda_{a,n},$$

$$\sin(2\lambda_{s,n}) = -2\lambda_{s,n}.$$

Benzer şekilde sırasıyla ikinci, üçüncü ve dördüncü bölge için akış fonksiyonları ve özfonksiyonları aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned}
\psi_2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\eta_{a,\,n}(x)}{{\lambda_{a,\,n}}^2} \left(\frac{k_n \sinh(\lambda_{a,\,n}\,(y-h_2))}{\sinh(\lambda_{a,\,n}\,h_2)} + \frac{l_n \cosh(\lambda_{a,\,n}\,(y-h_2))}{\cosh(\lambda_{a,\,n}\,h_2)}\right) \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\eta_{s,\,n}(x)}{{\lambda_{s,\,n}}^2} \left(\frac{m_n \sinh(\lambda_{s,\,n}\,(y-h_2))}{\sinh(\lambda_{s,\,n}\,h_2)} + \frac{n_n \cosh(\lambda_{s,\,n}\,(y-h_2))}{\cosh(\lambda_{s,\,n}\,h_2)}\right) \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_{a,\,n}(y)}{{\mu_{a,\,n}}^2} \left(\frac{o_n \sinh(\mu_{a,\,n}\,(x-0.75))}{\sinh(0.25\,\mu_{a,\,n})} + \frac{p_n \cosh(\mu_{a,\,n}\,(x-0.75))}{\cosh(0.25\,\mu_{a,\,n})}\right) \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_{s,\,n}(y)}{{\mu_{s,\,n}}^2} \left(\frac{r_n \sinh(\mu_{s,\,n}\,(x-0.75))}{\sinh(0.25\,\mu_{s,\,n})} + \frac{s_n \cosh(\mu_{s,\,n}\,(x-0.75))}{\cosh(0.25\,\mu_{s,\,n})}\right),
\end{aligned}$$

$$\eta_{a,\,n}(x) = s_{a,\,n}\,(\sin(s_{a,\,n})\,\cos(s_{a,\,n}\,(4\,x-3)) - (4\,x-3)\,\cos(s_{a,\,n})\,\sin(s_{a,\,n}\,(4\,x-3))),$$

$$\eta_{s,\,n}(x) = s_{s,\,n}\,(\cos(s_{s,\,n})\sin(s_{s,\,n}\,(4\,x-3)) - (4\,x-3)\sin(s_{s,\,n})\cos(s_{s,\,n}\,(4\,x-3))),$$

$$\begin{aligned}
\psi_3 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\eta_{a,\,n}(x)}{{\lambda_{a,\,n}}^2} \left(-\frac{t_n \sinh(\lambda_{a,\,n}\,(y+h_1))}{\sinh(\lambda_{a,\,n}\,h_1)} + \frac{u_n \cosh(\lambda_{a,\,n}\,(y+h_1))}{\cosh(\lambda_{a,\,n}\,h_1)}\right) \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\eta_{s,\,n}(x)}{{\lambda_{s,\,n}}^2} \left(-\frac{v_n \sinh(\lambda_{s,\,n}\,(y+h_1))}{\sinh(\lambda_{s,\,n}\,h_1)} + \frac{z_n \cosh(\lambda_{s,\,n}\,(y+h_1))}{\cosh(\lambda_{s,\,n}\,h_1)}\right) \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{a,\,n}(y)}{{\mu_{a,\,n}}^2} \left(\frac{k1_n \sinh(\mu_{a,\,n}\,(x-0.75))}{\sinh(0.25\,\mu_{a,\,n})} + \frac{k2_n \cosh(\mu_{a,\,n}\,(x-0.75))}{\cosh(0.25\,\mu_{a,\,n})}\right) \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{s,\,n}(y)}{{\mu_{s,\,n}}^2} \left(\frac{k3_n \sinh(\mu_{s,\,n}\,(x-0.75))}{\sinh(0.25\,\mu_{s,\,n})} + \frac{k4_n \cosh(\mu_{s,\,n}\,(x-0.75))}{\cosh(0.25\,\mu_{s,\,n})}\right),
\end{aligned}$$

$$\omega_{a,\,n}(y) = s_{a,\,n}\,\left(\sin(s_{a,\,n})\cos\left(\frac{s_{a,\,n}\,(y+h_1)}{h_1}\right) - \frac{(y+h_1)\cos(s_{a,\,n})}{h_2}\sin\left(\frac{s_{a,\,n}\,(y+h_1)}{h_1}\right)\right),$$

$$\omega_{s,\,n}(y) = s_{s,\,n}\,\left(\cos(s_{s,\,n})\sin\left(\frac{s_{s,\,n}\,(y+h_1)}{h_1}\right) - \frac{(y+h_1)\sin(s_{s,\,n})}{h_1}\cos\left(\frac{s_{s,\,n}\,(y+h_1)}{h_1}\right)\right),$$

$$\begin{aligned}
\psi_4 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\theta_{a,\,n}(x)}{{\lambda_{a,\,n}}^2} \left(-\frac{m1_n \sinh(\lambda_{a,\,n}\,(y+h_1))}{\sinh(\lambda_{a,\,n}\,h_1)} + \frac{m2_n \cosh(\lambda_{a,\,n}\,(y+h_1))}{\cosh(\lambda_{a,\,n}\,h_1)}\right) \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\theta_{s,\,n}(x)}{{\lambda_{s,\,n}}^2} \left(-\frac{m3_n \sinh(\lambda_{s,\,n}\,(y+h_1))}{\sinh(\lambda_{s,\,n}\,h_1)} + \frac{m4_n \cosh(\lambda_{s,\,n}\,(y+h_1))}{\cosh(\lambda_{s,\,n}\,h_1)}\right) \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{a,\,n}(y)}{{\mu_{a,\,n}}^2} \left(\frac{n1_n \sinh(\mu_{a,\,n}\,(x-1.25))}{\sinh(0.25\,\mu_{a,\,n})} + \frac{n2_n \cosh(\mu_{a,\,n}\,(x-1.25))}{\cosh(0.25\,\mu_{a,\,n})}\right) \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{s,\,n}(y)}{{\mu_{s,\,n}}^2} \left(\frac{n3_n \sinh(\mu_{s,\,n}\,(x-1.25))}{\sinh(0.25\,\mu_{s,\,n})} + \frac{n4_n \cosh(\mu_{s,\,n}\,(x-1.25))}{\cosh(1.25\,\mu_{s,\,n})}\right),
\end{aligned}$$

$$\theta_{a,\,n}(x) = s_{a,\,n}\,(\sin(s_{a,\,n})\,\cos(s_{a,\,n}\,(4\,x-5)) - (4\,x-5)\,\cos(s_{a,\,n})\,\sin(s_{a,\,n}\,(4\,x-5))),$$

$$\theta_{s,\,n}(x) = s_{s,\,n}\,(\cos(s_{s,\,n})\sin(s_{s,\,n}\,(4\,x-5)) - (4\,x-5)\sin(s_{s,\,n})\cos(s_{s,\,n}\,(4\,x-5))).$$

3.2. Sınır Şartları ve Katsayıların Elde Edilmesi

Birinci bölge için sınır şartları aşağıdaki gibidir:

1. $\psi_1(0,y) = (\psi_1)_x(0,y) = 0,$
2. $\psi_1(x,0) = (\psi_1)_y(x,0) = 0,$
3. $\psi_1(x,h_2) = 0, (\psi_1)_y(x,h_2) = 1.$

Şimdi birinci bölge için yukarıda listelediğimiz şartları (3.1)' deki ψ_1 akış fonksiyonuna uygulayalım:

1. $\psi_1(0,y) = 0$ için

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\xi_{a,n}(y)(-e_n+f_n)}{{\mu_{a,n}}^2} + \frac{\xi_{s,n}(y)(-g_n+h_n)}{{\mu_{s,n}}^2}\right] = 0. \tag{3.2}$$

2. $\frac{\partial\psi_1}{\partial x}(0,y) = 0$ için

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(e_n\frac{\coth(0.25\mu_{a,n})}{\mu_{a,n}} - f_n\frac{\tanh(0.25\mu_{a,n})}{\mu_{a,n}}\right)\xi_{a,n}(y) +$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(g_n\frac{\coth(0.25\mu_{s,n})}{\mu_{s,n}} - h_n\frac{\tanh(0.25\mu_{s,n})}{\mu_{s,n}}\right)\xi_{s,n}(y) = 0. \tag{3.3}$$

3. $\psi_1(x,0) = 0$ için

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\phi_{a,n}(x)(-a_n+b_n)}{{\lambda_{a,n}}^2} + \frac{\phi_{s,n}(x)(-c_n+d_n)}{{\lambda_{s,n}}^2}\right] = 0. \tag{3.4}$$

4. $\frac{\partial\psi_1}{\partial y}(x,0) = 0$ için

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(a_n\frac{\coth(\lambda_{a,n}h_2)}{\lambda_{a,n}} - b_n\frac{\tanh(\lambda_{a,n}h_2)}{\lambda_{a,n}}\right)\phi_{a,n}(x) +$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(c_n\frac{\coth(\lambda_{s,n}h_2)}{\lambda_{s,n}} - d_n\frac{\tanh(\lambda_{s,n}h_2)}{\lambda_{s,n}}\right)\phi_{s,n}(x) = 0. \tag{3.5}$$

5. $\psi_1(x, 2h_2) = 0$ için

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\phi_{a,n}(x)(a_n + b_n)}{{\lambda_{a,n}}^2} + \frac{\phi_{s,n}(x)(c_n + d_n)}{{\lambda_{s,n}}^2} \right] = 0. \tag{3.6}$$

6. $\frac{\partial \psi_1}{\partial y}(x, 2h_2) = 1$ için

$$\begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_n \frac{\coth(\lambda_{a,n}h_2)}{\lambda_{a,n}} + b_n \frac{\tanh(\lambda_{a,n}h_2)}{\lambda_{a,n}} \right) \phi_{a,n}(x) + \\ &\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(c_n \frac{\coth(\lambda_{s,n}h_2)}{\lambda_{s,n}} + d_n \frac{\tanh(\lambda_{s,n}h_2)}{\lambda_{s,n}} \right) \phi_{s,n}(x) = 1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Çift dikleştirme yöntemini kullanmadan önce bazı ön hazırlıklarımızı yapalım. Elde edilen bu denklemleri vektörel formda yazalım:

$$\xi^n_{1,a}(y) = \xi_{a,n}(y), \xi^n_{2,a}(y) = \frac{\frac{d^2\xi_{a,n}(y)}{dy^2}}{\mu^2_{a,n}},$$

ve

$$\xi^n_{1,s}(y) = \xi_{s,n}(y), \xi^n_{2,s}(y) = \frac{\frac{d^2\xi_{s,n}(y)}{dy^2}}{\mu^2_{s,n}},$$

olmak üzere (3.2) ve (3.3) denklemleri aşağıdaki formda yazılır:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ (-e_n + f_n) \begin{bmatrix} \xi^n_{1,a} \\ \xi^n_{2,a} \end{bmatrix} + \left(e_n \left(\frac{\coth(0.25\mu_{a,n})}{\mu_{a,n}} + 1 \right) - f_n \left(\frac{\tanh(0.25\mu_{a,n})}{\mu_{a,n}} + 1 \right) \right) \begin{bmatrix} \xi^n_{1,a} \\ 0 \end{bmatrix} \right\} + \\ &\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ (-g_n + h_n) \begin{bmatrix} \xi^n_{1,s} \\ \xi^n_{2,s} \end{bmatrix} + \left(g_n \left(\frac{\coth(0.25\mu_{s,n})}{\mu_{s,n}} + 1 \right) - h_n \left(\frac{\tanh(0.25\mu_{s,n})}{\mu_{s,n}} + 1 \right) \right) \begin{bmatrix} \xi^n_{1,s} \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Benzer şekilde

$$\phi^n_{1,a}(x) = \phi_{a,n}(x), \phi^n_{2,a}(x) = \frac{\frac{d^2\phi_{a,n}(x)}{dx^2}}{\lambda^2_{a,n}},$$

ve

$$\phi^n_{1,s}(x) = \phi_{s,n}(x), \phi^n_{2,s}(x) = \frac{\frac{d^2\phi_{s,n}(x)}{dx^2}}{\lambda^2_{s,n}},$$

dönüşümleri olmak üzere (3.4) ve (3.5) denklemleri,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ (-a_n + b_n) \begin{bmatrix} \phi^n_{1,a} \\ \phi^n_{2,a} \end{bmatrix} + \left(a_n \left(\frac{\coth(\lambda_{a,n}h_2)}{\lambda_{a,n}} + 1 \right) - b_n \left(\frac{\tanh(\lambda_{a,n}h_2)}{\lambda_{a,n}} + 1 \right) \right) \begin{bmatrix} \phi^n_{1,a} \\ 0 \end{bmatrix} \right\} + \\ &\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ (-c_n + d_n) \begin{bmatrix} \phi^n_{1,s} \\ \phi^n_{2,s} \end{bmatrix} + \left(c_n \left(\frac{\coth(\lambda_{s,n}h_2)}{\lambda_{s,n}} + 1 \right) - d_n \left(\frac{\tanh(\lambda_{s,n}h_2)}{\lambda_{s,n}} + 1 \right) \right) \begin{bmatrix} \phi^n_{1,s} \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.9}$$

olarak (3.6) ve (3.7) denklemleri de

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{(a_n+b_n)\begin{bmatrix}\phi_{1,a}^n\\ \phi_{2,a}^n\end{bmatrix}+\left(a_n\left(\frac{\coth(\lambda_{a,n}h_2)}{\lambda_{a,n}}-1\right)+b_n\left(\frac{\tanh(\lambda_{a,n}h_2)}{\lambda_{a,n}}-1\right)\right)\begin{bmatrix}\phi_{1,a}^n\\ 0\end{bmatrix}\right\}+$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{(c_n+d_n)\begin{bmatrix}\phi_{1,s}^n\\ \phi_{2,s}^n\end{bmatrix}+\left(c_n\left(\frac{\coth(\lambda_{s,n}h_2)}{\lambda_{s,n}}-1\right)+d_n\left(\frac{\tanh(\lambda_{s,n}h_2)}{\lambda_{s,n}}-1\right)\right)\begin{bmatrix}\phi_{1,s}^n\\ 0\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \tag{3.10}$$

şeklinde yazılır. Şimdi elde edilen denklemlere Smith [43] tarafından verilen çift dikleştirme yöntemini uygulayalım. Bunun için (3.8) denklemine

$$\int_0^{2h_2}\begin{bmatrix}\gamma_1^m & \gamma_2^m\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}.\\ .\end{pmatrix}dy,$$

operatörü (3.9) ve (3.10) denklemlerine ise

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}\gamma_1^m & \gamma_2^m\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}.\\ .\end{pmatrix}dx,$$

operatörü uygulanırsa aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$(-e_m+f_m)K_m+\sum_{n=-nm}^{nm}\left(e_n\left(\frac{\coth(0.25\mu_{a,n})}{\mu_{a,n}}+1\right)-f_n\left(\frac{\tanh(0.25\mu_{a,n})}{\mu_{a,n}}+1\right)\right)L_{mn}=0,$$

$$(-g_m+h_m)M_m+\sum_{n=-nm}^{nm}\left(g_n\left(\frac{\coth(0.25\mu_{s,n})}{\mu_{s,n}}+1\right)-h_n\left(\frac{\tanh(0.25\mu_{s,n})}{\mu_{s,n}}+1\right)\right)N_{mn}=0,$$

$$(-a_m+b_m)O_m+\sum_{n=-nm}^{nm}\left(a_n\left(\frac{\coth(\lambda_{a,n}h_2)}{\lambda_{a,n}}+1\right)-b_n\left(\frac{\tanh(\lambda_{a,n}h_2)}{\lambda_{a,n}h_2}+1\right)\right)L_{mn}=0,$$

$$(-c_m+d_m)P_m+\sum_{n=-nm}^{nm}\left(c_n\left(\frac{\coth(\lambda_{s,n}h_2)}{\lambda_{s,n}}+1\right)-d_n\left(\frac{\tanh(\lambda_{s,n}h_2)}{\lambda_{s,n}h_2}+1\right)\right)N_{mn}=0,$$

$$(a_m+b_m)O_m+\sum_{n=-nm}^{nm}\left(a_n\left(\frac{\coth(\lambda_{a,n}h_2)}{\lambda_{a,n}}-1\right)+b_n\left(\frac{\tanh(\lambda_{a,n}h_2)}{\lambda_{a,n}h_2}-1\right)\right)L_{mn}=1,$$

$$(c_m+d_m)P_m+\sum_{n=-nm}^{nm}\left(c_n\left(\frac{\coth(\lambda_{s,n}h_2)}{\lambda_{s,n}}-1\right)+d_n\left(\frac{\tanh(\lambda_{s,n}h_2)}{\lambda_{s,n}h_2}-1\right)\right)N_{mn}=0.$$

Şimdi ψ_2 için sınır şartlarını yazalım:

1. $\psi_2(1,y)=(\psi_2)_x(1,y)=0$

2. $\psi_2(x,2h_2)=0,(\psi_2)_y(x,2h_2)=1$

ψ_1 de olduğu gibi sınır şartlarının her biri ψ_2 için uygulanıp çift dikleştirme yöntemi uygulanırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$(k_m+l_m)R_m+\sum_{n=-nm}^{nm}\left(k_n\left(\frac{\coth(\lambda_{a,n}h_2)}{\lambda_{a,n}}-1\right)+l_n\left(\frac{\tanh(\lambda_{a,n}h_2)}{\lambda_{a,n}h_2}-1\right)\right)S_{mn}=1,$$

$$(m_m + n_m)\, T_m + \sum_{n=-nm}^{nm} \left(m_n \left(\frac{\coth(\lambda_{s,n} h_2)}{\lambda_{s,n}} - 1 \right) + n_n \left(\frac{\tanh(\lambda_{s,n} h_2)}{\lambda_{s,n} h_2} - 1 \right) \right) U_{mn} = 0,$$

$$(o_m + p_m)\, K_m + \sum_{n=-nm}^{nm} \left(o_n \left(\frac{\coth(0.25\mu_{a,n})}{\mu_{a,n}} - 1 \right) + p_n \left(\frac{\tanh(0.25\mu_{a,n})}{\mu_{a,n}} - 1 \right) \right) L_{mn} = 0,$$

$$(r_m + s_m)\, M_m + \sum_{n=-nm}^{nm} \left(r_n \left(\frac{\coth(0.25\mu_{s,n})}{\mu_{s,n}} - 1 \right) + s_n \left(\frac{\tanh(0.25\mu_{s,n})}{\mu_{s,n}} - 1 \right) \right) N_{mn} = 0.$$

