T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

REKTİFİYAN GELİŞTİRİLEBİLİRLİK VE BİR UZAY EĞRİSİNİN KÜRESEL DARBOUX GÖRÜNTÜSÜ

Tezi Hazırlayan
Esra KAYA

Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. Nural YÜKSEL

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2009
KAYSERİ

i

Yrd. Doç. Dr. Nural YÜKSEL danışmanlığında **Esra KAYA** tarafından hazırlanan **"Rektifiyan Geliştirilebilirlik Ve Bir Uzay Eğrisinin Küresel Darboux Görüntüsü"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

12/06/2009

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. Mehmet ÖZDEMİR

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nural YÜKSEL

Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 16/06/2009 tarih ye 2009/19-01 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında; çok değerli bilgi ve deneyimleri ile bana yol gösteren, her zaman ve her konuda en büyük desteği gördüğüm, saygıdeğer hocalarım Sayın Prof. Dr. Mehmet ÖZDEMİR' e ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Nural YÜKSEL' e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, bugünlere gelmemde, maddi ve manevi hiçbir fedakarlıktan çekinmeyen canım anneme ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.

REKTİFİYAN GELİŞTİRİLEBİLİRLİK VE BİR UZAY EĞRİSİNİN KÜRESEL DARBOUX GÖRÜNTÜSÜ

Esra KAYA
Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2009
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Nural YÜKSEL

ÖZET

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tezin içeriği ile ilgili giriş yapıldı.

İkinci bölümde, eğriler, Serret-Frenet vektörleri ve düzlem denklemleri hakkında temel tanım ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, eğrilikler hakkında tanımlar ve teoremler ifade ve ispat edildi.

Dördüncü bölümde, küresel eğriler hakkında tanımlar ve teoremler ifade ve ispat edildi.

Beşinci bölümde ise, bir γ eğrisinin $RG(\gamma)$ rektifiyan Gauss yüzeyi ve $RD(\gamma)$ rektifiyan geliştirilebilirliği tanımlanarak, bunlarla ilgili çalışmalarda kullanışlı olan uzay eğrileri üzerinde volumelike uzaklık fonksiyonu ve volumelike yükseklik fonksiyonu tanımlandı. Bu fonksiyonların Serret-Frenet vektörleri ve eğriliklerle ilişkileri incelenerek gerekli tanım ve teoremler verildi.

Anahtar Kelimeler: Eğri, Eğrilikler, Küresel eğriler, Serret-Frenet vektörleri, Darboux vektörleri, Rektifiyan geliştirilebilirlik.

THE RECTIFYING DEVELOPABLE AND THE SPHERICAL DARBOUX IMAGE OF A SPACE CURVE

Esra KAYA
Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M. Sc. Thesis, Jun 2009
Thesis Supervisor: Assist. Prof. Nural YÜKSEL

ABSTRACT

This study has five chapters.

In the first chapter,the introduction about content of the thesis is made.

In the second chapter,it is given the basic definitions and theorems about curves, Serret-Frenet vectors and plane equations.

In the third chapter, it is expressed and proved about the definitions and theorems of curvatures.

In the fourth chapter, it is expressed and proved about the definitions and theorems of spherical curves.

In the fifth chapter, the rectifying Gauss surface $RG(\gamma)$ and the rectifying developable $RD(\gamma)$ of space curve γ are defined, introducing the notion of volumelike distance functions and volumelike height functions that are quite useful for the study of space curves, the relationships among these functions and Serret-Frenet vectors have been analysed and given the necessary definitions and theorems

Keywords: Curve, Curvature, Spherical curves, Serret-Frenet vectors, Darboux vector, Rectıfyıng developable

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY…….i

TEŞEKKÜR……ii

ÖZET……...……..iii

ABSTRACT……...iv

SEMBOLLER……vi

1. BÖLÜM

GİRİŞ……..1

2. BÖLÜM

TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER……..2

3. BÖLÜM

EĞRİLİKLER……21

4. BÖLÜM

KÜRESEL EĞRİLER……28

5. BÖLÜM

REKTİFİYAN GELİŞTİRİLEBİLİRLİK VE KÜRESEL DARBOUX GÖRÜNTÜ…34

KAYNAKLAR……56

ÖZGEÇMİŞ……....57

SEMBOLLER

E^n : Öklit Uzayı

$\mathbb{S}^2$: Küre

D : Kovaryant Türev

$\chi(M)$: M üzerindeki vektör alanlarının cümlesi

$k_i(s)$: i-yinci eğrilik fonksiyonu

RD : γ eğrisinin rektifiyan geliştirilebilirliği

RG : γ eğrisinin rektifiyan Gauss yüzeyi

$D(s)$: γ eğrisinin Darboux vektörü

$\tilde{D}(s)$: γ eğrisinin modife Edilmiş Darboux vektörü

$d(s)$: Küresel Darboux görüntüsü

$f_u(s)$: Volumelike Uzaklık Fonksiyonu

$g_u(s)$: Volumelike Yükseklik Fonksiyonu

$I\mu\mu$: Regüler eğriler uzayı

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Bu çalışmada ilk olarak eğriler teorisi ve eğrilikler hakkında temel tanım ve teoremler verildi.

Diferensiyel geometride önemli bir yeri olan Serret -Frenet vektörleri ayrıntılı bir şekilde incelendi. Bir $M \subset E^n$ eğrisinin ‘‘s’’ yay parametresi ve ‘‘t’’ keyfi parametre olması halinde Frenet vektörleri ve eğrilikleri incelenerek, düzlem denklemleri verildi. Ayrıca küresel eğrilerle ilgili gerekli tanım ve teoremler ispatlandı.

Çalışmanın temelini teşkil eden son bölümde ise $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında diferensiyel geometrinin uzay eğrileri üzerindeki bazı temel kavramları incelenerek, rektifiyan geliştirilebilirlik tanımlandı. Ayrıca

$$d : I \to S^2$$
$$s \to d(s) = \frac{D(s)}{\|D(s)\|}$$

küresel Darboux görüntü, γ eğrisinin

$RG(\gamma) = \{ut(s) + b(s) \mid u \in \mathbb{R}, s \in I\}$ rektifiyan Gauss yüzeyi ve

$RD(\gamma) = \{\gamma(s) + u\tilde{D}(s) \mid u \in \mathbb{R},\}$ rektifiyan geliştirilebilirliği tanımlandı.

d, $RG(\gamma)$, $RD(\gamma)$ ile ilgili çalışmalarda kullanışlı olan uzay eğrileri üzerinde volumelike uzaklık ve volumelike yükseklik fonksiyonları tanımlanarak, bu fonksiyon ailelerinin, Serret-Frenet vektörleri ve eğriliklerle olan ilişkileri incelendi. Bunlarla ilgili tanım ve teoremler verilerek ispatlandı.

2. BÖLÜM

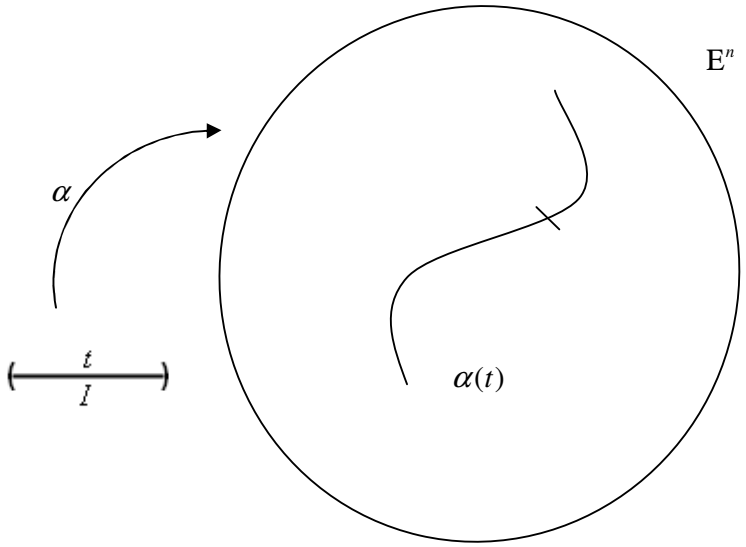
TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1.1 (Eğri). $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere,

$$\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{E}^n$$

$$t \to \alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_n(t)$$

şeklinde tanımlı fonksiyon diferensiyellenebilirse $\alpha(\mathrm{I})$'ya E^n'de (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanmış bir **eğri** adı verilir.



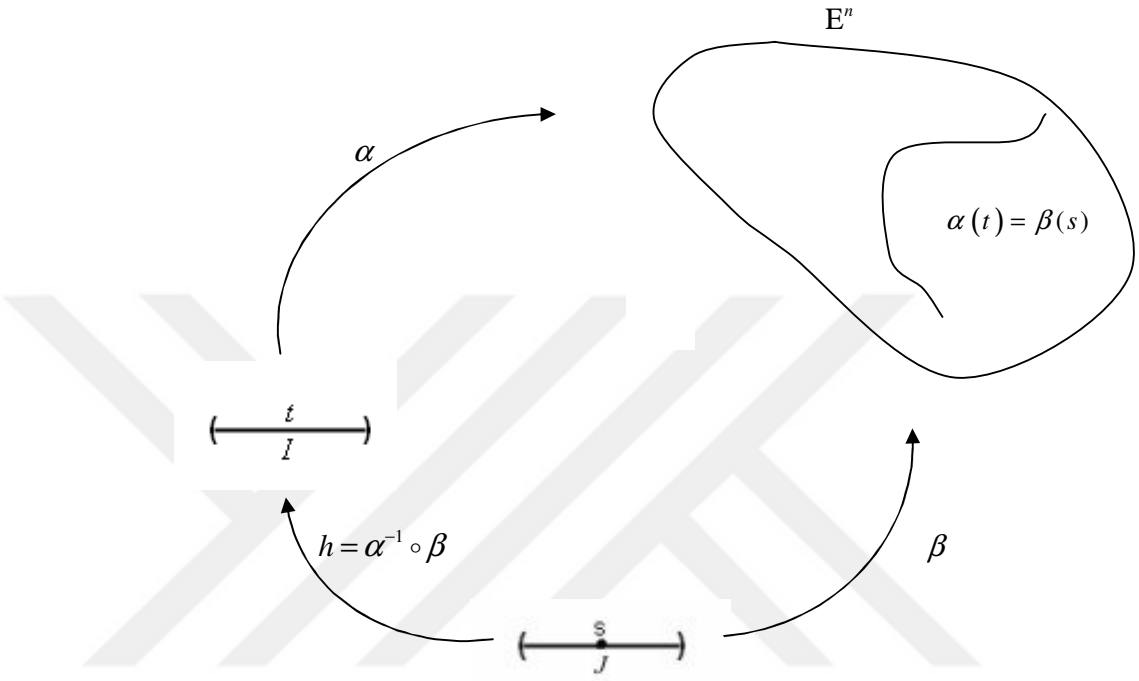
Şekil 2.1.1. Eğri

Tanım 2.1.2 (Parametre Değişimi). E^n'de M eğrisi (I, α) ve (J, β) koordinat komşulukları ile tanımlanmış olsun.