ψ_1 ve ψ_2 için ayrı ayrı denklem sistemleri elde edildi. Ancak bu yeterli değildir. Kaviti içerisindeki akışın sürekliliğinin sağlanması gereklidir. Bunun için I. bölge ve II. bölge arasındaki eğri oyunca,($x = 0.5$), aşağıdaki şartlar sağlanmalıdır:

$$\psi_1(0.5, y) = \psi_2(0.5, y) \qquad \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(0.5, y) = \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(0.5, y),$$
$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2}(0.5, y) = \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2}(0.5, y) \quad \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x^3}(0.5, y) = \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x^3}(0.5, y),$$

Yukarıdaki şartlar ve çift dikleştirme yöntemi ψ_1 ve ψ_2 akış fonksiyonuna uygulanırsa 4 denklem elde edilir. Bu denklemler aşağıdaki gibidir. Birinci denklem,

$$\begin{aligned}(e_m + f_m + o_m - p_m) K_m - &\sum_{n=-nm}^{nm} 2b_n \frac{\cos^2(s_{a,n})}{\cosh(\lambda_{a,n} h_2)} \int_0^{2h_2} \psi_{2,a} \cosh(\lambda_{a,n}(y - h_2))\, dy \\ + &\sum_{n=-nm}^{nm} 2d_n \frac{\sin^2(s_{s,n})}{\cosh(\lambda_{s,n} h_2)} \int_0^{2h_2} \psi_{2,a} \cosh(\lambda_{s,n}(y - h_2))\, dy \\ + &\sum_{n=-nm}^{nm} 2l_n \frac{\cos^2(s_{a,n})}{\cosh(\lambda_{a,n} h_2)} \int_0^{2h_2} \psi_{2,a} \cosh(\lambda_{a,n}(y - h_2))\, dy \\ + &\sum_{n=-nm}^{nm} 2n_n \frac{\sin^2(s_{s,n})}{\cosh(\lambda_{s,n} h_2)} \int_0^{2h_2} \psi_{2,a} \cosh(\lambda_{s,n}(y - h_2))\, dy \end{aligned} \tag{3.11}$$

dir. Burada,

$$\psi_{2,a} = s_{a,n} \left(\sin(s_{a,n}) \cos\left(s_{a,n} \frac{y - h_2}{h_2} \right) - \left(\frac{y - h_2}{h_2} \right) \cos(s_{a,n}) \sin\left(s_{a,n} \frac{y - h_2}{h_2} \right) \right).$$

İkinci denklem,

$$(g_m + h_m + r_m - s_m)M_m - \sum_{n=-nm}^{nm} 2a_n \frac{\cos^2(s_{a,n})}{\sinh(\lambda_{a,n}h_2)} \int_0^{h_2} \psi_{2,s} \sinh(\lambda_{a,n}(y-h_2))\,dy + \sum_{n=-nm}^{nm} 2c_n \frac{\sin^2(s_{s,n})}{\sinh(\lambda_{s,n}h_2)} \int_0^{h_2} \psi_{2,s} \sinh(\lambda_{s,n}(y-h_2))\,dy + \sum_{n=-nm}^{nm} 2k_n \frac{\cos^2(s_{a,n})}{\sinh(\lambda_{a,n}h_2)} \int_0^{h_2} \psi_{2,s} \sinh(\lambda_{a,n}(y-h_2))\,dy + \sum_{n=-nm}^{nm} 2m_n \frac{\sin^2(s_{s,n})}{\sinh(\lambda_{s,n}h_2)} \int_0^{h_2} \psi_{2,s} \sinh(\lambda_{s,n}(y-h_2))\,dy \tag{3.12}$$

dır. Burada

$$\psi_{2,s} = s_{s,n}\left(\cos(s_{s,n})\sin\left(s_{s,n}\frac{y-h_2}{h_2}\right) - \left(\frac{y-h_2}{h_2}\right)\sin(s_{s,n})\cos\left(s_{s,n}\frac{y-h_2}{h_2}\right)\right).$$

Üçüncü denklem,

$$\mu_{a,n}\left(\coth(0.25\mu_{a,n})(e_n - o_n) + \tanh(0.25\mu_{a,n})(f_n + p_n)\right)K_m = - \sum_{n=-nm}^{nm} 8b_n \frac{{s_{a,n}}^2(s_{a,n})}{\cosh(\lambda_{a,n}h_2)} \int_0^{h_2} \psi_{2,a} \cosh(\lambda_{a,n}(y-h_2))\,dy + \sum_{n=-nm}^{nm} 8d_n \frac{{s_{s,n}}^2(s_{s,n})}{\cosh(\lambda_{s,n}h_2)} \int_0^{h_2} \psi_{2,a} \cosh(\lambda_{s,n}(y-h_2))\,dy + \sum_{n=-nm}^{nm} 8l_n \frac{{s_{a,n}}^2(s_{a,n})}{\cosh(\lambda_{a,n}h_2)} \int_0^{h_2} \psi_{2,a} \cosh(\lambda_{a,n}(y-h_2))\,dy + \sum_{n=-nm}^{nm} 8n_n \frac{{s_{s,n}}^2(s_{s,n})}{\cosh(\lambda_{s,n}h_2)} \int_0^{h_2} \psi_{2,a} \cosh(\lambda_{s,n}(y-h_2))\,dy. \tag{3.13}$$

Dördüncü denklem,

$$\begin{aligned}
&\mu_{s,n}\left(\coth\left(0.25\mu_{s,n}\right)\left(g_n-r_n\right)+\tanh\left(0.25\mu_{s,n}\right)\left(h_n+s_n\right)\right)M_m= \\
&-\sum_{n=-nm}^{nm} 8a_n\frac{{s_{s,n}}^2\left(s_{a,n}\right)}{\sinh\left(\lambda_{s,n}h_2\right)}\int_0^{h_2}\psi_{2,s}\sin\left(\lambda_{a,n}\left(y-h_2\right)\right)dy \\
&+\sum_{n=-nm}^{nm} 8c_n\frac{{s_{s,n}}^2\left(s_{s,n}\right)}{\sinh\left(\lambda_{s,n}h_2\right)}\int_0^{h_2}\psi_{2,s}\sinh\left(\lambda_{s,n}\left(y-h_2\right)\right)dy \\
&+\sum_{n=-nm}^{nm} 8k_n\frac{{s_{s,n}}^2\left(s_{a,n}\right)}{\sinh\left(\lambda_{s,n}h_2\right)}\int_0^{h_2}\psi_{2,s}\sinh\left(\lambda_{a,n}\left(y-h_2\right)\right)dy \\
&+\sum_{n=-nm}^{nm} 8m_n\frac{{s_{s,n}}^2\left(s_{s,n}\right)}{\sinh\left(\lambda_{s,n}h_2\right)}\int_0^{h_2}\psi_{2,s}\sinh\left(\lambda_{s,n}\left(y-h_2\right)\right)dy. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Şu ana kadar toplam 14 denklem elde ettik. Bilinmeyen sayısı 32' dir. Benzer şekilde ψ_3 ve ψ_4 arasında sınır şartları ve çift dikleştirme yöntemi uygulanırsa 14 denklem daha elde edilir. Son olarak ψ_2 ve ψ_3 arasında süreklilik şartları uygulandığı zaman 4 tane daha denklem elde edilir ki toplam 32 adet denklem elde edilmiş olur. Bu denklem sistemi sonlu nm değeri için çözülüp, sınır değer problemimizin çözümü elde edildi. Dolayısıyla farklı görüntü oranları için kaviti içerisindeki akış modelleri ve bu akış modelleri arasındaki bağlantılar, girdap oluşum mekanizması ve ayırma çizgilerinin hareketi incelendi.

3.3. $S = 1$ İçin Z-Şeklindeki Kaviti İçerisindeki Akış Yapıları

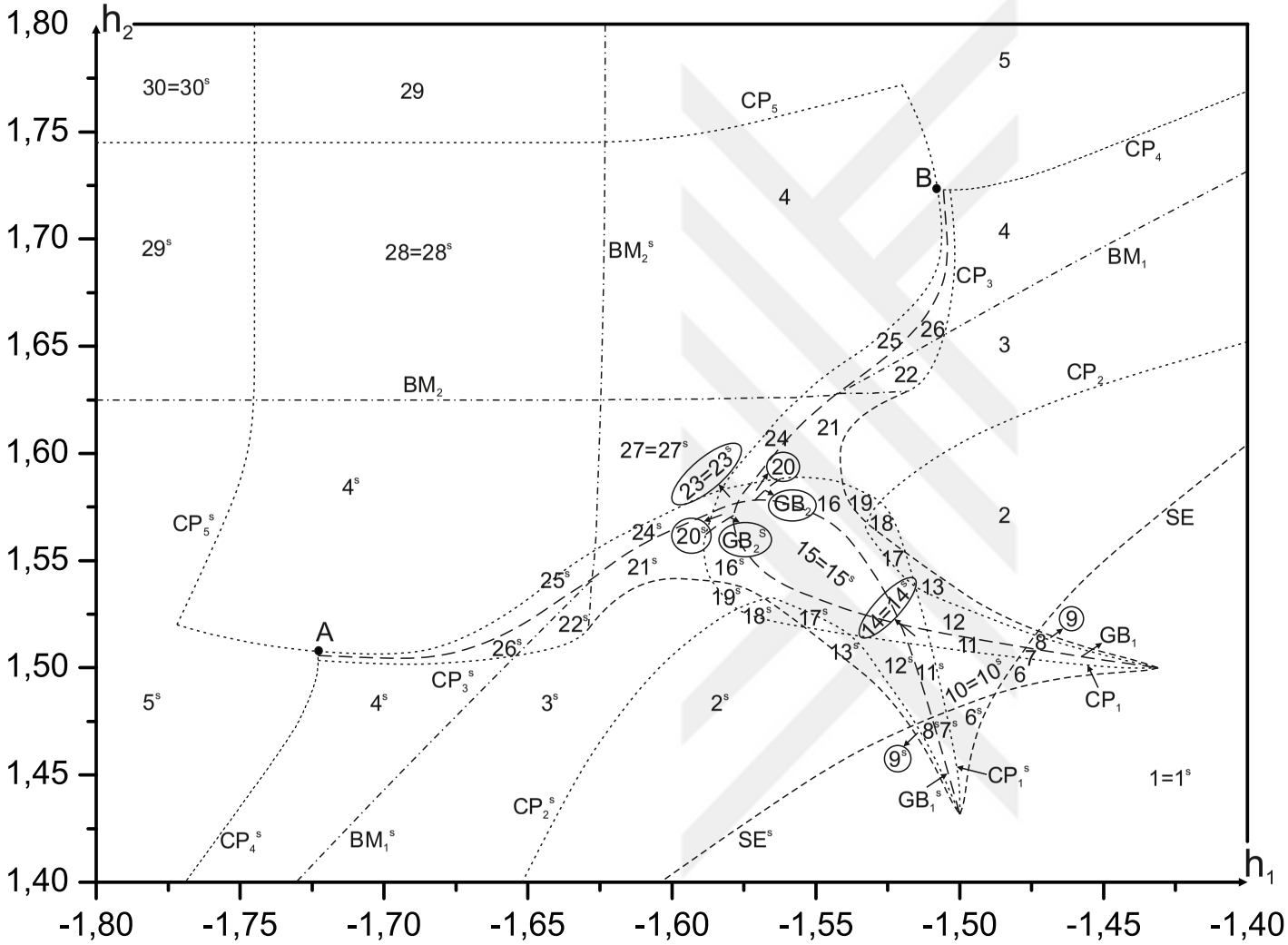
Alt kaviti uzunluğu $2h_1 = h_1^*$ ve üst kaviti uzunluğu $2h_2 = h_2^*$ olan Z-şeklindeki kaviti içerisindeki akış modelleri (h_1^*, h_2^*) parametrelerinin değişimiyle elde edilmektedir. Akış modelleri, (h_1^*, h_2^*) parametrelerin belli bir değer aralığında kararlı iken, bu parametrelerin değişimiyle kararsız (dejenere) olup başka bir akış modeline dönüşmektedir. Dejenere noktaların oluşturduğu eğriye çatallanma eğrisi, çatallanma eğrilerin oluşturduğu uzaya ise kontrol uzay diyagramı adı verilir. Bu diyagramı oluşturmak için Bölüm 3.1' de elde edilen akış fonksiyonlarının bu bölümde uygulanan sınır koşullarıyla biharmonik denklem çözülerek elde edildi.

İlk olarak, (h_1^*, h_2^*) kontrol uzay diyagramı oluşturuldu. Daha sonra her bir bölgedeki akış yapıları elde edildi. Bu akış yapıları incelenerek kaviti içerisindeki girdap sayısındaki artış için meydana gelen çatallanma serileri verildi. Kaviti içerisindeki girintili nokta civarında eğri analizi yapıldı ve mevcut akış yapıları Bölüm 1.4' de verilen eşleme yöntemi ile yeniden elde edildi. Son olarak Reynolds sayısının kavitide meydana gelen akış yapılarına etkisinin araştırılması için $Re = 50$ için kontrol uzay diyagramı oluşturularak aradaki farklar ifade edildi.

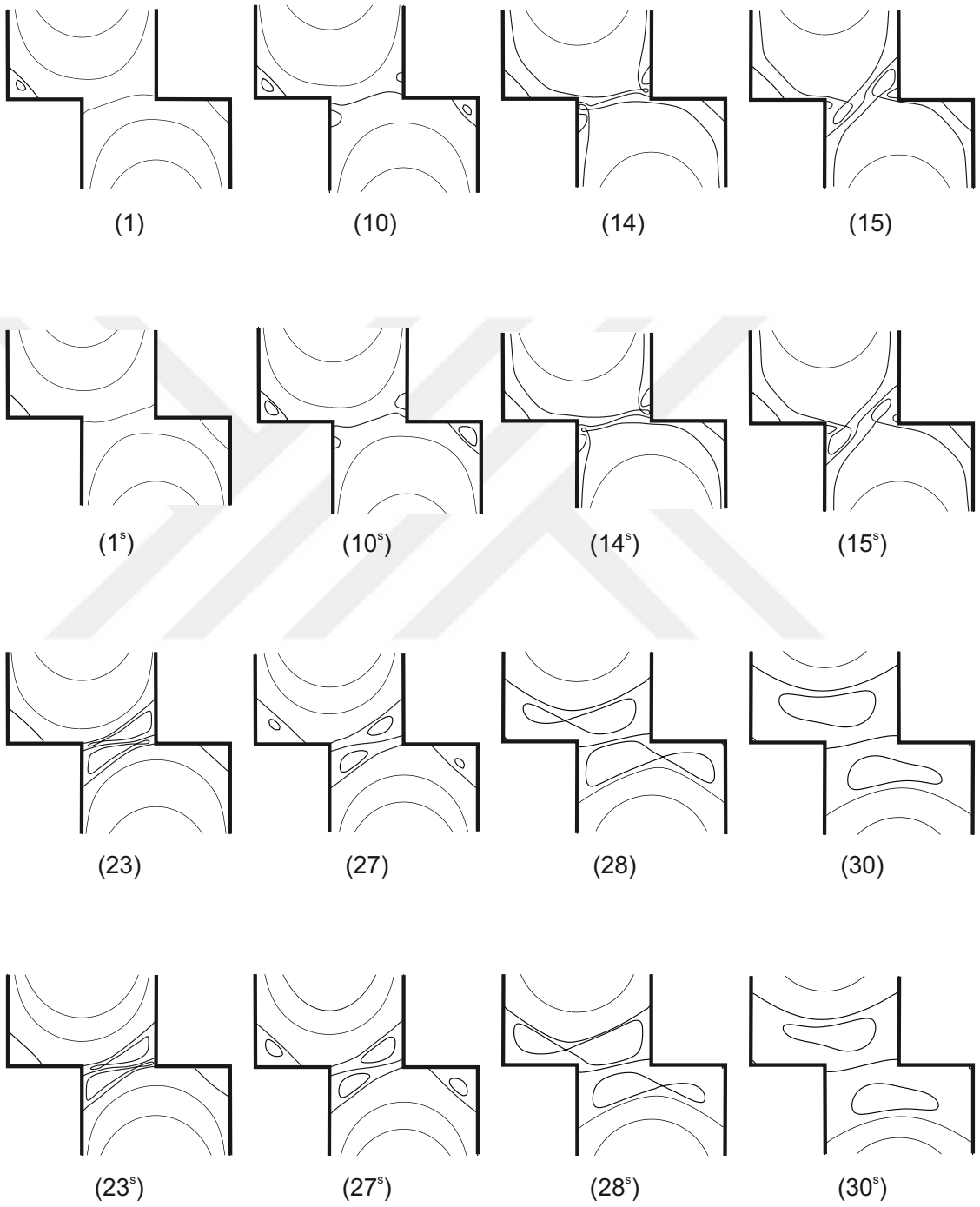
Kontrol uzay diyagramı girintili ve çıkıntılı köşeleri içeren $-1.8 \leq h_1^* \leq -1.4$ ve $1.4 \leq h_2^* \leq 1.8$ aralığında elde edilmiştir (Şekil 3.2). Bu aralık dışında, kaviti içerisindeki akış yapıları ve onların çatallanmaları dikdörtgensel kavitininkiyle benzer gelmektedir, bu nedenle kaviti yükseklilikleri bu aralıklarla sınırlandırılmıştır. Oluşturulan kontrol uzay diyagramında, üst kaviti için 30, alt kaviti için 30 olmak üzere toplam 60 adet akış yapısı elde edildi. Ancak bazı akış yapıları topolojik olarak aynıdır. Yani bir (h_1^*, h_2^*) değerinde üst kavitide meydana gelen yapı ile alt kavitide meydana gelen yapı topolojik olarak benzerdir. Bu yapılar Şekil 3.3 'de verilmiştir.