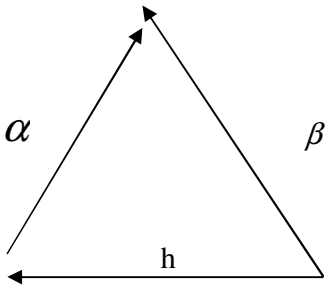
$$h = \alpha^{-1} \circ \beta : J \to \mathrm{I}$$

$$s \to h(s) = t$$

şeklinde tanımlı diferensiyellenebilir h fonksiyonuna parametre değişim fonksiyonu denir [1].



Şekil 2.1.2. Parametre Değişimi



$$h = \alpha^{-1} \circ \beta$$
$$\beta = \alpha \circ h$$
$$\alpha = \beta \circ h^{-1}$$

Buradan;

$$\beta(s) = (\alpha \circ h)(s)$$
$$= \alpha(h(s))$$
$$= \alpha(t)$$
$$\alpha(t) = (\beta \circ h^{-1})(t)$$

$$= \beta\left(h^{-1}(t)\right)$$

$$= \beta(s)$$

olur.

Tanım 2.1.3 (Bir Eğrinin Hız Vektörü).

$$\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{E}^n$$

$$t \to \alpha(t) = \left(\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_n(t)\right)$$

eğrisi için;

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt}$$

$$= \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, ..., \frac{d\alpha_n}{dt}\right)$$

olmak üzere $\left(\alpha(t), \alpha'(t)\right)$ ikilisine α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki tanjant vektörü ve $\alpha'(t)$ 'ye de hız vektörü adı verilir.

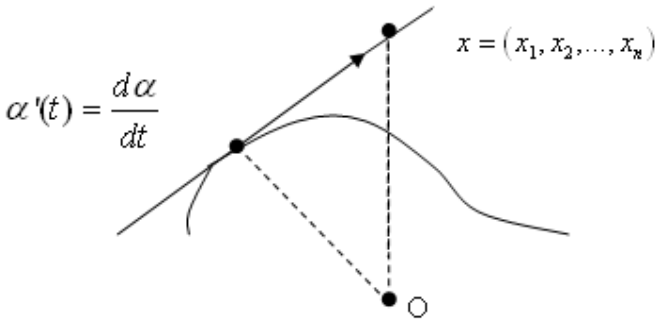
$x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ de eğrinin $\alpha(t)$ noktasındaki teğet doğrusunun vektörel ve parametrik denklemi

$$\overrightarrow{Ox} = \overrightarrow{O\alpha(t)} + \lambda\alpha'(t)$$

$$\overrightarrow{Ox} = \overrightarrow{O\alpha(t)} + \lambda\frac{d\alpha}{dt}$$

$$x = \alpha(t) + \lambda\frac{d\alpha}{dt}$$

şeklindedir [1].



Şekil 2.1.3. Hız Vektörü

Tanım 2.1.4 (Skaler Hız ve Skaler Hız Fonksiyonu). E^n'de α eğrisi parametrik olarak,

$$\alpha : I \to E^n$$

$$t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), ..., \alpha_n(t))$$

şeklinde tanımlansın.

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, ..., \frac{d\alpha_n}{dt} \right)$$

$$\left\| \alpha'(t) \right\| = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d\alpha i}{dt} \right)^2}$$

olmak üzere,

$$\left\| \alpha' \right\| : I \to \mathbb{R}$$

$$t \to \left\| \alpha' \right\|(t) = \left\| \alpha'(t) \right\|$$

$$\left\| \alpha'(t) \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d\alpha i}{dt} \right)^2}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona skaler hız fonksiyonu ve $t = t_0$ noktasındaki

$$\left\| \alpha'(t_0) \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d\alpha i}{dt}\Big|_t \right)^2} \in \mathbb{R}$$

reel sayısına da skaler hız adı verilir.

Teorem 2.1.1.(Hız Değişimi). E^n'de M eğrisi (I α) ve (J, β) koordinat komşulukları ile verilsin. Bu durumda,

$$h= \alpha^{-1} o \beta : J \to I$$

parametre değişim fonksiyonu olmak üzere,

$$\beta'(s) = \frac{dh}{ds}\alpha'(h(s)) = \frac{dh}{ds}\alpha'(t)$$

dir.

İspat: Parametre değişim fonksiyonunun tanımı gereği

$$\beta(s) = (\alpha o h)(s)$$

$$= \alpha(h(s))$$

olduğu biliniyor. Bu eşitliğin her iki tarafının s'e göre türevi alınırsa;

$$\beta'(s) = \frac{d\beta}{ds}$$

$$= \frac{d\alpha}{dh(s)} . \frac{dh}{ds}$$

$$= \alpha'(h(s)) . \frac{dh}{ds}$$

$$= \frac{dh}{ds}\alpha'(t)$$

$$h : J \to I \subseteq \mathbb{R}$$

$$s \to h(s)$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım 2.1.5 (Yay Uzunluğu).

$$\alpha : I \to E^n$$

$$t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), ..., \alpha_n(t))$$

eğrisi verilmiş olsun. $t_1, t_2 \in I$ olmak üzere,

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left\| \alpha'(t) \right\| dt$$

reel sayısına α eğrisinin $\alpha(t_1)$ ve $\alpha(t_2)$ noktaları arasındaki yay uzunluğu denir.

Tanım 2.1.6 (Birim Hızlı Eğri).

$$\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{E}^n$$

$$s \to \alpha(s) = \left(\alpha_1(s), ..., \alpha_n(s)\right)$$

eğrisi verilsin. Eğer,

$$\left\| \alpha'(s) \right\| = \left\| \frac{d\alpha}{ds} \right\| = 1$$

ise eğriye birim hızlı eğri, s parametresine de yay parametresi adı verilir.

Tanım 2.1.7 (Regüler Eğri).

$$\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{E}^n$$

$$t \to \alpha(t) = \left(\alpha_1(t), ..., \alpha_n(t)\right)$$

eğrisi için;

$$\left\| \alpha'(t) \right\| = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| \neq 0$$

ise eğriye regüler eğri denir.

Teorem 2.1.2. Her regüler eğri kendi yayı cinsinden ifade edilebilir. Bu halde eğri birim hızlı eğri olur. **[1]**

2.2 Serret - Frenet Vektörleri:

E^n'de M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlansın. Bu eğrinin hız vektörü;

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, ..., \frac{d\alpha_n}{dt} \right)\Big|_{\alpha(t)=0}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{d\alpha_i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\alpha(t)}$$

şeklindedir.

$$\alpha' : M \to \bigcup_{m \in M} \mathrm{T}_{M(m)}$$

$$m \to \alpha'(m) = \alpha'(t)\Big|_{\alpha(t)=m}$$

$$t \to \alpha'(t)$$

$\alpha' \in \chi(\mathrm{M}) \subset \chi(\mathrm{E}^n)$ E^n'de kovaryant türev operatörü D olmak üzere $D\alpha' = \frac{d}{dt}$ operatörü göz önüne alınırsa,

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, ..., \frac{d\alpha_n}{dt} \right)$$

$$D_{\alpha'}\alpha' = \frac{d\alpha'}{dt}$$

$$= \left(\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}, \frac{d^2\alpha_2}{dt^2}, ..., \frac{d^2\alpha_n}{dt^2} \right)$$

$$= \alpha''(t)$$

$$D_{\alpha'}\alpha'' = \frac{d\alpha''}{dt}$$

$$= \left(\frac{d^3\alpha_1}{dt^3}, \frac{d^3\alpha_2}{dt^3}, ..., \frac{d^3\alpha_n}{dt^3} \right)$$

$$= \alpha'''(t)$$

$$\vdots$$

$$D_{\alpha'}\alpha^{(n-1)} = \frac{d\alpha^{(n-1)}}{dt}$$

$$= \left(\frac{d^n\alpha_1}{dt^n}, \frac{d^n\alpha_2}{dt^n}, ..., \frac{d^n\alpha_n}{dt^n} \right)$$

$$= \alpha^{(n)}(t)$$

elde edilir. Böylece;

$$S=\left\{\alpha'(t),\alpha''(t),...,\alpha^{(n)}(t)\right\}$$

cümlesi bulunur. Bu S cümlesinde de lineer bağımsız vektörlerin maksimum sayısı r olmak üzere,

$$S'=\left\{\alpha'(t),\alpha''(t),...,\alpha^{(r)}(t)\right\}$$

lineer bağımsız sistemi göz önüne alınsın. Bu sisteme Gram-Smitch ortogonalleştirme ve ortonormalleştirme metodu uygulanacak olursa;

$$\mathrm{E}_1=\alpha'(t)$$

$$\mathrm{E}_2=\alpha''(t)-\frac{<\alpha''(t),\mathrm{E}_1>}{<\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_1>}\mathrm{E}_1$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{E}_r=\alpha^{(r)}(t)-\sum_{k=1}^{r-1}\frac{<\alpha^{(r)},\mathrm{E}_k>}{<\mathrm{E}_k,\mathrm{E}_k>}\mathrm{E}_k$$

şeklinde tanımlanan $\{\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2,...,\mathrm{E}_r\}$ ortogonal sistemi elde edilir. Ortogonal sistemi normlamak sureti ile;

$$V_1=\frac{\mathrm{E}_1}{\|\mathrm{E}_1\|},\ V_2=\frac{\mathrm{E}_2}{\|\mathrm{E}_2\|},\ \dots,\ V_r=\frac{\mathrm{E}_r}{\|\mathrm{E}_r\|}$$

şeklinde tanımlı $\{V_1(t),V_2(t),...,V_r(t)\}$ ortanormal sistemi bulunur [1].

Burada

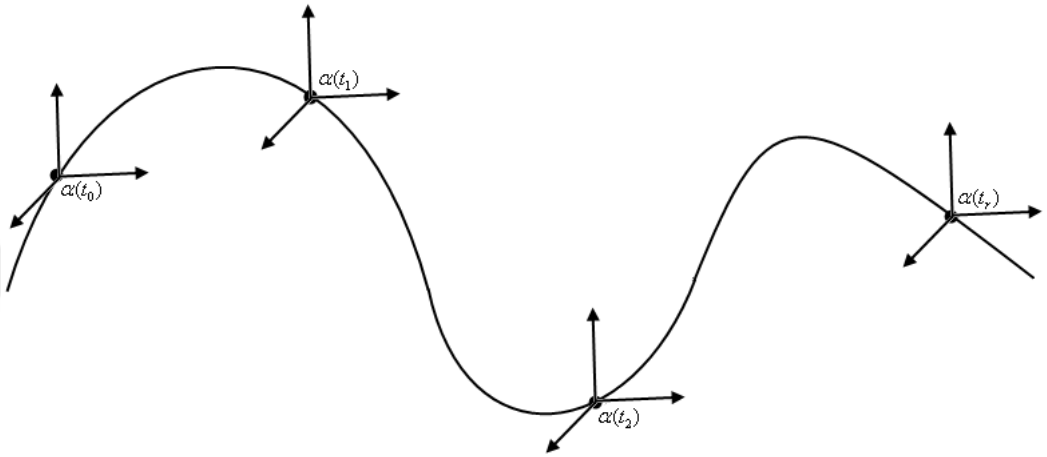
$$<V_i,V_j>=\sigma_{ij}=\begin{cases}1\ , & i=j\\ 0\ , & i\neq j\end{cases}$$

dir.