Önemli olan sonuçlardan birisi de, Z-şeklindeki sınır değer problemi simetrik olmamasına rağmen, kontrol uzay diyagramı $y = -x$ doğrusuna göre simetrik gelmektedir. Dolayısıyla, Z-şeklindeki kavitinin üst bölgesinde meydana gelen girdap oluşum mekanizmasının simetrik değerler için kavitinin alt bölgesinde de meydana gelmektedir. Örneğin kontrol uzay diyagramında CP_2 doğrusunun üstündeki 3. bölgesinde $(h_1^*, h_2^*) = (-1.47, 1.65)$ noktasında görülen akış modeli (Şekil 3.7a-(3)), diyagramda 3^s ile gösterilen bölgede kavitinin alt bölgesinde $(h_1^*, h_2^*) = (-1.65, 1.47)$ noktasında görülmektedir (Şekil 3.7b-(3^s)). Bu yüzden kaviti içerisindeki girdap oluşum mekanizması sadece kavitinin üst bölgesi için elde edilmiş olup, simetrik olduğundan dolayı benzer ifadeler ve akış topolojileri kavitinin alt bölgesi için de geçerlidir.

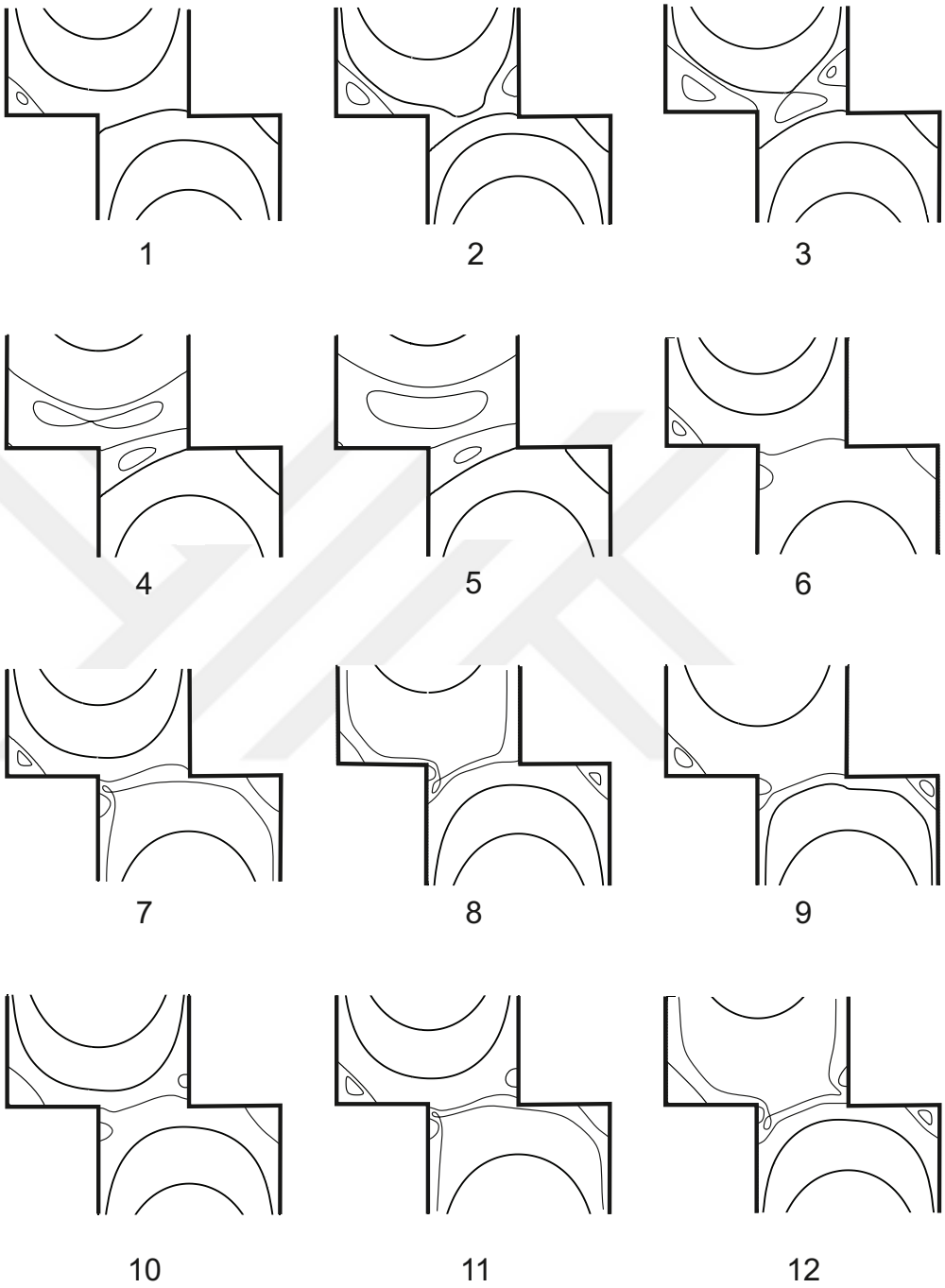
Kapakları aynı yönde hareket eden Z-şeklindeki kavitideki girdap oluşumu için iki temel çatallanma senaryosu gözlendi. İlk senaryo, girintili köşe



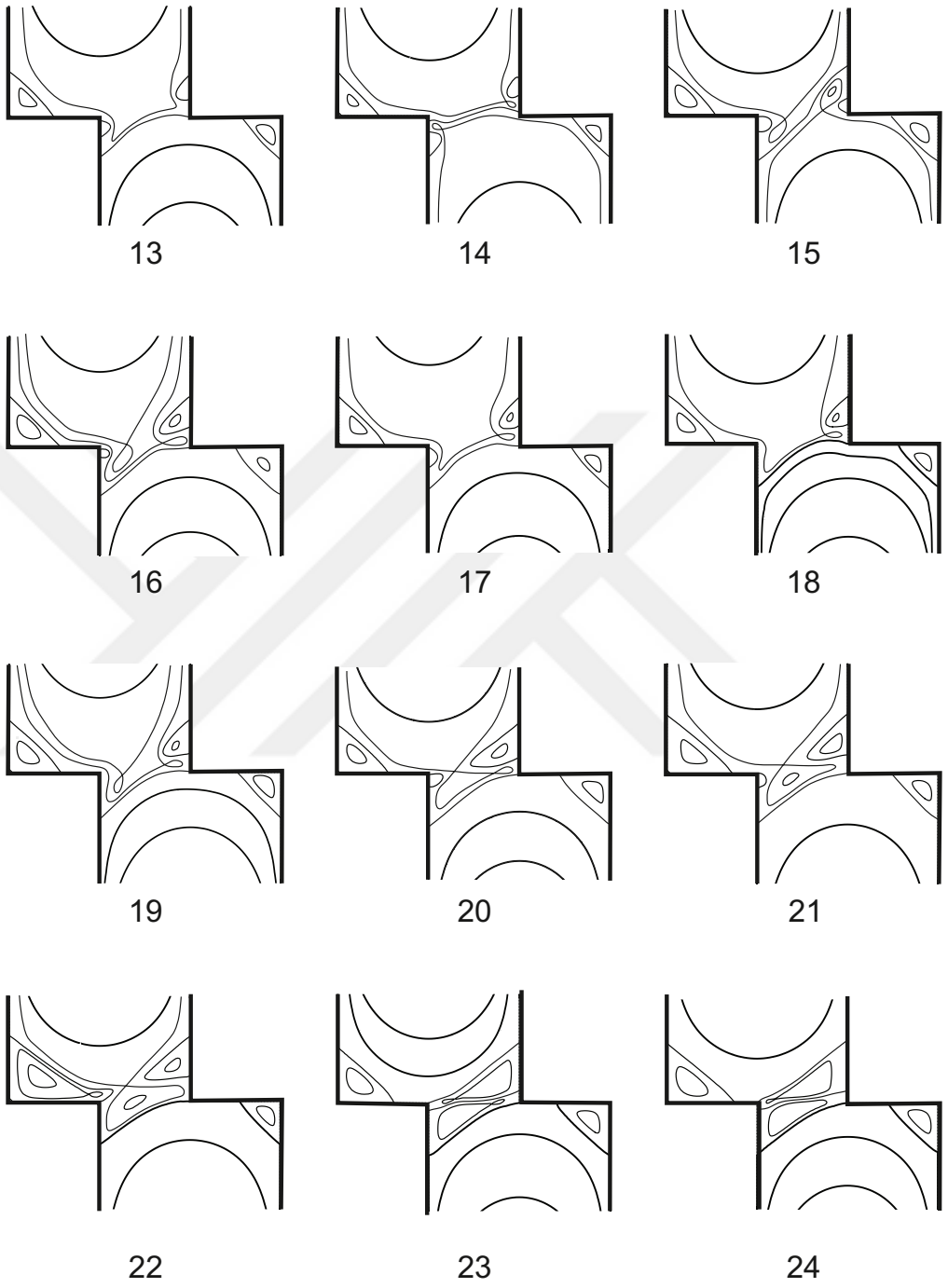
Şekil 3.2. $-1.8 \leq h_1^* \leq -1.4$ ve $1.4 \leq h_2^* \leq 1.8$ aralığında Z-şeklindeki kaviti için çatallanma eğrileri. (h_1^*, h_2^*) parametre uzayı 30 alt kaviti 30 üst kaviti olmak üzere 60 bölgeye bölünmüştür. Her bir bölge numarası Şekil 3.4 ve Şekil 3.5′ de verilen akış yapılarıyla aynıdır. Topolojik olarak aynı olan bölge numaralandırmasında eşitlik kullanılmıştır.



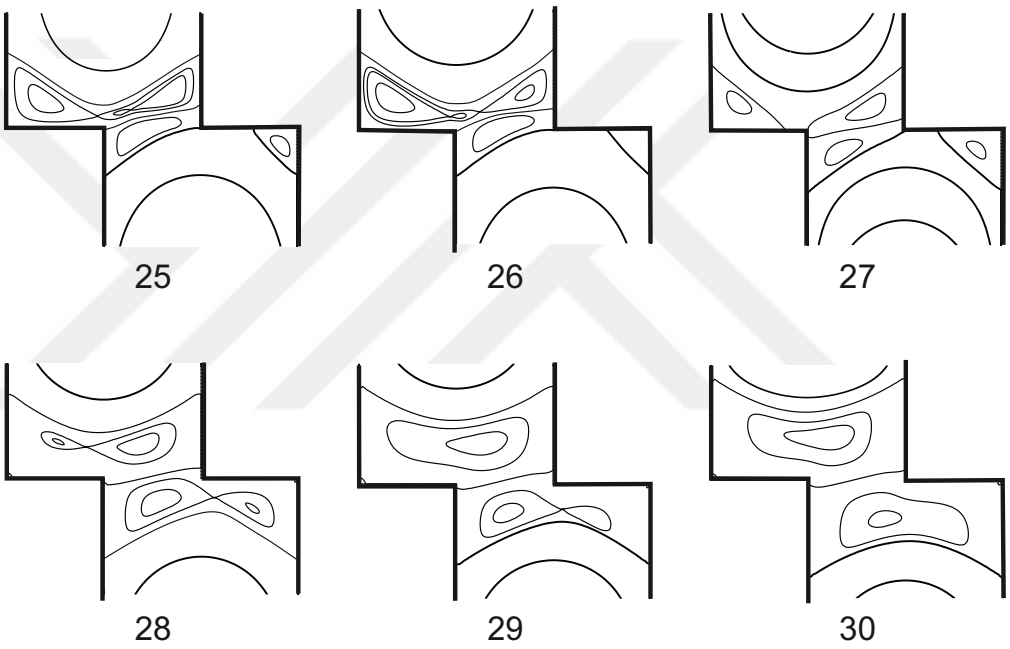
Şekil 3.3. Z-Şeklindeki kaviti içerisinde alt kaviti ve üst kavitide meydana gelen topolojik olarak birbirine eş akış yapılarının gösterimi.



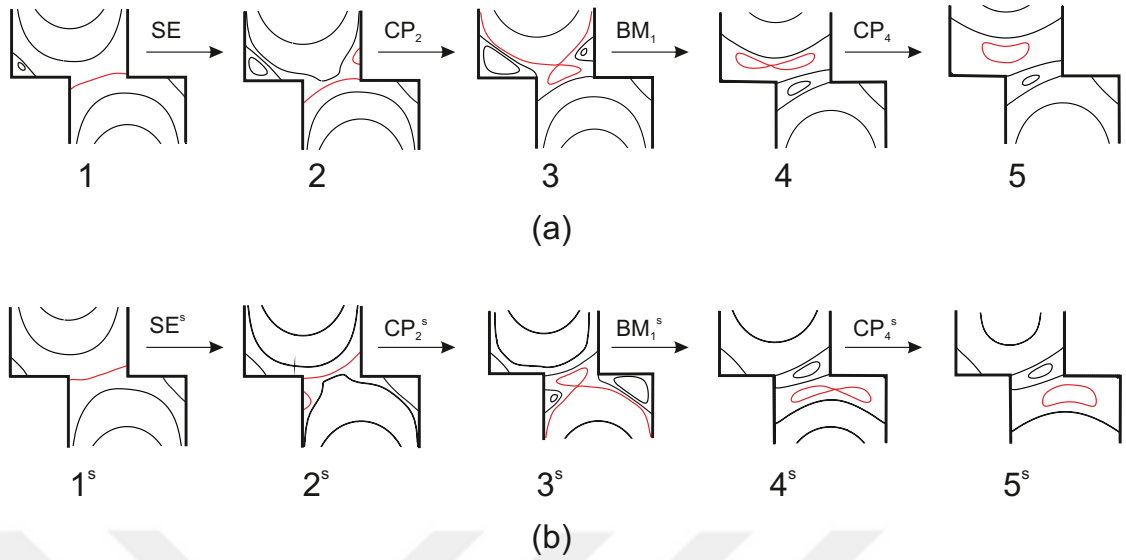
Şekil 3.4. Z-Şeklindeki kaviti içerisinde elde edilen akış yapıları. (1) $h_1^* = -1.4, h_2^* = 1.5$, (2) $h_1^* = -1.47, h_2^* = 1.59$, (3) $h_1^* = -1.47, h_2^* = 1.65$, (4) $h_1^* = -1.54, h_2^* = 1.71$, (5) $h_1^* = -1.53, h_2^* = 1.785$, (6) $h_1^* = -1.475, h_2^* = 1.5$, (7) $h_1^* = -1.475, h_2^* = 1.5$, (8) $h_1^* = -1.47, h_2 = 1.512$, (9) $h_1^* = -1.467, h_2^* = 1.517$, (10) $h_1^* = -1.49, h_2^* = 1.5$, (11) $h_1^* = -1.5, h_2^* = 1.512$, (12) $h_1^* = -1.5, h_2^* = 1.525$.



Şekil 3.5. Z-Şeklindeki kaviti içerisinde elde edilen akış yapıları (devam): (13) $h_1^* = -1.51, h_2^* = 1.54$, (14) $h_1^* = -1.512, h_2^* = 1.514$, (15) $h_1^* = -1.545, h_2^* = 1.555$, (16) $h_1^* = -1.545, h_2^* = 1.57$, (17) $h_1^* = -1.52, h_2^* = 1.552$, (18) $h_1^* = -1.523, h_2^* = 1.562$, (19) $h_1^* = -1.53, h_2^* = 1.57$, (20) $h_1^* = -1.57, h_2^* = 1.584$, (21) $h_1^* = -1.545, h_2^* = 1.607$, (22) $h_1^* = -1.514, h_2^* = 1.644$, (23) $h_1^* = -1.578, h_2^* = 1.587$, (24) $h_1^* = -1.562, h_2^* = 1.612$.



Şekil 3.6. Z-Şeklindeki kaviti içerisinde elde edilen akış yapıları (devam): (25) $h_1^* = -1.536, h_2^* = 1.639$, (26) $h_1^* = -1.525, h_2^* = 1.65$, (27) $h_1^* = -1.595, h_2^* = 1.614$, (28) $h_1^* = -1.67, h_2^* = 1.715$, (29) $h_1^* = -1.69, h_2^* = 1.775$, (30) $h_1^* = -1.765, h_2^* = 1.791$.



Şekil 3.7. Kaviti içerisinde ikinci girdap için meydana gelen yapısal dönüşüm serisi (a) üst kaviti için, (b) alt kaviti için.