Tanım 2.2.1. (Frenet Vektörleri). E^n'de M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$S'=\left\{\alpha'(t),\alpha''(t),...,\alpha^{(r)}(t)\right\}$$

lineer bağımsız sisteminden elde edilen $\{V_1(t), V_2(t), ..., V_r(t)\}$ sistemine Serret - Frenet r-ayaklısı veya r ayaklı alanı, buradaki her bir $V_i(t)$, $1 \le i \le r$ vektörlerine de Frenet Vektörleri adı verilir.



Şekil 2.2.1. Frenet Vektörleri

Örnek 2.2.1. $\mathrm{I} = \{t \,|\, 0 \le t \le 2\pi\}$ olmak üzere;

$$\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{E}^3$$

$$t \to \alpha(t) = \left(\cos t, \sin t, \frac{t^2}{2}\right)$$

şeklinde tanımlı eğrinin t=0 ve $t \neq 0$ noktalarında Frenet r- ayaklılarını bulunuz.

Çözüm: $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, t)$

$$\alpha''(t) = (-\cos t - \sin t, 1)$$

$$\alpha'''(t) = (\sin t, -\cos t, 0)$$

$t \neq 0$ ise $\{\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)\}$ sistemi lineer bağımsız olduğundan Frenet 3-ayaklısı kurulur.

t=0 ise;

$$\alpha'(0) = (0,1,0)$$

$$\alpha''(0) = (-1,0,1)$$

$$\alpha'''(0) = (0,-1,0)$$

ise $\{\alpha'(0), \alpha''(0)\}$ lineer bağımsızdır. Dolayısıyla Frenet 2- ayaklısı

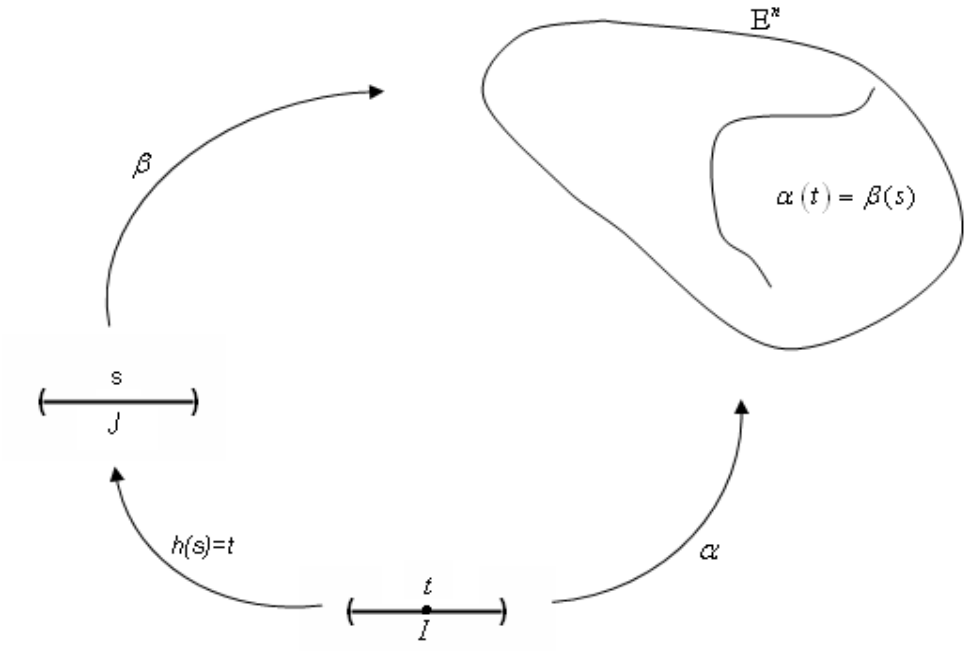
$$E_1 = \alpha'(0)$$

$$E_2 = \alpha''(0) - \frac{< \alpha''(0), E_1 >}{< E_1, E_1 >} E_1$$

$\left\{(0,1,0), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ şeklindedir.

Sonuç olarak, eğrinin farklı noktalarındaki Frenet r- ayaklıları aynı olmayabilir.

Teorem 2.2.1. E^n'de bir α eğrisinin Frenet r- ayaklı alanı koordinat komşuluğunun seçiminden bağımsızdır.



Şekil 2.2.2. Koordinat Komşuluğu

İspat: α eğrisi (I,α) ve (J,β) gibi iki koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun.

$$h:\alpha^{-1}\circ\beta:J\to I$$

olacak şekilde parametre değişim fonksiyonu vardır.

$$\beta(s)=(\alpha\circ h)(s)=\alpha(h(s))$$

$$\beta'(s)=\frac{d\alpha}{dh(s)}.\frac{dh}{ds}=\frac{dh}{ds}\alpha'(h(s))$$

olup, $\beta'(s)\in S_p\{\alpha'(h(s))\}$

$\beta''(s)=\alpha''(h(s))\left(\frac{dh}{ds}\right)^2+\alpha'(h(s))\frac{d^2h}{ds^2}$ olduğundan,

$$\beta''(s)\in S_p\{\alpha'(h(s)),\alpha''(h(s))\}$$

$$S_p\{\beta'(s),\beta''(s)\}\subset S_p\{\alpha'(h(s)),...,\alpha^{(r)}(h(s))\}$$

dir. Bu şekilde türev almak suretiyle devam edilirse,

$$S_p\{\beta'(s),...,\beta^{(r)}(s)\}\subset S_p\{\alpha'(h(s)),...,\alpha^{(r)}(h(s))\}$$