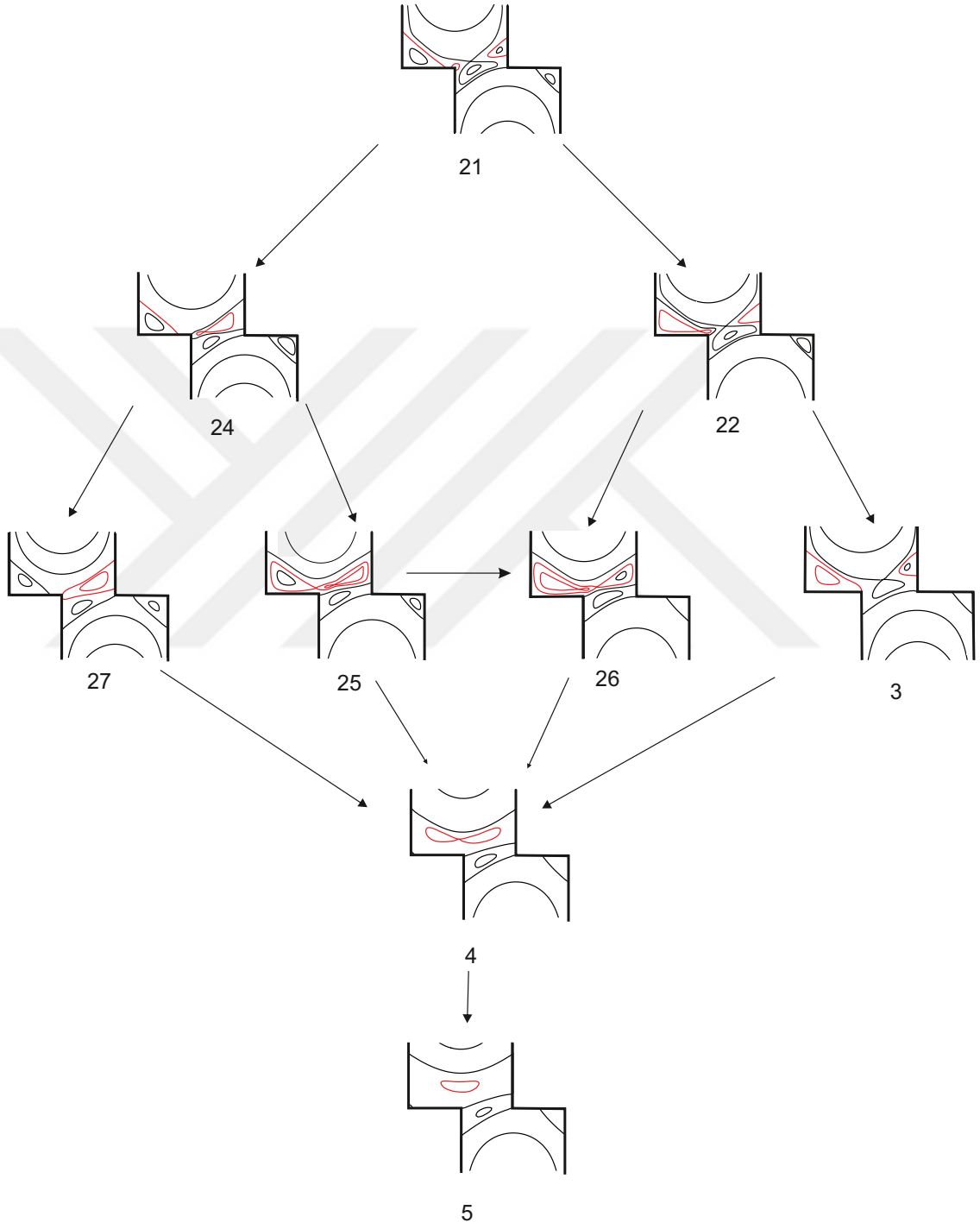
civarında sadece ayırma çizgisinin olması durumunda meydana gelmektedir. Şekil 3.7(a)-(1) de görüldüğü gibi Z-şekilli kaviti içerisinde biri alt biri üst kavitide olmak üzere iki ana girdap ve iki köşe girdabı vardır. İki ana girdap arasında köşe civarında ayırma çizgisi gözükmektedir. Üst kavitinin yüksekliği h_2 arttıkça, kavitinin üst bölgesinde ilk olarak sağ duvar üzerinde kenar girdabı (ayırma baloncuğu) ortaya çıkmaktadır (Şekil 3.7(a)-(2)). h_2^* yüksekliği biraz daha arttıkça sol köşe girdabı büyüyerek girinti noktasına yaklaşmaktadır. Ayrıca köşe noktası ile sağ duvar üzerinde bulunan ayırma baloncuğu arasında dirgen (pitchfork) çatallanması meydana gelerek eyer (saddle) noktası ortaya çıkmaktadır (Şekil 3.7(a)-(3)). Yüksekliğin daha da artmasıyla köşe girdabı ile duvar üzerindeki ayırma baloncuğu eyer noktasına yakınlaşmakta ve h_2^* yüksekliği BM_1 çatallanma eğrisinin üstüne çıktığında ise heteroklinik çatallanması (2 merkez 1 eyer noktası) oluşmaktadır (Şekil 3.7(a)-(4)). h_2^* yüksekliği CP_4 eğrisinin üzerine çıktığında ise iki merkez noktası, eyer noktasında birleşerek kavitinin üst kısmında ikinci ana girdabı meydana getirmektedir (Şekil 3.7(a)-(5)). Ayrıca köşe civarında bölgeyi ikiye ayıran ayırma çizgisi kavitinin alt ve üst kısmını birbirinden ayıran girdaba dönüşmüştür. Daha önce belirtildiği gibi kavitinin alt kısmı için de benzer çatallanma dizisinden sonra girdap sayısı ikiye çıkmaktadır (Şekil 3.7(b)).

Girdap oluşumu için ikinci temel senaryo ise Şekil 3.8 de görüldüğü gibi köşe civarında ayırma baloncuğu var olduğu zaman gözlenmektedir. Köşe civarında oluşan ayırma baloncuğu için yine iki durum söz konusudur. İlk durumda köşe noktasında oluşan ayırma baloncuğunun sağ duvar üzerinde bulunan kenar girdabı ile birbirine yakınlaşarak eyer noktasında birleşmektedir (Şekil 3.8-(24)). Böylece eyer noktası yerini seperatiks denilen yapıya bırakmıştır. Burada yine iki durum söz konusudur şöyle ki: sağ köşede oluşan bu seperatiks yapısı ya içerdiği alt girdaplar birbirine yakınlaşarak eyer noktasında birleşecek ve tam girdaba dönüşecek (Şekil 3.8-(27)) ya da sol köşede bulunan köşe girdabı ile yakınlaşarak heteroklinik çatallanmayı meydana getirecektir (Şekil 3.8-(25)). İkinci durum ise ayırma baloncuğunun sol köşe girdabıyla yakınlaşarak seperatiks yapısı oluşturmasıdır (Şekil 3.8-(22)). Oluşan bu seperatiks yapısı ya duvar üzerinde bulunan kenar girdabıyla eyer noktasında heteroklinik çatallanma meydana getirecek (Şekil 3.8-(26)) ya da tam girdaba dönüşüp ilk senaryodaki çatallanma dizisini gerçekleştirecektir (Şekil 3.8-(3)). Meydana gelen bu 4 farklı yapısal çatallanmadan sonra kavitinin üst kısmında bir tane merkez girdap ve seperatiks yapısı gözükmektedir ki h_2 yüksekliği arttırıldığında seperatiks yapısının içerdiği iki alt girdap birbiriyle eyer noktasında birleşerek ikinci ana girdaba dönüşecektir.

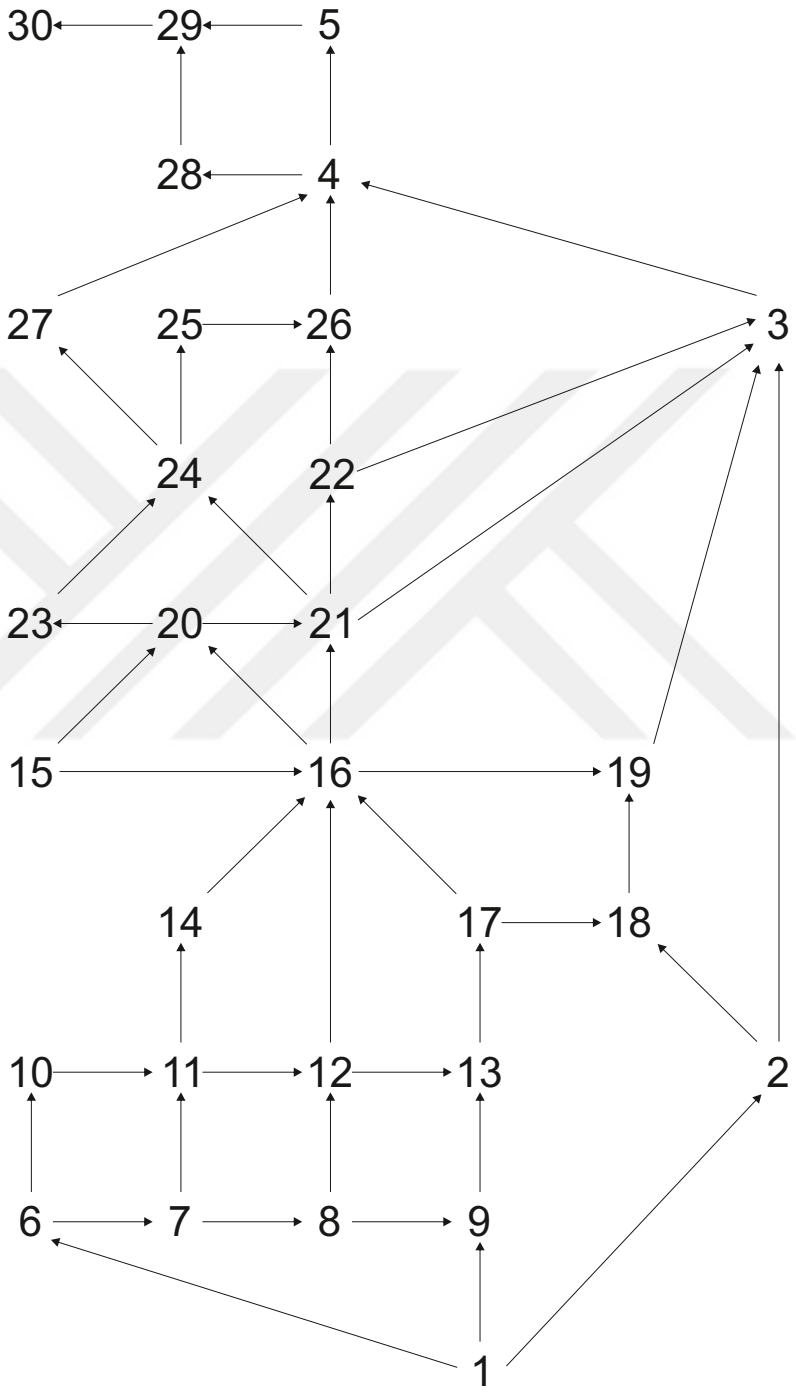
Böylece iki senaryonun sonunda Z-şeklindeki kavitinin üst kısmında var olan merkez girdap sayısının birden ikiye köşe civarında meydana gelen ayırma çizgisi veya ayırma baloncuğunun etkisi ile hangi yapısal çatallanmalar sonucunda çıktığı ortaya konmuştur. Girdap sayısının artması için kaviti içinde meydana gelen diğer tüm çatallanma serileri Şekil 3.9' da gösterilmiştir.

3.4. Köşe Civarında Detaylı Çalışma

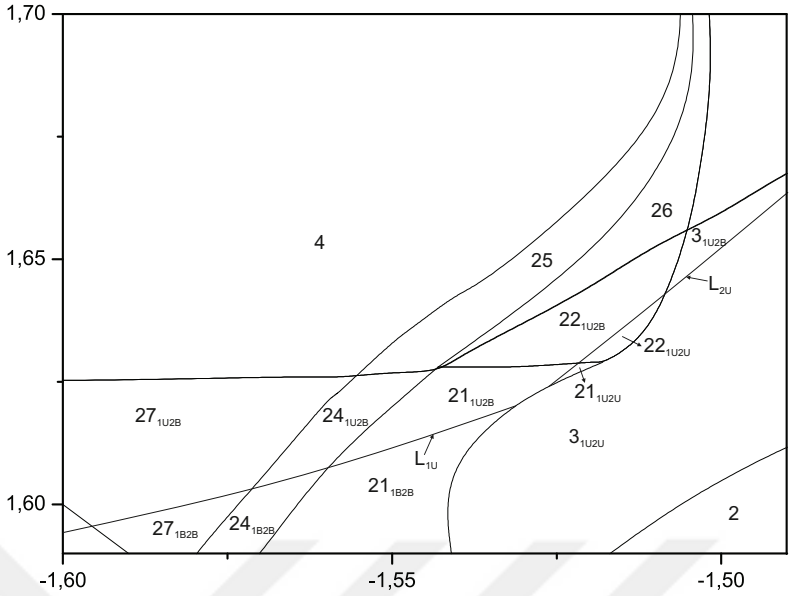
Kaviti problemlerinde kullanılan mevcut yöntemin girintili veya çıkıntılı köşe nokta civarındaki tekil noktalarda istenilen sonuçları vermemesi sıklıkla karşımıza çıkan bir zorluktur. Bu zorluğu aşmak ve köşe civarındaki çözümlerin iyileştirilmesi için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir [1, 3, 35]. Bu yöntemlerden biri de Çelik [45] tarafından "köşe civarındaki singüler noktaların eşleştirme



Şekil 3.8. Kaviti içerisinde ikinci girdap için meydana gelen yapısal dönüşüm serisi (devamı).



Şekil 3.9. Kavitinin üst bölgesinde ikinci girdap oluşması için gerekli yapısal dönüşümlerin tamamı.

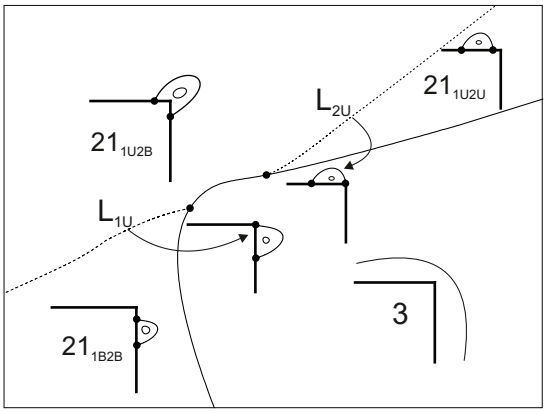


Şekil 3.10. Şekil 3.2′ de ayırma baloncuğu oluşan bölgenin büyütülmüş hali.

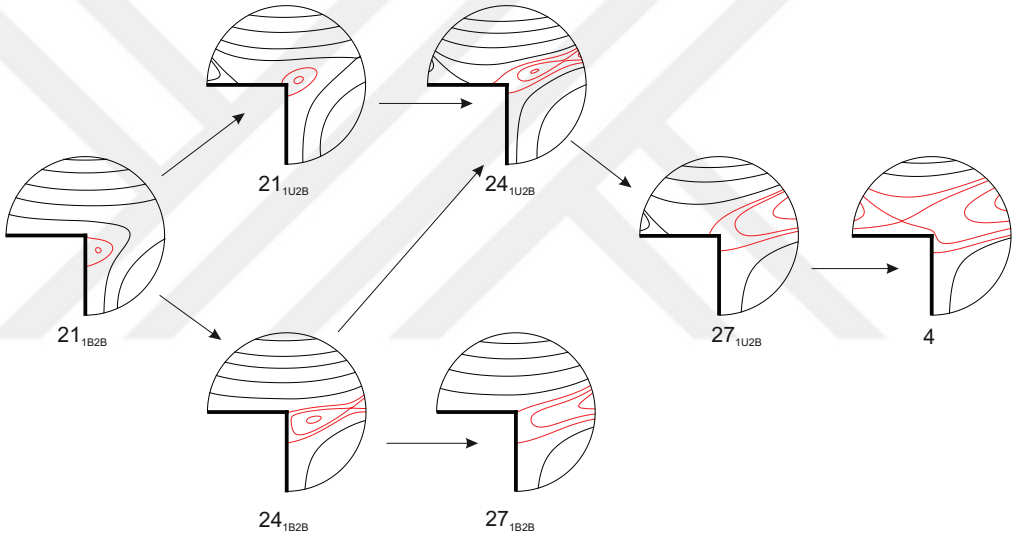
yöntemiyle çözümü" başlıklı tezinde verilmiştir. Bu yöntem ile tekillikten yeterince uzak noktalardaki nümerik veya analitik çözümler asimptotik eşleme yapılarak köşe civarındaki noktaların çözümleri bulunmuştur.

Düşük sayılı Reynolds akışlarda en ilgi çeken ve araştırma yapılan konulardan biri, akış içinde meydana gelen ayırma baloncuğudur. Bu akış yapısı ile başta uçak kanatları olmak üzere tabakalı akış ve kaviti akış problemlerinde karşılaşılmaktadır. Ayırma baloncuğunun boyut olarak küçük bir yapısı olması ve özellikle kaviti akış problemlerinde köşe noktalarında meydana gelmesi sebebiyle, ayırma baloncuğunun hangi yapısal çatallanmalara uğradığını ve girdap oluşumuna nasıl katkı sağladığını araştırmak oldukça zordur. Bundan dolayı bu bölümde asimptotik eşleme yöntemi kullanılarak mevcut analitik çözümler iyileştirilecek ve girintili köşe noktasında meydana gelen ayırma baloncuğunun (h_1^*, h_2^*) parametrelerinin değişimine bağlı olarak izlediği yapısal değişimler detaylı olarak incelenecektir. Ayrıca bu değişimlerin daha önce elde edilen kontrol uzay diyagramındaki eğrilere ve bu eğrilerin oluşturduğu bölgelere etkisi araştırılacaktır.

(h_1^*, h_2^*) kontrol uzay diyagramının ayırma baloncuğunun oluştuğu bölgenin bölgenin asimptotik eşleme yöntemi yardımıyla tekrar elde edilerek büyütülmüş kısmı Şekil 3.10′ de verilmiştir. Şekil 3.11′ de görüldüğü gibi öncelikle



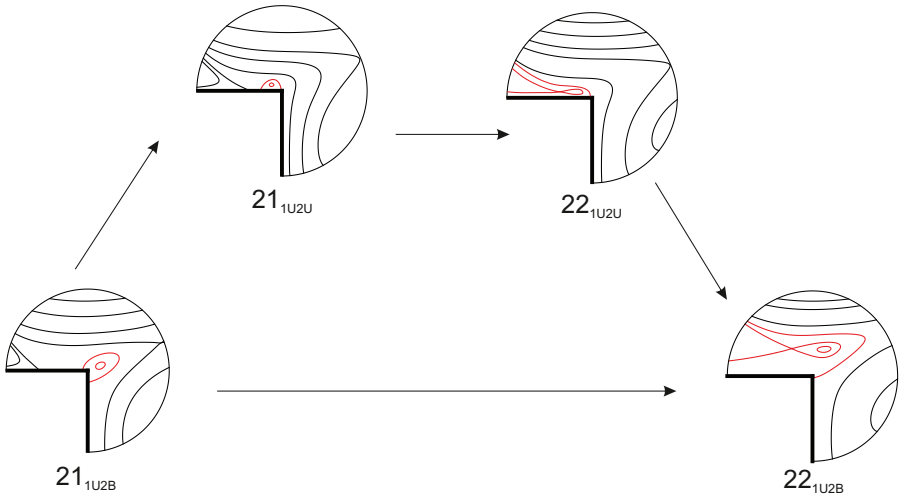
Şekil 3.11. Girintili köşe noktası yakınlarında meydana gelen ayırma baloncuğunun şematik gösterimi.