dir. Tersine;

$$\alpha(t)=\beta\circ h^{-1}(t)=\beta(h^{-1}(t))$$

$$\alpha'(t)=\frac{d\beta}{dh^{-1}(t)}\frac{dh^{-1}(t)}{dt}=\frac{dh^{-1}(t)}{dt}\beta'(s)$$

bulunur. Buradan da

$$\alpha'(t)\in S_p\{\beta'(s)\}$$

elde edilir. Bu şekilde r. mertebeye kadar türev almak suretiyle,

$$S_p\{\alpha'(h(s)),...,\alpha^{(r)}(h(s))\}\subset S_p\{\beta'(s),...,\beta^{(r)}(s)\}$$

olduğu görülebilir [2]. Dolayısıyla;

$$S_p\{\alpha'(h(s)),...,\alpha^{(r)}(h(s))\}=S_p\{\beta'(s),...,\beta^{(r)}(s)\}$$

dir. Bu ise Frenet vektörlerinin parametre seçiminden bağımsız olduğunu gösterir.

Tanım 2.2.2 (n=3 Özel Hali). E^3'de M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile

$$\alpha : I \to E^3$$

$$t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

şeklinde tanımlansın.

$$E_1 = \alpha'(t)$$

$$V_1(t) = T(t) = \frac{E_1}{\|E_1\|} = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

vektörüne eğrinin birim teğet vektör alanı adı verilir.

Eğer, $\alpha : I \to E_3$

$$s \to \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$$

şeklinde yay parametresi ile verilmiş ise $\|\alpha'(s)\| = 1$ olacağından;

$$V_1(s) = T(s) = \alpha'(s)$$

ve

$$E_2 = \alpha''(s) - \frac{<\alpha''(s), \alpha'(s)>}{<\alpha'(s), \alpha'(s)>} \cdot \alpha'(s)$$

bulunur.

$$\|\alpha'(s)\| = 1 \Rightarrow <\alpha'(s), \alpha'(s)> = 1$$

olup, her iki tarafın s'e göre türevi alınırsa;

$$<\alpha''(s), \alpha'(s)> + <\alpha'(s), \alpha''(s)> = 0$$

$$\Rightarrow <\alpha''(s), \alpha'(s)> = 0$$

$$\Rightarrow E_2 = \alpha''(s)$$

bulunur.

$$V_2(s) = \mathrm{N}(s)$$

$$= \frac{\mathrm{E}_2}{\|\mathrm{E}_2\|} = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

vektörüne eğrinin birim normal vektör alanı adı verilir. Böylece,

$$V_3(s) = B(s)$$

$$= V_1(s) \wedge V_2(s)$$

$$= T(s) \wedge \mathrm{N}(s)$$

$$= \alpha'(s) \wedge \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

$$= \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

şeklinde tanımlı vektöre eğrinin binormal vektör alanı denir.

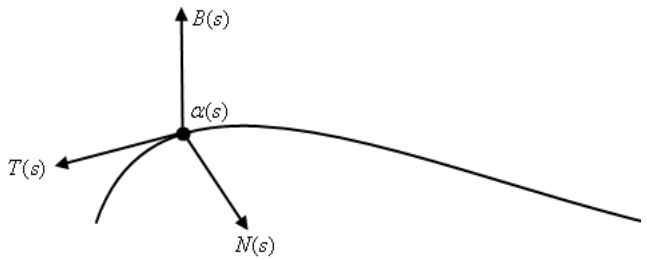
Burada,

$$V_1 \wedge V_2 = V_3$$

$$V_2 \wedge V_3 = V_1$$

$$V_3 \wedge V_1 = V_2$$

dir.



Şekil 2.2.3. Frenet 3- ayaklısı

$$\langle T,T\rangle = \langle B,B\rangle = \langle N,N\rangle = 1$$

$$T \wedge N = B, \quad N \wedge B = T, \quad B \wedge T = N$$

$$T \wedge T = 0, \quad N \wedge N = 0, \quad B \wedge B = 0$$

şeklindedir [1,2]. Buna göre

$$\alpha : \mathrm{I} \to E^3$$

$$s \to \alpha(s)$$

eğrisi s yay parametresi ile verilmiş ise

$$\mathrm{T}(s) = V_1(s) = \alpha'(s)$$

$$N(s) = V_2(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

$$B(s) = V_3(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

şeklindedir.

Teorem 2.2.1. E^3'de M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. t keyfi bir parametre olmak üzere;

$$\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{E}_3$$

$$t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda Frenet 3-ayaklısı $\{T(t), N(t), B(t)\}$ olmak üzere;

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

$$N(t) = B(t) \wedge T(t)$$

$$B(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}$$

dır $[3]$.

2.3. Düzlem Denklemleri

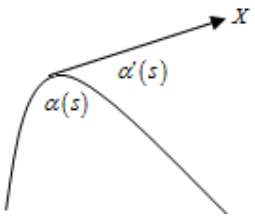
Tanım 2.3.1. E^n de

$$\alpha : I \to E^n$$
$$s \to \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \ldots, \alpha_n(s))$$

şeklinde tanımlı α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \ldots, V_r(s)\}$ olsun. $p \le r$ için $S_p\{V_1(s), V_2(s), \ldots, V_p(s)\} \subseteq T_\alpha(\alpha(s))$ alt uzayına α eğrisinin P. mertebeden **oskülatör hiperdüzlemi** adı verilir.

Buna göre;

a) $p = 1$ için $S_p\{V_1(s)\} \subseteq T_\alpha(\alpha(s))$ alt uzayı eğrinin teğet doğrusu olup 1. mertebeden oskülatör hiperdüzleme karşılık gelir.

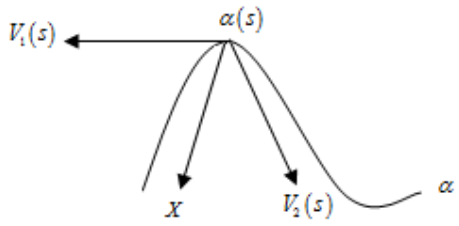


Şekil 2.3.1. (1. Mertebeden Oskülatör Hiperdüzlem)

$$\overrightarrow{\alpha(s)X} = \lambda\alpha'(s) \Rightarrow x = \alpha(s) + \lambda\alpha'(s)$$

dır.

b) $p = 2$ için $S_p\{V_1(s), V_2(s)\} \subseteq T_\alpha(\alpha(s))$ alt uzayı eğrinin 2. mertebeden oskülatör hiperdüzlemine karşılık gelir.

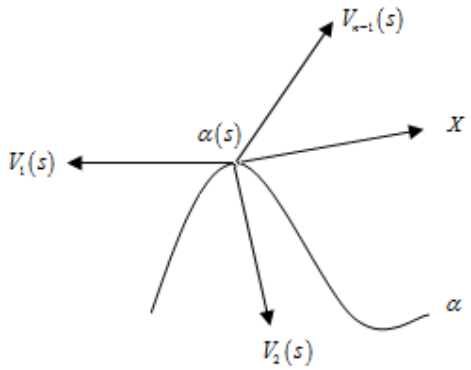


Şekil 2.3.2. (2. Mertebeden Oskülatör Hiperdüzlem)

$$\overrightarrow{\alpha(s)X} \in S_p\{V_1(s), V_2(s)\} \Rightarrow \det\left(\overrightarrow{\alpha(s)X}, V_1(s), V_2(s)\right) = 0$$

dır

c) $r = n$ için $p = n-1$ ise $S_p\{V_1(s), V_2(s), \ldots, V_{n-1}(s)\} \subseteq T_\alpha(\alpha(s))$ alt uzayı eğrinin belirttiği en yüksek mertebeden oskülatör hiperdüzlemdir.



Şekil 2.3.3 ((n-1). Mertebeden Oskülatör Hiperdüzlem)

$$\overrightarrow{\alpha(s)X} \in S_p\{V_1(s), V_2(s), \ldots, V_{n-1}(s)\} \Rightarrow \det\left(\overrightarrow{\alpha(s)X}, V_1(s), V_2(s), \ldots, V_{n-1}(s)\right) = 0$$

dır.

Tanım 2.3.2 (n=3 Özel Hali).

$\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ile gösterilsin. Bu durumda,

a) $S_p\{T(s), N(s)\}$ alt uzayının belirtmiş olduğu oskülatör düzleme $\alpha(s)$ noktasındaki 2. mertebeden oskülatör düzlem veya **Teğet Düzlem** adı verilir ve denklemi;

$$\det\left(\overrightarrow{\alpha(s)X}, T(s), N(s)\right) = 0$$

ile hesaplanır.

b) $S_p\{N(s), B(s)\}$ vektör uzayı ile birleşen afin alt uzaya eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Normal Düzlemi** adı verilir ve denklemi;

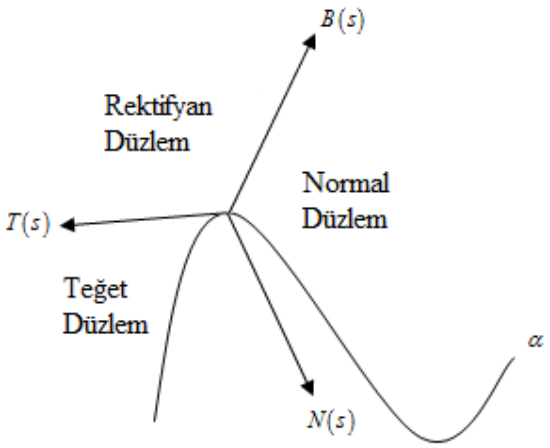
$$\det\left(\overrightarrow{\alpha(s)Y}, N(s), B(s)\right) = 0$$

ile hesaplanır.

c) $S_p\{B(s), T(s)\}$ alt uzayı ile birleşen afin alt uzaya eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Rektifiyan Düzlemi** adı verilir ve denklemi;

$$\det\left(\overrightarrow{\alpha(s)Z}, B(s), T(s)\right) = 0$$

ile hesaplanır.



Şekil 2.3.1.(n=3 Halinde Oskülatör Hiperdüzlemleri)

Örnek 2.3.1

$$\alpha : I \to E^3$$

$$t \to \alpha(t) = \left(\cos t, \sin t, \ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)\right)$$

eğrisinin $t = \frac{\pi}{2}$ noktasına karşılık gelen $B = (0,1,0)$ noktasındaki düzlem denklemlerini bulunuz.

Çözüm: α eğrisinin Frenet 3- ayaklısı,

$$T = \frac{\alpha'(\pi/2)}{\|\alpha'(\pi/2)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$$

$$B = \frac{\alpha'(\pi/2) \wedge \alpha''(\pi/2)}{\|\alpha'(\pi/2) \wedge \alpha''(\pi/2)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$$

$$N = B \wedge T = (0,-1,0)$$

dır**.**

Teğet düzlem denklemi;

$$\det\left(\overrightarrow{\alpha(\pi/2)X}, T, N\right) = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 - 1 & x_3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = 0$$

bulunur.