Şekil 3.12. Köşe noktası civarında meydana gelen ayırma baloncuğunun iç noktadaki diğer akış yapıları ile etkileşimi.

ayırma baloncuğunun her iki kolu da aşağıdadır (21_{1B2B}). Kontrol uzay diyagramında L_{1U} eğrisinin üstüne çıkıldığında ise ayırma baloncuğu yukarı doğru hareketlenmekte ve bir kolu köşe noktasını geçerek üst tarafa çıkmaktadır (21_{1U2B}). Eğer sağ tarafa doğru hareket edilip L_{2U} eğrisi geçilirse bu sefer ayırma baloncuğunun ikinci kolu da köşe noktasını geçip ayırma baloncuğu tamamen üst duvar üzerinde bulunmaktadır (21_{1U2U}). Köşe noktası civarında meydana gelen farklı çatallanmalar Şekil 3.12 ve Şekil 3.13' de gösterilmiştir.

Bölüm 2.2' de ikinci dereceden anti-simetrik akış için asimptotik çözüm incelenmiş, $r = 0$ da ayırma çizgisi olması için $a_1 = 0$ olması gerektiği



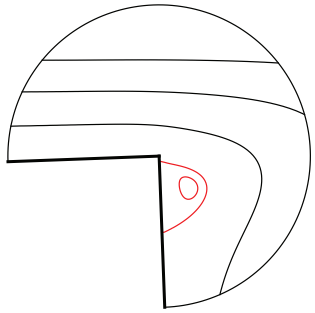
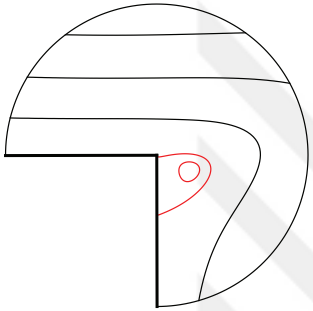
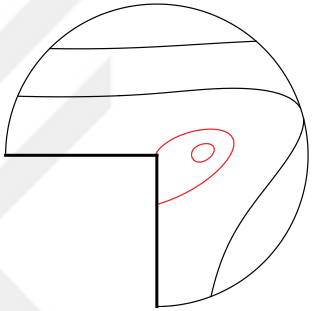
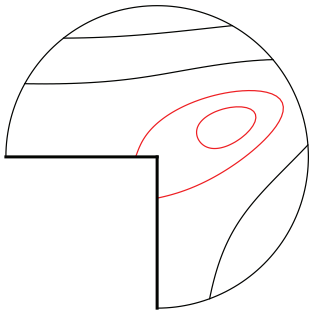
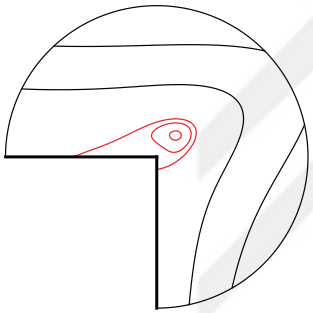
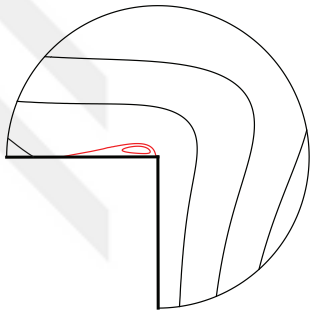
Şekil 3.13. Köşe noktası civarında meydana gelen ayırma baloncuğunun iç noktadaki diğer akış yapıları ile etkileşimi (devamı).

sonucunu elde edilmişti. Şekil 3.1' da kaviti içerisindeki köşe noktası civarında oluşan ayırma baloncuğunun hareketi incelenmiştir. Ayırma baloncuğunun her iki koluda aşağıda olduğu zaman $A_1 < 0$ dır. Ayırma baloncuğu köşeye hareketlendikçe A_1 değeri sıfıra yaklaşmakta ve bir kolu üst duvar üzerine geçtiği zaman A_1 değeri işaret değiştirerek pozitif olmaktadır. Benzer şekilde ayırma baloncuğunun ikinci kolu üst duvara çıktığında A_1 değeri işaret değiştirerek negatife dönmektedir.

3.5. Reynolds Sayısının Akış Yapılarına Etkisi

Bu bölümde, Navier-Stokes denkleminin yönettiği Z-şeklindeki kavitideki akış yapıları, stabilize edilmiş sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak sabit bir Reynolds sayısı için elde edilmiştir. Reynolds sayısını sabit olarak aldığımız için parametre uzayı yine iki boyutludur ve çatallanma eğrileri h_1^* ve h_2^* parametrelerine bağlı olarak yeniden elde edildi. Kontrol uzay diyagramı bir önceki bölümde olduğu gibi $-1.8 < h_1^* < -1.4$ ve $1.4 < h_2^* < 1.8$ aralığında elde edilmiştir. Bu aralığın küçük olması sebebiyle, Re sayısının büyük olması durumunda sistemde büyük değişimler meydana gelmektedir. Bu yüzden Reynolds sayısı sabit olarak $Re = 50$ olarak ele alınmış ve bu değer için (h_1^*, h_2^*) kontrol uzay diyagramı Şekil 3.14' deki gibi elde edilmiştir. Diyagramdaki bölge numaraları ve eğri isimleri Bölüm 3.2' deki $Re = 0$ için elde edilen

Tablo 3.1. Z-Şeklindeki kavitideki köşe civarında meydana gelen ayırma baloncuğunun duvar üzerindeki hareketi.

		
$A_1 = -1.35753 \times 10^{-4}$ $A_2 = (2.27257 + 4.33815i) \times 10^{-3}$ $B_1 = 2.41779 \times 10^{-3}$ $B_2 = (9.75624 - 2.73492i) \times 10^{-3}$	$A_1 = -3.77697 \times 10^{-5}$ $A_2 = (2.16164 + 4.06363i) \times 10^{-3}$ $B_1 = 1.47494 \times 10^{-3}$ $B_2 = (9.51261 - 2.47317i) \times 10^{-3}$	$A_1 = 1.79495 \times 10^{-5}$ $A_2 = (2.20025 + 3.88520i) \times 10^{-3}$ $B_1 = 8.94865 \times^{-4}$ $B_2 = (9.62353 - 2.29771i) \times^{-3}$
		
$A_1 = 6.32067 \times 10^{-5}$ $A_2 = (2.17221 + 3.74283i) \times 10^{-3}$ $B_1 = 4.02278 \times 10^{-4}$ $B_2 = (9.59814 - 2.14158i) \times 10^{-3}$	$A_1 = 3.25891 \times 10^{-5}$ $A_2 = (1.87882 + 3.55534i) \times 10^{-3}$ $B_1 = -1.40958 \times 10^{-4}$ $B_2 = (9.94141 - 1.70656i) \times 10^{-3}$	$A_1 = -1.12493 \times 10^{-5}$ $A_2 = (1.66049 + 3.47334i) \times 10^{-3}$ $B_1 = -3.64685 \times^{-4}$ $B_2 = 1.02131 \times 10^{-2} - 1.44042i \times 10^{-3}$

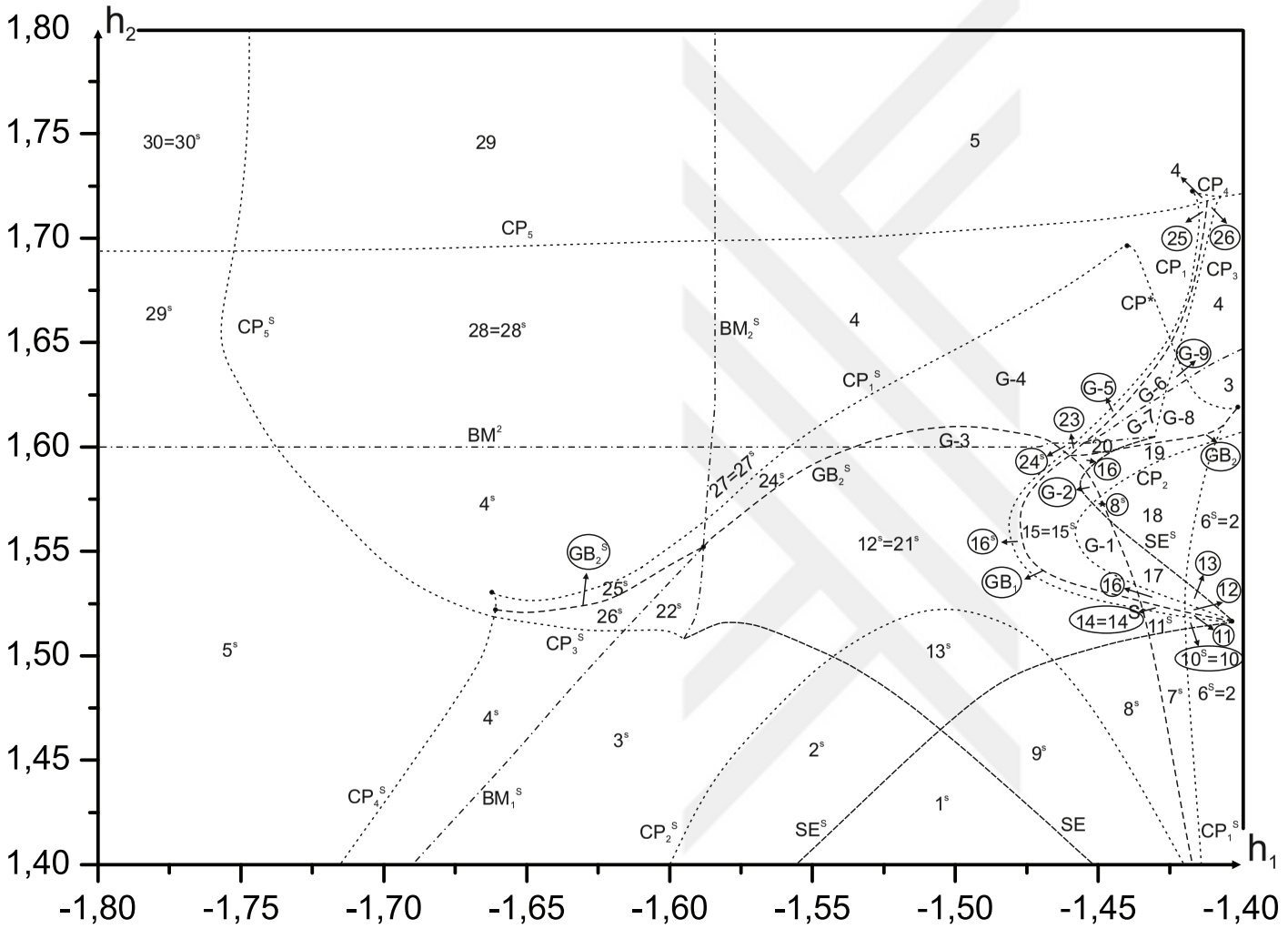
Tablo 3.2. Farklı Re sayıları için kaviti içerisinde ikinci girdabın oluştuğu h_1^* ve h_2^* değerleri.

	$Re = 0$	$Re = 50$	$Re = 100$	$Re = 1000$
$h_1^* = -1,40$	$h_2^* = 1,769$	$h_2^* = 1,723$	$h_2^* = 1,558$	$h_2^* = 1,275$
$h_1^* = -1,50$	$h_2^* = 1,723$	$h_2^* = 1,695$	$h_2^* = 1,553$	$h_2^* = 1,277$
$h_1^* = -1,60$	$h_2^* = 1,751$	$h_2^* = 1,687$	$h_2^* = 1,552$	$h_2^* = 1,277$
$h_1^* = -1,70$	$h_2^* = 1,742$	$h_2^* = 1,684$	$h_2^* = 1,551$	$h_2^* = 1,278$
$h_1^* = -1,80$	$h_2^* = 1,740$	$h_2^* = 1,683$	$h_2^* = 1,551$	$h_2^* = 1,278$

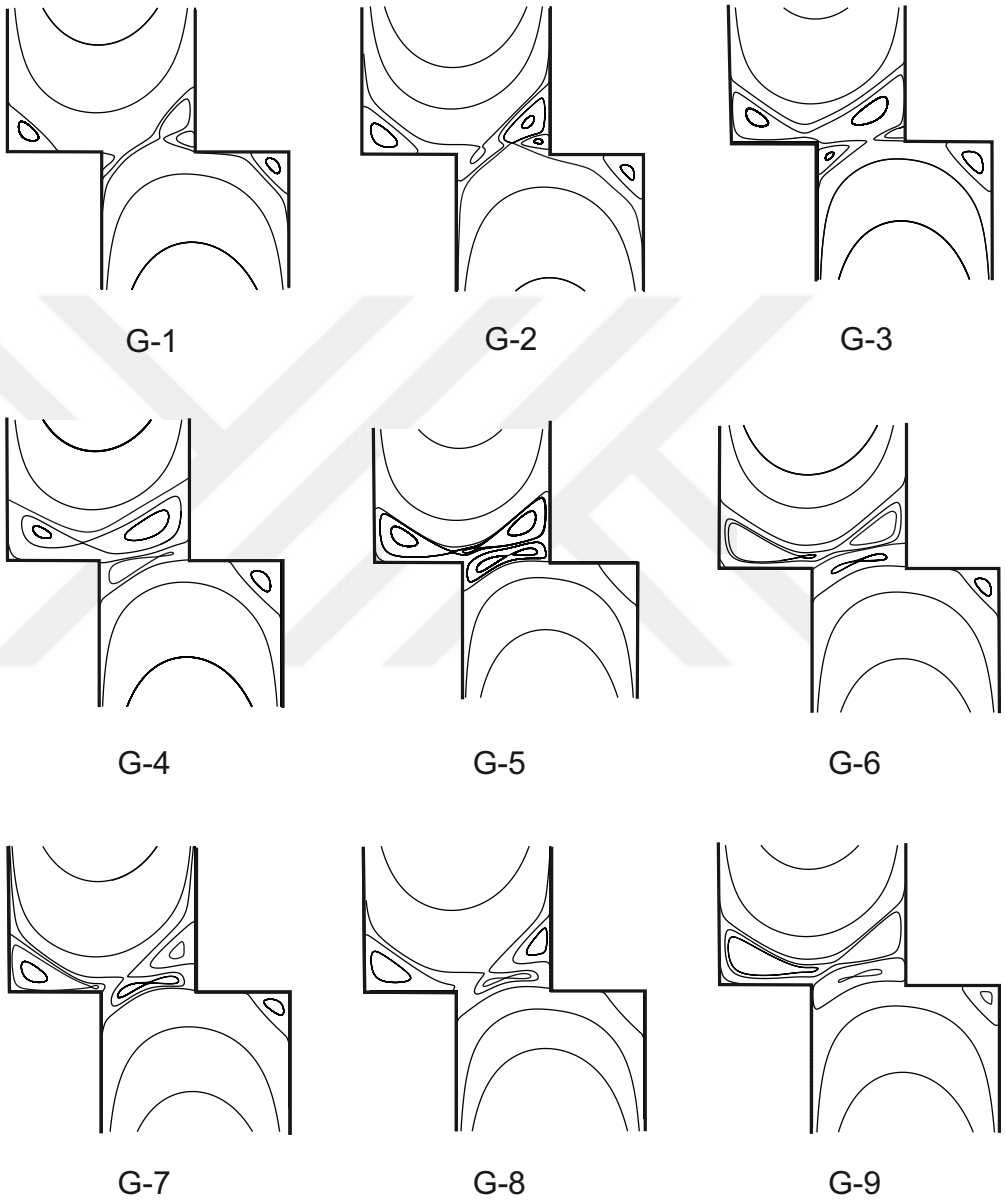
diyagramdakiler ile aynıdır. Ancak bazı bölgeler $Re = 0$ da oluşmamış olup $Re = 50$ için meydana gelmiştir. Bu bölgeler diyagramda (G-i, i=1,...,9) olarak adlandırılmış ve bu bölgedeki akış yapıları Şekil 3.15' da verilmiştir.

Reynolds sayısının ilk etkisi, akış modellerine asimetrik bir görünüm vermesi şeklinde ifade edilebilir. Buna ilave olarak $Re = 0$ için elde edilen kontrol uzay diyagramı $y = -x$ doğrusuna göre simetrik idi. Ancak Şekil 3.14' den de görüleceği gibi $Re = 50$ için elde edilen kotrol uzay diyagramında simetriklik bozulmuştur.

$Re = 50$ için kontrol uzay diyagramında farklı bölgelerin oluşması, yani kaviti içerisinde farklı akış yapılarının meydana gelmesi kaviti içerisindeki girdap oluşum mekanızmasının değiştiğini gösterir. Ayrıca Reynolds sayısının girdap oluşumu üzerine etkisini araştırmak için farklı Reynolds sayılarında h_1^* değeri sabit tutulup kaviti içerisinde ikinci girdabın oluştuğu ilk h_2^* değeri elde edilmiş ve bu değerler Tablo 3.2' da verilmiştir. Tabloda görüldüğü gibi Reynolds sayısı arttıkça kaviti içerisinde ikinci girdabın oluşruğu h_2 yüksekliği değeri oldukça düşmüştür. Bu ise Reynold sayısının girdap oluşumunu hızlandırdığı sonucunu verir.



Şekil 3.14. $Re = 50$ için Z-şeklindeki kavitinin (h_1^*, h_2^*) kontrol uzay diyagramı. Bölge numaraları Şekil 3.2' dekiler ile aynı olup $Re = 0$ da görülmeyen yapılar G-i, i=1,...,9 ile gösterilmiştir.



Şekil 3.15. Şekil 3.2′ de oluşmayan ancak $Re = 50$ için gözlenen akış yapılarının gösterimi. Akış yapılarının numaraları Şekil 3.14′ deki bölgeleri temsil etmektedir.

4. BÖLÜM

İKİ BOYUTLU SIKIŞTIRILAMAZ SİMETRİK AKIŞ İÇİN YAPISAL ÇATALLANMALAR VE UYGULAMASI

Bu bölümde, normal form teorisinden elde edilen akış fonksiyonunu kullanarak, x eksenine göre simetrik olan durağan, sıkıştırılamaz akış için akış fonksiyonunun derecesi altıya kadar normal formu için bir çatallanma diyagramı elde edildi. Bu teorik çalışmanın uygulaması olarak, üst kapağı hareketli T-şeklindeki kavitinin yükseklikleri iki kontrol parametresi olarak düşünüldü ve Bölüm 1.5.1' de verilen nümerik yöntem kullanılarak (h_1, h_2) kontrol uzay diyagramı elde edildi. Son olarak kavitinin köşe noktasında meydana gelen ayırma çizgisinin çözüm davranışı Bölüm 2.2' deki yöntem ile detaylı incelendi.

4.1. Basit Dejenere Kritik Noktaların Çatallanmaları

Sınırdan uzak iki boyutlu sıkıştırılamaz akış için akış fonksiyonu,

$$\dot{x} = u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \dot{y} = v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{4.1}$$

dır. Kritik nokta civarında akışın yapısı hakkında bilgi edinmek için, akış fonksiyonu ψ kuvvet serisine açılır. Kritik nokta $(0, 0)$ orijin noktası olsun. Kuvvet serisi ;

$$\psi = \sum_{i+j=1}^{\infty} a_{i,j} x^i y^j, \tag{4.2}$$

dir. Kritik nokta civarında akışın x eksenine göre simetrik olduğunu kabul edelim. Bu durumda akış fonksiyonu x göre tek fonksiyondur yani,

$$\psi(-x, y) = \psi(x, y), \tag{4.3}$$

dır. Bu şartın sağlanabilmesi için x in tek kuvvetlerinin katsayısı 0 olmalıdır. Bu durumda (4.2) akış fonksiyonu

$$\psi = \sum_{i+j=1}^{\infty} a_{2i,j} x^{2i} y^j \tag{4.4}$$

dır. (4.4) akış fonksiyonu için (4.1) denklem sistemine doğrusal yaklaşımı

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{0,1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2a_{0,2} \\ -2a_{2,0} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

şeklindedir. Kritik nokta $(0, 0)$ olarak kabul edildiğinden $a_{0,1} = 0$ olmak zorundadır. Yerel akış analizi yapabilmek ve kritik noktanın yapsını incelemek için Hamiltion sistemler için standart teori kullanılacaktır. Bu durumda sistemin Jacobian matrisinin determinantı kritik noktanın yapısını belirler. Eğer $|J| = 4a_{2,0}a_{0,2} > 0$ ise kritik nokta merkez (center), $|J| = 4a_{2,0}a_{0,2} < 0$ ise kritik nokta eyer (saddle) noktasıdır. Bu bölümde basit dejenere kritik nokta yapısı incelenecektir. Yani $|J| = 4a_{2,0}a_{0,2} = 0$ ancak $(J) \neq 0$. Bu durumda akış yapısını belirlemek için akış fonksiyonunun daha yüksek dereceli terimlerine ihtiyaç vardır. Akış yapısını belirlemede hangi terimlerin belirleyici olduğunu bulmak için Brons ve Hartnack [18] üreteç fonksiyonu (generating function) kullandılar ve akış fonksiyonunun normal formu için aşağıdaki teoremi verdiler.

Teorem 4.1.1. $a_{0,1}, a_{2,0}, a_{1,1}$ ve $\tilde{a}_{4,0}, ...\tilde{a}_{2[N/2]-2,0}$ küçük parametreler olsun. Kabul edelim ki $a_{0,2} \neq 0, \tilde{a}_{2[N/2],0} \neq 0$ olsun. Bu durumda (4.4) akış fonksiyonu

$$\psi_N = \frac{\sigma}{2} y^2 + f(x), f(x) = \sum_{i=1}^{N/2} c_{2i} x^{2i}, c_{2[N/2]} = \frac{1}{2[N/2]} \tag{4.5}$$

dir. Burada

$$\sigma = \begin{cases} -1, a_{0,2}/\tilde{a}_{2[N/2],0} < 0 \\ 1, a_{0,2}/\tilde{a}_{2[N/2],0} > 0 \end{cases}$$

ve $c_{2i}, i = 1, ..., N/2$ dönüştürülmüş küçük parametrelerdir.

ψ akış fonskiyonunun (4.5) normal formu için dinamik sistem aşağıdaki gibidir:

$$\dot{x} = \sigma y \quad \dot{y} = -f(x). \tag{4.6}$$

Açıkça görüleceği gibi orjin noktası $(0,0)$ her zaman kritik noktadır ve bütün kritik noktalar x ekseni üzerindedir. Ayrıca kritik noktada Jacobian matrisi

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -f''(x) & 0 \end{pmatrix},$$

olduğundan dolayı yerel çatallanmalar $f'(x) = 0$ ve $f''(x) = 0$ iken meydana gelir.

Bir sonraki bölümde uygulama olarak vereceğimiz T-şeklinde kaviti içerisindeki akış yapıları, akış fonksiyonunun derecesi 6 olan normal form çatalannma diyagramında karşımıza çıkmaktadır. Bu yüzden burada $N = 6$ için inceleme yapılacak olup $N = 4$ için Brons ve Hartnack [18]' ın çalışmasına bakılabilir.

4.1.1. $N = 6$ için çatallanma diyagramı

Teorem 4.1.1' de normal formu elde edilen akış fonskiyonu için $N = 6$ alınırsa,

$$\psi_6 = \frac{\sigma}{2}y^2 + a_2x^2 + a_4x^4 + \frac{1}{6}x^6,$$

dır. Çatallanma şartları

$$f'(x) = 2a_2x + 4a_4x^3 + x^5 = 0 \quad f''(x) = 2a_2 + 12a_4x^2 + 5x^4 = 0$$

olduğundan çatallanmalar a_4 ekseni üzerinde ve $a_4 \leqslant 0$ için $a_2 = 2a_4^2$ eğrisi üzerinde meydana gelir. Böylece (a_2, a_4) parametre uzayı elde edilir. Şimdi sistemin kritik noktalarını belirleyelim:

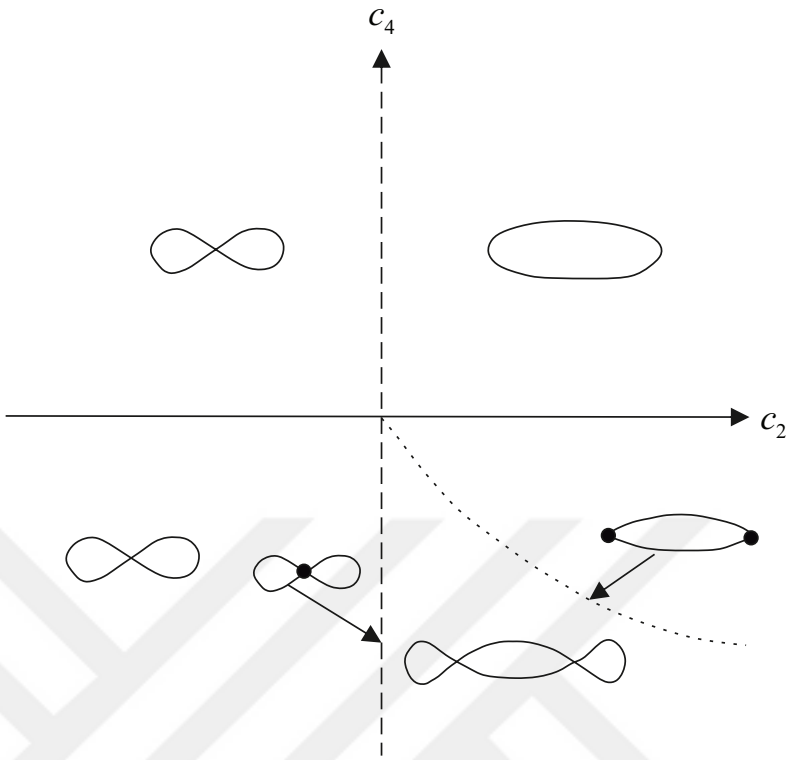
1. Eğer $4a_4^2 - 2a_2^2 \geqslant 0$ ise (4.6) sisteminin 5 kritik kökü vardır vardır öyleki

   $$C_1(0,0) \quad , \quad C_2\left(\sqrt{-2a_4 + \sqrt{4a_4^2 - 2a_2}}, 0\right) \quad , \quad C_3\left(-\sqrt{-2a_4 + \sqrt{4a_4^2 - 2a_2}}, 0\right)$$

   kökleri merkez (center),

   $$S_4\left(\sqrt{-2a_4 - \sqrt{4a_4^2 - 2a_2}}, 0\right) \quad , \quad S_5\left(\sqrt{-2a_4 - \sqrt{4a_4^2 - 2a_2}}, 0\right)$$

   kökleri ise eyer (saddle) noktasıdır.



Şekil 4.1. Dinamik sistemler kullanılarak elde edilen çatallanma diyagramı.

2. Eğer $4a_4^2 - 2a_2^2 = 0$ ise (4.6) sisteminin 3 kökü vardır:

$$C_1(0,0) \quad A_1\left(\sqrt{-2a_4}, 0\right) \quad A_2\left(-\sqrt{-2a_4}, 0\right)$$

Burada $f''(A_1) = f''(A_2) = 0$ olduğundan dolayı A_1 ve A_2 noktaları dejeneredir ($|J| = 0$). Dejenere kritik noktanın yapısını belirlemek için A_1 ve A_2 noktalarında akış fonksiyonu seriye açıldığında $f'''(x) \neq 0$ olduğu görülür ki bu ise noktanın cusp yapısı olduğunu gösterir.

3. Eğer $4a_4^2 - 2a_2^2 < 0$ ise sistemin tek kritik noktası $(0,0)$ olup eyer noktasır.

4. Eğer $a_2 = 0$ ise 3 kritik nokta vardır öyleki

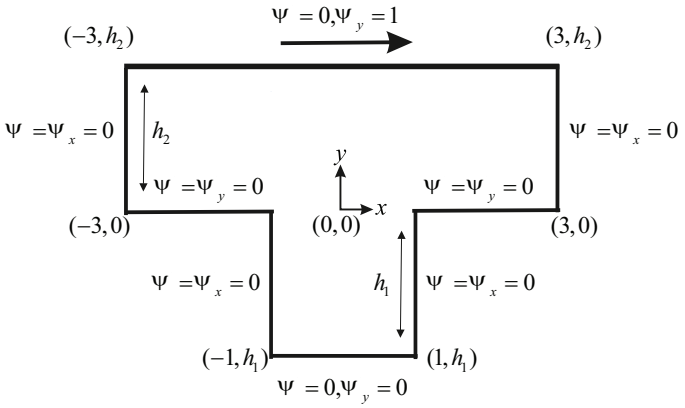
$$C_1(0,0) \quad C_2\left(\sqrt{-4a_4}, 0\right) \quad C_3\left(-\sqrt{-4a_4}, 0\right)$$

noktaları eyer noktasıdır. Burada $C_1(0,0)$ noktası dejenere kritik nokatasıdır ve bu noktada akış fonksiyonu seriye açıldığında $f^{(4)} = 24a_4$ elde edilir. Eğer $a_4 < 0$ ise nokta merkez, $a_4 > 0$ ise nokta eyer noktasıdır. Bu bilgiler ışığında çatallanma diyagramı Şekil 4.1′ deki gibi oluşturulur.

4.2. T-Şeklindeki Kaviti İçindeki Girdap Oluşum Mekanizması

Bu bölümde, üst kapağı hareketli T-şeklindeki kaviti (Şekil 4.2) içerisinde meydana gelen akış yapıları elde edilecektir. Kavitinin alt kısmı h_1 ve üst kısmı h_2 yükseklikleri olmak üzere bu parametrelerin değişmesi ile T-şeklindeki kaviti içindeki girdap oluşumu incelendi. Akış yapısındaki değişiklikleri ortaya çıkarmak için çatallanma eğrileri elde edildi. Burada, akış yapısındaki değişimin ifadesi, durağan nokta tipinin eyerden merkeze ya da tam tersi dönüşümü ifade eder. (h_1, h_2) parametre uzayı h_1 ve h_2 nin kritik değerlerinde yani yapısal değişikliklerin gerçekleştiği noktalar için elde edildi.

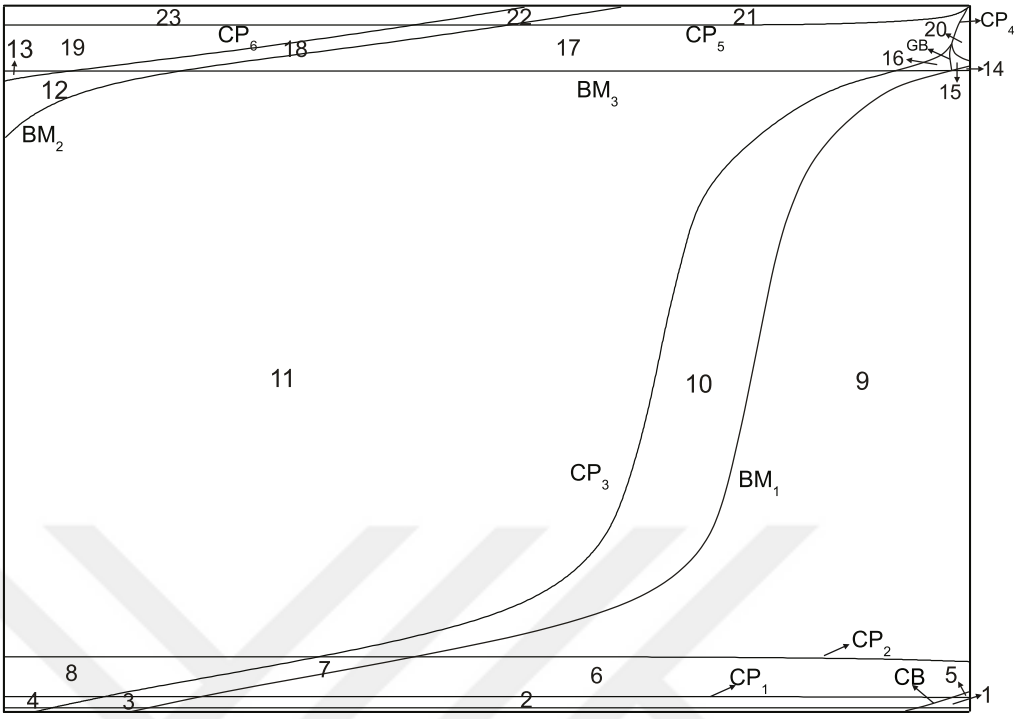
(h_1, h_2) parametre uzayını elde etmek için $-3.5 < h_1 < -0.2$ ve $0.2 < h_2 < 10.5$ araklıkları göz önünde bulunduruldu. Bu araklıklar için parametre uzayında 23 farklı bölge, dolayısıyla 23 farklı akış yapısı elde edildi. Stokes denklemi Bölüm 1.5.1' de verilen Galerkin sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla çözüldü. Kontrol uzay diyagramındaki eğriler, h_1 sabit tutulup h_2 nin değiştirilmesi veya tam tersi yapılarak elde edildi. Bu çatallanma eğrileri Şekil 4.3' de gösterilmiştir.



Şekil 4.2. Üst kapağı hareketli T-şeklindeki kaviti için sınır değer problemi.

4.3. Akış Yapıları ve Girdap Oluşum Senaryosu

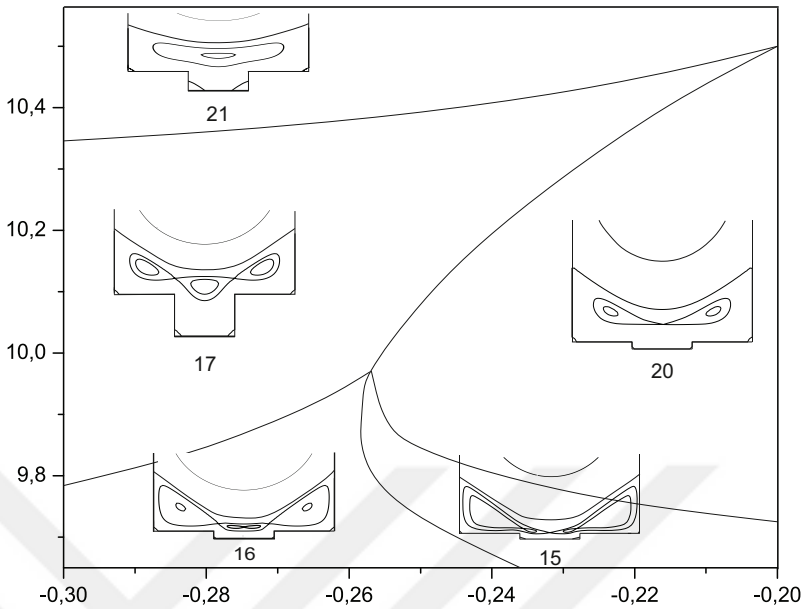
h_1 ve h_2 nin değişmesiyle elde edilen akış yapıları Şekil 4.7 ve Şekil 4.8' de verilmiştir. Üst kavitinin çok küçük olduğu araklıkta, örneğin $0.2 < h_2 < 1.0$ için akış çizgilerindeki belirsizlik yapının anlaşılamamasına neden olmaktadır. Kritik noktanın eyer veya merkez noktası olup olmadığını anlamak için Gaskell vd. [26]'



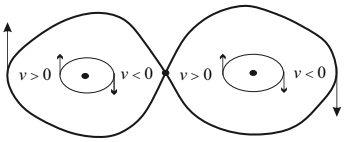
Şekil 4.3. T-Şeklindeki kaviti için $-3.5 < h_1 < -0.2$ ve $0.2 < h_2 < 10.5$ olmak üzere (h_1, h_2) kontrol uzay diyagramı.

nin kullandığı bi-section yöntemi kullanıldı. Bu yöntemde dikey hız bileşenin işaret değişimi kritik noktadaki yapının tipini belirtir (Şekil 4.5). Örneğin Şekil 4.7-(5) akış yapısına yöntemin uygulaması Şekil 4.6' de, hız vektör bileşenlerinin değerleri ise Tablo 4.1' de verilmiştir. Bu yöntem, Şekil 4.7' deki ilk sekiz yapının anlaşılması için kullanıldı.

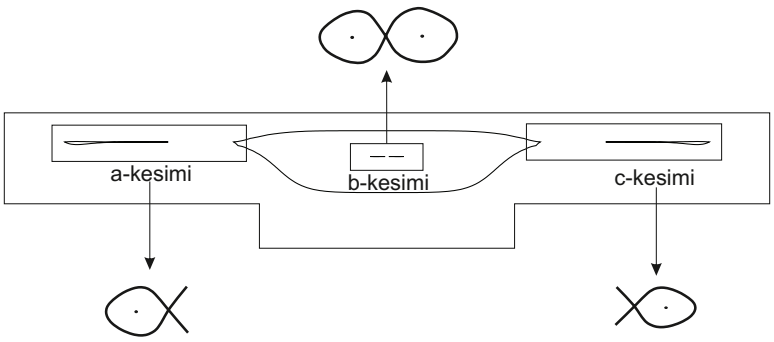
Çatallanma diyagramında CP_1 eğrisinin altında kalan bölge boyunca kavitinin üst kısmında beş alt girdap çevreleyen seperatriks ve alt kısmında ise iki tane köşe girdap yapısı vardır. Şekil 4.7' de görüldüğü gibi (1) ile gösterilen bölgede kaviti içerisinde beşli seperatriksin ana girdabı merkezi boyunca yuvalanmış ikili seperatriks içermektedir. CB eğrisi ile ikinci bölgeye geçtiğimizde, ilk yapının merkezinde bulunan kritik noktanın yapısı eyerden merkeze dönüşmüştür. h_2 sabit tutulup h_1 arttırıldığında, kavitinin alt kısmında ikinci girdabın oluşması bilinen girdap oluşum mekanizması ile meydana gelmektedir (Şekil 4.7 $(2 \rightarrow 3 \rightarrow 4)$). Bu mekanizma Gürcan [44] tarafından dikdörtgensel kavitide ve Deliceoğlu ve Aydın [14] tarafından L-şeklindeki kavitide $S = 0$ için gözlenmiştir. Benzer çatallanma serisi CP_1 ile CP_2 arasında (Şekil 4.7 $(6 \rightarrow 7 \rightarrow 8)$) ve CP_2 ile



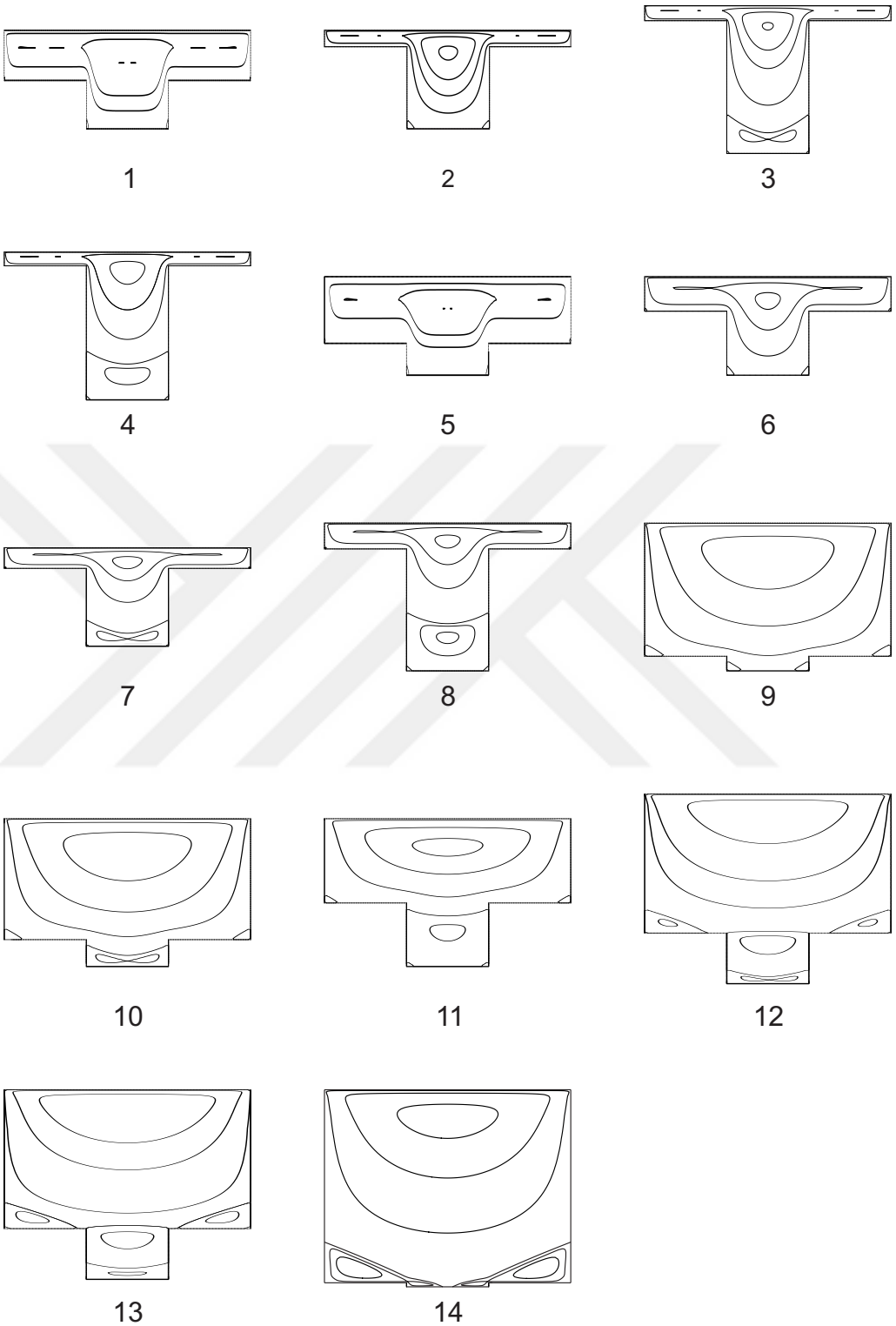
Şekil 4.4. ψ akış fonksiyonunun derecesi 6 olan normal formu için dinamik sistemler ile elde edilen akış yapılarının T-şeklindeki kaviti içerisinde gösterimi.



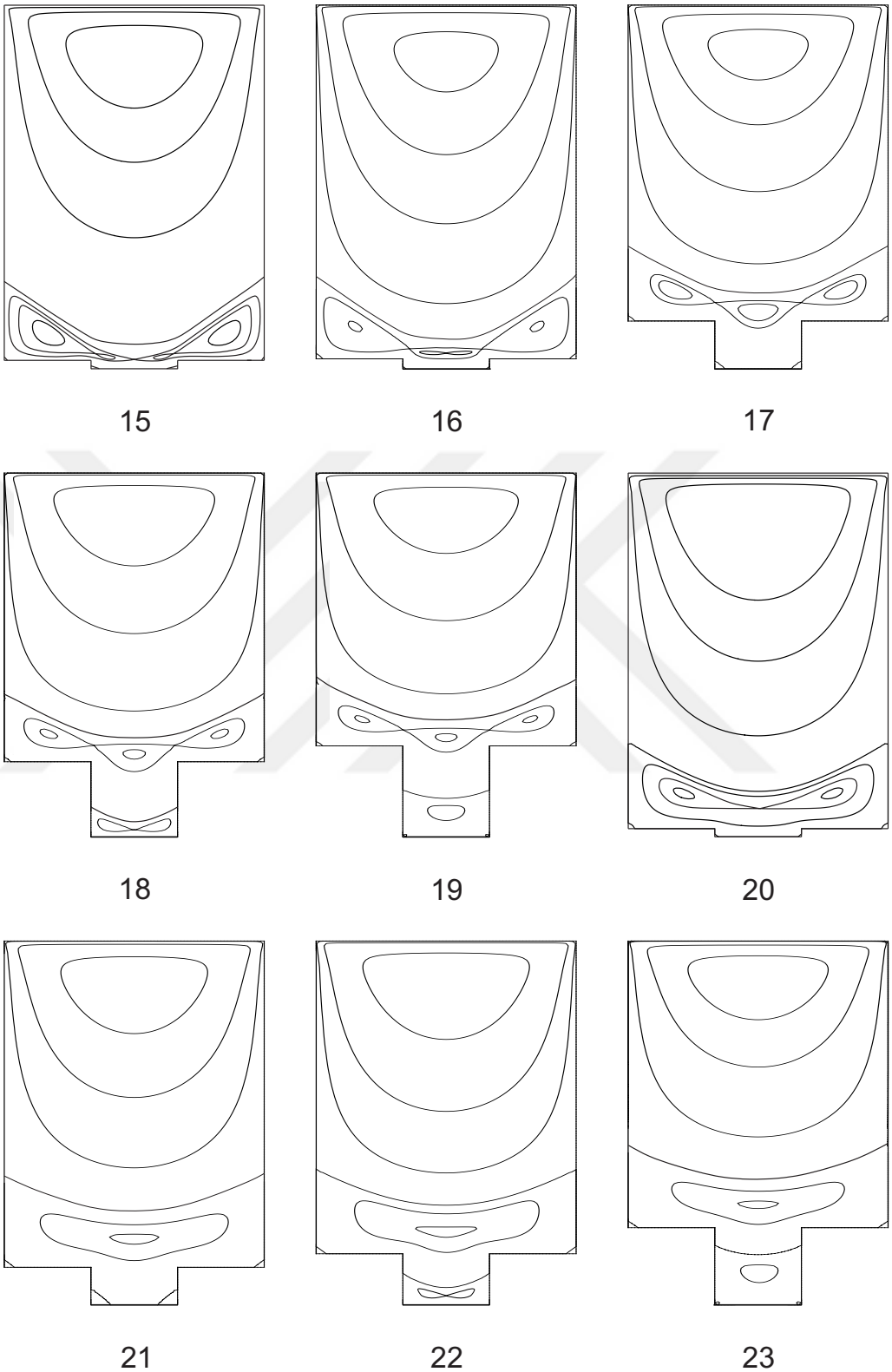
Şekil 4.5. Kritik nokta civarında v hız vektör bileşeninin işaret değişimi.



Şekil 4.6. Şekil 4.7-(5) akış yapısının detaylı incelenmesi.



Şekil 4.7. T-Şeklindeki kaviti içerisinde elde edilen akış yapıları: (1) $h_1 = -0.29, h_2 = 0.3$, (2) $h_1 = -1.75, h_2 = 0.35$, (3) $h_1 = -3.1, h_2 = 0.35$, (4) $h_1 = -3.4, h_2 = 0.35$, (5) $h_1 = -0.205, h_2 = 0.42$, (6) $h_1 = -1.3, h_2 = 0.7$, (7) $h_1 = -2.64, h_2 = 0.7$, (8) $h_1 = -3.3, h_2 = 0.7$, (9) $h_1 = -0.6, h_2 = 5.45$, (10) $h_1 = -1.1, h_2 = 4.95$, (11) $h_1 = -2.6, h_2 = 3.45$, (12) $h_1 = -3.4, h_2 = 9.3$, (13) $h_1 = -3.47, h_2 = 9.5$, (14) $h_1 = -0.2, h_2 = 9.605$.



Şekil 4.8. T-Şeklindeki kaviti içerisinde elde edilen akış yapıları (devam): (15) $h_1 = -0.23, h_2 = 9.7$, (16) $h_1 = -0.28, h_2 = 9.75$, (17) $h_1 = -1.5, h_2 = 9.9$, (18) $h_1 = -2.57, h_2 = 9.87$, (19) $h_1 = -3.3, h_2 = 9.9$, (20) $h_1 = -0.23, h_2 = 10.1$, (21) $h_1 = -1.2, h_2 = 10.4$, (22) $h_1 = -1.7, h_2 = 10.4$, (23) $h_1 = -2.8, h_2 = 10.4$.

a kesimi boyunca $y = 0.2856$

x	v
-2.44	0.00010
-2.42	-0.00019
-1.28	0.000014

b kesimi boyunca $y = 0.2184$

x	v
-0.15	0.00017
-0.08	-0.00001
0.0	0
0.15	-0.00017

c kesimi boyunca $y = 0.2856$

x	v
2.44	-0.00010
2.42	0.00019
2.28	-0.00014

Tablo 4.1. Sayısal yöntem ile elde edilen hız vektör bileşenlerinin değerleri.

BM_3 eğrisi arasında (Şekil 4.7 $(9 \rightarrow 10 \rightarrow 11)$) vardır. Bu yapısal dönüşüm serisi meydana gelirken alt kavite ile üst kaviteyi ayıran ayırma çizgisi yukarıya hareketlenmektedir. Ancak, ayırma çizgisi ile üst kavitinin köşelerinin birleştiği eyer-nokta çatallanması sürekli h_2 in aynı değerinde meydana gelmektedir ($h_2 = 9.563$).

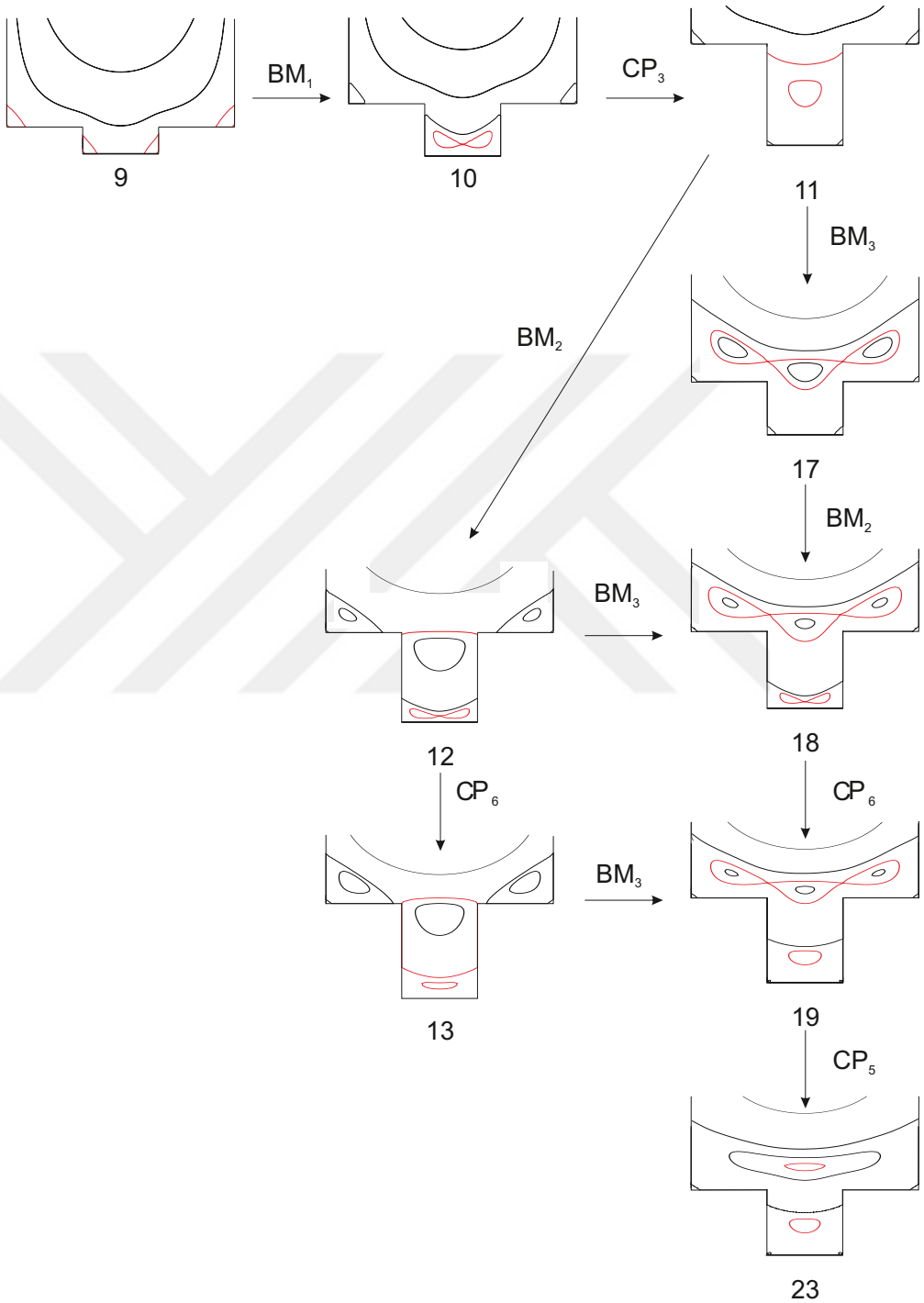
Bir diğer girdap oluşum senaryosu alt kaviti yükseliği yeteri kadar küçük olduğunda görülmektedir. Alt kavite köşe girdapları kendi aralarında birleşmeden önce üst kavite köşe girdaplarıyla girinti noktası civarında birleşmektedir (Şekil 4.7 $(9 \rightarrow 14)$). Böylece kavitide seperatriks içeren iki köşe girdabı bulunur. BM_1 ve CP_4 çatallanmalarından sonra kaviti içerisinde karesel kavitide olduğu gibi seperatriks oluşur ve CP_5 çatallanmasından sonra kavitininde ikinci girdap meydana gelir (Şekil 4.10 $(9 \rightarrow 14 \rightarrow 15 \rightarrow 20 \rightarrow 21)$). Ayırma çizgisinin köşe noktasını geçtiği ve köşe girdaplarıyla birleştiği yeni girdap oluşumu için birkaç temel senaryo vardır. Bu farklı akış dönüşüm senaryoları Şekil 4.9 ve Şekil 4.10 da gösterilmektedir.

Bölüm 4.1.1' daki terorik çalışma ile elde edilen akış yapılar, üst kapağı hareketli T-şeklindeki kaviti içerisinde de görüldü (Şekil 4.4). Gerçekten, elde edilen (h_1, h_2) kontrol uzay diyagramının $-0.3 < h_1 < -0.2$ ve $9.6 < h_2 <$

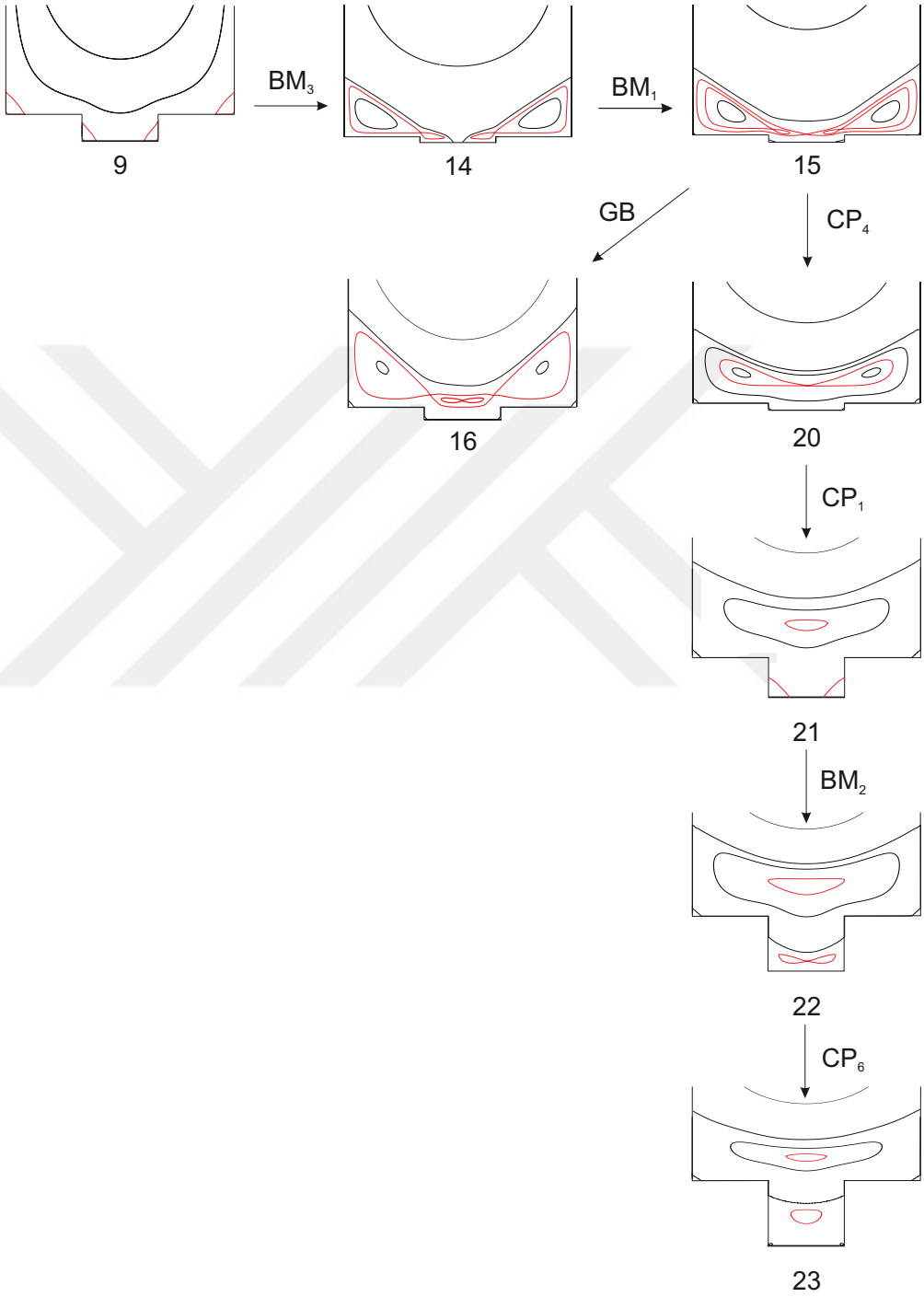
10.5 kısmında (20) numaralı bölgede kaviti içerisinde bir seperatriks yapısı var iken $x = 0$ üzerindeki merkez yapısı eyer noktasına dönüşerek üçlü seperatrik yapısı meydana gelmektedir Şekil 4.4-(21). Alt kaviti yüksekliğini -0.2 ile sınırladığımız için her ne kadar (20) numaralı bölgeden (21) numaraya geçiş gözükmüyor olsa da bu çatallanmanın h_1 in daha düşük yükseliğinde gerçekleştiği umulmaktadır.

4.4. Köşe Civarında Detaylı Çalışma

Bölüm 2.1' de birinci dereceden asimptotik çözümün yapısı incelenmiş olup, girintili köşe civarında ayırma çizgisi oluşturduğu elde edilmişti. Bu ayırma çizgisinin konumunu, anti-simetrik ve simetrik öz-fonksiyonların katsayılarına ($C_1 = \frac{A_1}{B_1}$) bağlı olarak elde ettik. Bu bölümde T-şeklinde kavitinin girinti köşe civarında katsayıları incelendi. Tablo 4.2' de görüldüğü gibi ayırma çizgisi alt duvar üzerinde iken $C_1 < 0$ dır. Ayırma çizgisi köşe noktasına yaklaştıkça C_1 değeri sıfıra yaklaşmakta olup, ayırma çizgisi üst duvar üzerine çıktığında $C_1 > 0$ olmaktadır.

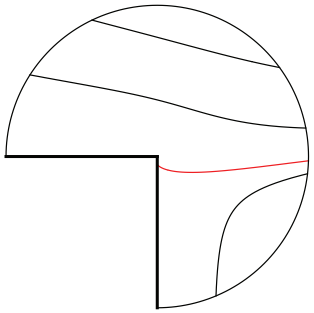
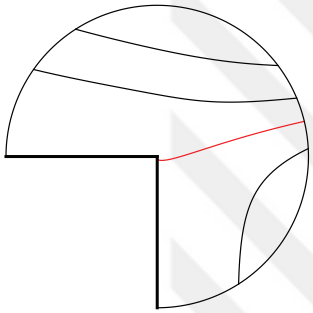
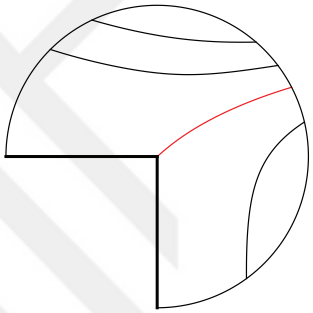
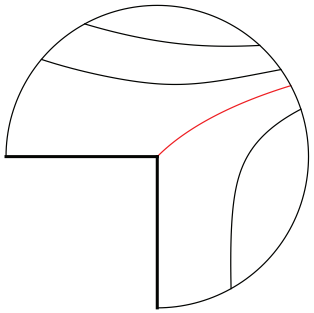
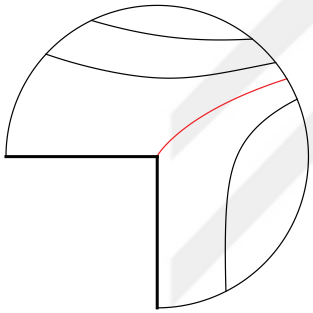
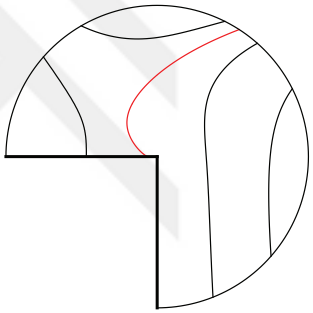


Şekil 4.9. T-Şeklindeki kaviti içersinde ikinci girdap oluşumu için yapısal dönüşüm serisi



Şekil 4.10. T-Şeklindeki kaviti içersinde ikinci girdap oluşumu için yapısal dönüşüm serisi (devam)

Tablo 4.2. T-Şeklindeki kavitinin köşe noktası civarında oluşan ayırma çizgisinin hareketi.

 $C_1 = \frac{A_1}{B_1} = -0.14845$	 $C_1 = \frac{A_1}{B_1} = -7.31595 \times 10^{-2}$	 $C_1 = \frac{A_1}{B_1} = -3.74348 \times 10^{-3}$
 $C_1 = \frac{A_1}{B_1} = 7.58838 \times 10^{-5}$	 $C_1 = \frac{A_1}{B_1} = 1.59709 \times 10^{-2}$	 $C_1 = \frac{A_1}{B_1} = 0.14363$

KAYNAKLAR

1. Phillips, T. N. , 1989. Singular matched eigenfunction expansion for Stokes flow around a corner. **IMA Journal of Applied Mathematics**, **42**(1): 13-26.

2. Driesen, C. H. , Kurtten, J. G. M. , Streng, M., 1998. Low-Reynolds-number flow over partially covered cavities. **Journal of Engineering Mathematics**, **34**(1-2): 3-21.

3. Hawa, T. , Rusak, Z. , 2002. Numerical-asymptotic expansion matching for computing a viscous flow around a sharp corner. **Theoretical and Computational Fluid Dynamics**, **15**: 265-281.

4. Foucard, L. C., Vernerey, F. J., 2015. An X-FEM-based numerical-asymptotic expansion for simulating a Stokes flow near a sharp corner. **Int. J. Numer. Methods Eng.**, **102**: 79-98.

5. Moes, N., Dolbow, J., Belytschko, T., 1999. A finite element method for crack growth without re-meshing. **Int. J. Numer. Methods Eng.**, **46**: 131-150.

6. Çelik, E., 2014. Köşe Civarındaki Singüler Noktaların Eşleştirme Yöntemiyle Çözümü. Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans, KAYSERİ, ss55

7. Shankar, P. N., 1993. The eddy structure in Stokes flow in a cavity. **Journal of Fluid Mechanics**, **250**: 371-383.

8. Gaskell, P. H., Gürcan, F., Savage, M. D., Thompson, H. M., 1998. Stokes flow in a double-lid-driven cavity with free surface side walls. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, **212**(5): 387-403.

9. Gürcan, F., Gaskell, P. H., Savage, M. D., Wilson, M. C. T., 2003. Eddy genesis and transformation of Stokes flow in a double-lid driven cavity. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, **217**(3): 353-364.

10. Liu, C., Joseph, D., 1977. Stokes flow in wedge-shaped trenches. **Journal of Fluid Mechanics**, **80**(3): 443-463.

11. Schreiber, R., Keller, H. B. , 1983. Driven cavity flows by efficient numerical techniques. **Journal of Computational Physics**, **49**(2): 310-333.

12. Erturk, E., Gökçöl, O., 2007. Fine grid numerical solutions of triangular cavity flow. **Applied Physics**, **38**(1): 97-105.

13. Gürcan, F., Bilgil, H., 2013. Bifurcations and eddy genesis of Stokes flow within a sectorial cavity. **European Journal of Mechanics, B/Fluids**, **39**: 42-51.

14. Deliceoğlu, A. , Aydın, S. H. , 2014. Topological flow structures in an L-shaped cavity with horizontal motion of the upper lid. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, **259**: 937-943.

15. Gürcan, F., Deliceoğlu, A., Bakker, P. G., 2005. Streamline topologies near a non-simple degenerate critical point close to a stationary wall using normal forms. **Journal of Fluid Mechanics**, **539**: 299-311.

16. Gürcan, F., Deliceoğlu, A., 2005. Streamline topologies near non-simple degenerate points in two-dimensional flows with double symmetry away from boundaries and an application. **Physics of Fluids**, **17**(9): 1-7.

17. Hartnack, J. N., 1999. Streamlines topologies near a fixed wall using normal forms. **Acta Mechanica**, **75**: 55-75.

18. Brons, M. , Hartnack, J. N. , 1999. Streamline topologies near simple degenerate critical points in two-dimensional flow away from boundaries. **Physics of Fluids**, **11**: 314-324.

19. Erturk, E., Corke, T. C., Gökçöl, C., 2005. Numerical solutions of 2D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers. **Int. J. Numer. Meth. Fluids**, **48**: 747-774.

20. Gaskell, P. H., Savage, M. D., Summers, J. L., Thompson, H. M., 1998. Stokes flow in closed, rectangular domains. **Applied Mathematical Modelling**, **22**: 727-743.

21. Gürcan, F., 2003. Effect of the Reynolds number on streamline bifurcations in a double-lid-driven cavity with free surfaces. **Computers and Fluids**, **32**: 1283-1298.

22. Ghia, U., Ghia, K. N., Shin, C. T., 1982. High-Re solution for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multi grid method. **J. Comp. Physics**, **48**: 387-411.

23. Botella, O., Peyret, R., 1998. Benchmark spectral results on the lid driven cavity flow. **Computers and Fluids**, **27**(4): 421-433.

24. Gürcan, F., 1996. Flow bifurcations in rectangular, lid-driven, cavity flows. PhD. Thesis, University of Leeds.

25. McQuain, W. D., Ribbens, C. J., Wang, C. Y., Watson, L. T., 1994. Steady viscous flow in a trapezoidal cavity. **Computers and Fluids**, **23**(4): 613-626.

26. Gaskell, P. H. , Savage, M. D. , Wilson, M. , 1997. Stokes flow in a half-filled annulus between rotating coaxial cylinders. **J. Fluid Mech.**, **337**: 263-282.

27. Ribbens, C. J., Watson, L. T., Wang, C. Y., 1994. Steady viscous flow in a triangular cavity. **Journal of Computational Physics**, **112**(1): 173-181.

28. Gaskell, P. H., Thompson, H., Savage, M., 1999. A finite element analysis of steady viscous flow in triangular cavities. **Proceedings of The Institution of Mechanical Engineers Part C-journal of Mechanical Engineering Science**, **213**: 263-276.

29. Gürcan, F., Bilgil, H., 2015. Bifurcations and eddy genesis of Stokes flow within a sectorial cavity PART II: Co-moving lids. **European Journal of Mechanics- B/Fluids**, **56**: 42-51.

30. Bilgil, H., Gürcan, F., 2016. Effect of the Reynolds number on flow bifurcations and eddy genesis in a lid-driven sectorial cavity. **Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics**, **33**(2): 343-360.

31. Deliceoğlu, A., Aydın, S. H., 2013. Flow bifurcation and eddy genesis in an L-shaped cavity. **Computers and Fluids**, **73**: 24-46.

32. Jeffrey, G. B. , Sherwood, J. D. , 1980. Streamline patterns and eddies in low-Reynolds-number flow. **J. Fluid Mech.**, **96**: 315-334.

33. Moffatt, H. K. , 1964. Viscous and resistive eddies near a sharp corner. **J. Fluid Mech.**, **18**: 1-18.

34. Shankar, P. N. , Slow Viscous Flows: Qualitative Features And Quantitative Analysis Using Complex Eigenfunction Expansions. Imperial College Press, London, 563pp.

35. Deliceoğlu, A. , Çelik, E. , Gürcan, F. , 2019. Singular treatment of viscous flow near the corner by using matched eigenfunctions. **Proc. IMechE Part C: J. Mechanical Engineering Science**, **233**(5): 1660-1676.

36. Nishida, H., Satofuka, N., 1992. Higher order solutions of square driven cavity flow using a variable-order multi-grid method. **Int. J. Numerical Methods Fluids**, **34**: 637-653.

37. Vanka, S. P., 1986. Block-implicit multigrid solution of Navier-Stokes equations in primitive variables. **J. Comp. Physics**, **65**: 138-258.

38. Goyon, O., 1996. High-Reynolds number solutions of Navier-Stokes equations using incremental unknowns. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, **130**: 319-335.

39. Grigoriev, M. M., Dargush, G. F., 1999. A poly-region boundary element method for incompressible viscous fluid flows. **Int. J. Numerical Meth. Engn.**, **46**: 1127-1158.

40. Schreiber, R., Keller, H. B., 1983. Driven cavity flows by efficient numerical technique. **J. Comp. Physics**, **49**: 310-333.

41. Becler, E. B. , Carey, G. F. , Oden, J. T. , Finite Elements, An Introduction, Vol I. Prentice Hall, New Jersey, 258 pp.

42. Hou, S., Zou, Q., Chen, S., Doolen, G., Cogley, A. C., 1995. Simulation of cavity flow by the Lattice Boltzmann method. **J. Comp. Physics**, **118**: 329-347.

43. Smith, R. C. T. , 1953. Bending of a semi-infinite strip. **Australian Journal of Scientific Research**, **5**(2): 227-237.

44. Gürcan, F. , 2005. Streamline topologies near a stationary wall of Stokes flow in a cavity. **Applied Mathematics and Computation**, **165**: 329-345.

45. Çelik, E. , 2014. Köşe civarındaki singüler noktaların eşleştirme yöntemiyle çözümü. Yüksek lisans tezi, Erciyes Üniversitesi.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı	:	Ebutalib ÇELİK
Doğum Tarihi	:	14.06.1988
Doğum Yeri	:	Bakırköy/ İSTANBUL
Medeni Durumu	:	Evli
E-Posta	:	ecelik@erciyes.edu.tr

EĞİTİM

Derece	**Kurum**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı	2014
Lisans	Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	2011
Lise	Pertevniyal Lisesi, İstanbul	2006

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görev**
2012–Halen	ERÜ Fen Fakültesi	Araştırma Görevlisi

YABANCI DİL

İngilizce (2011-Üds-Fen bilimleri 78.75)

TEZDEN ELDE EDİLEN ÇALIŞMALAR

1. **PROJE**

   (a) "Köşe civarındaki akış modelleri ve Z-şeklindeki kaviti içerisindeki girdap oluşumuna etkisi", TÜBİTAK-3001 Baslangıç Ar-Ge Projeleri Destekleme Programı, 114F525 Numaralı Proje, 2015-2017.

2. **YAYINLAR**

   (a) Deliceoğlu, A., Çelik, E., Gürcan, F., 2019. Singular treatment of viscous flow near the corner by using matched eigenfunctions. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 233** (5): 1660-1676.

(b) Deliceoğlu, A., Çelik, E., 2019. A mechanism of eddy generation in a single lid-driven T-shaped cavity. **Cumhuriyet University Faculty of Science Science Journal** (Düzeltme istendi).

(c) Deliceoğlu, A., Çelik, E., Bozkurt, D., 2019. Flow topology in an L-shaped cavity with lids moving in the same directions. **Mathematical Methods in the Applied Sciences** (Düzeltme istendi).

(d) Çelik, E., Deliceoğlu, A., Gürcan, F., The effect of the re-entrant corner points into the vortex formation in the Z-shaped cavity. (Hazırlandı, gönderilecek).

(e) Deliceoğlu, A., Çelik, E., Bozkurt, D., 2019. Structural bifurcation of 2D double symmetric flows: application to fluid flow in a T-shaped cavity. (Hazırlandı, gönderilecek).

3. **KONFERANSLAR**

(a) Çelik, E., Deliceoğlu, A., 2017. Streamline Topology of Vortex Breakdown Bubbles Near the Re-Entrant Corner. **INTERNATIONAL CONFERENCE on RECENT ADVANCES in PURE AND APPLIED MATHEMATICS**: ss78, Aydın-TURKEY.

(b) Çelik E., Deliceoğlu A., Gürcan F., 2017. Separated Flow Structures in a Z-shaped Cavity. **International Conference on Mathematics and Mathematics Education**: ss596, Şanlıurfa-TÜRKİYE.

(c) Çelik E., Deliceoğlu A., 2017. An Investigation of a Boundary Layer Separation Near a Re-entrant Corner. **International Conference on Mathematics and Mathematics Education**: ss424, Şanlıurfa-TÜRKİYE.