Normal düzlem denklemi;

$$\det\left(\overrightarrow{\alpha(\pi/2)Y}, N, B\right) = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 - 1 & y_3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow y_3 - y_1 = 0$$

dır.

Rektifiyan düzlem denklemi;

$$\det\left(\overrightarrow{\alpha(\pi/2)Z}, B, T\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} z_1 & z_2 - 1 & z_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow\ 2 - 2z_2 = 0$$

elde edilir.

3. BÖLÜM

EĞRİLİKLER

Tanım 3.1.1. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı

$$\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$$

olsun. Buna göre;

$$k_i : I \to \mathbb{R}, \quad 1 \le i < r$$
$$s \to k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin $i-$yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin $i-$yinci eğriliği denir.

$$V_1'(s) = \frac{dV_1}{ds} \qquad k_1 = \langle V_1'(s), V_2(s) \rangle$$
$$V_2'(s) = \frac{dV_2}{ds} \qquad k_2 = \langle V_2'(s), V_3(s) \rangle$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$V_r'(s) = \frac{dV_r}{ds} \qquad k_{r-1} = \langle V_{r-1}'(s), V_r(s) \rangle$$

Teorem 3.1.1. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasındaki $i-$yinci eğrilik $k_i(s)$ ve Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), ..., V_r(s)\}$ ise

(i) $V_1'(s) = k_1(s)V_2(s)$

(ii) $V_i'(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s), \quad 1 < i < r$

(iii) $V_r'(s) = -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s)$

dir.

İspat: **(i)** s yay parametresi olduğundan $\|\alpha'(s)\| = 1$ dir. Ayrıca Frenet vektörlerinin tanımından,

$$V_1(s) = T(s) = \alpha'(s)$$

dir. Her iki tarafın türevi alınırsa,

$$V_1'(s) = \alpha''(s)$$

dir.

$$V_1'(s) \in S_p\{\alpha'(s), \alpha''(s)\} = S_p\{V_1(s), V_2(s)\}$$

olduğundan,

$$V_1'(s) = aV_1(s) + bV_2(s); \quad a, b \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(3.1.1)}$$

dir. Ayrıca,

$\langle V_1, V_1 \rangle = 1$ olduğundan,

$$\frac{d}{ds}\langle V_1(s), V_1(s) \rangle = \frac{d}{ds}(1)$$

$$\langle V_1'(s), V_1(s) \rangle + \langle V_1(s), V_1'(s) \rangle = 0$$

$$2\langle V_1'(s), V_1(s) \rangle = 0$$

$$\langle V_1'(s), V_1(s) \rangle = 0$$

dır. (3.1.1) eşitliğinin her iki tarafı $V_1(s)$ ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$\langle V_1'(s), V_1(s) \rangle = a\langle V_1(s), V_1(s) \rangle + b\langle V_2(s), V_1(s) \rangle$$

$$0 = a.1 + b.0$$

$$a = 0$$

bulunur. (3.1.1) eşitliğinin her iki tarafı $V_2(s)$ ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$\begin{aligned}\langle V_1'(s), V_2(s)\rangle &= \langle aV_1(s) + bV_2(s), V_2(s)\rangle \\ &= a\langle V_1(s), V_2(s)\rangle + b\langle V_2(s), V_2(s)\rangle\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\langle V_1'(s), V_2(s)\rangle &= b\langle V_2(s), V_2(s)\rangle \\ k_1(s) &= b\end{aligned}$$

bulunur. a ve b nin değerleri (3.1.1) eşitliğinde yerine yazılırsa ,

$$V_1'(s) = k_1(s)V_2(s)$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.1. $k_1(s) = \|\alpha''(s)\|$ dir [4].

Lemma 3.1.1. **(i)** $\langle V_i'(s), V_i(s)\rangle = 0, \quad 1 \le i \le r$

(ii) $\langle V_i', V_j\rangle = -\langle V_j', V_i\rangle$, $i \neq j$

(iii) $\dfrac{\langle \alpha'(s), \alpha'''(s)\rangle}{\|\alpha''(s)\|} = -k_1(s)$

dir [5].

Lemma 3.1.1 den faydalanarak Teorem 3.1.1. in (ii) ve (iii) şıkları benzer şekilde hesaplanır.

Frenet vektörlerinin türevlerini yine kendileri cinsinden ifade etmeye yarayan bu teorem yardımıyla matris formunda yazılabilir.

$$V_1' = k_1 V_2$$
$$V_i' = -k_{i-1} V_{i-1} + k_i V_{i+1}\ , \quad 2 \le i < (r-1)$$
$$V_r = -k_{r-1} V_{r-1}$$

dir [5]. Buradan, Frenet vektörleri ortonormal olduğundan,

$$V_1' = 0V_1 + k_1 V_2 + 0V_3 + \ldots + 0V_r$$
$$V_2' = -k_1 V_1 + 0V_2 + k_2 V_3 + \ldots + 0V_r$$
$$V_3' = 0V_1 - k_2 V_2 + 0V_3 + k_3 V_4 + \ldots + 0V_r$$
$$\vdots$$
$$V'_{r-2} = 0V_1 + 0V_2 + \ldots + k_{r-2} V_{r-1} + 0V_r$$
$$V'_{r-1} = 0V_1 + 0V_2 + \ldots - k_{r-2} V_{r-2} + 0V_{r-1} + k_{r-1} V_r$$
$$V'_r = 0V_1 + 0V_2 + \ldots + 0V_{r-2} - k_{r-1} V_{r-1} + 0V_r$$

dir. Böylece;

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ \vdots \\ V'_{r-2} \\ V'_{r-1} \\ V_r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{r-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{r-2} & 0 & k_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{r-2} \\ V_{r-1} \\ V_r \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. $n = 3$ özel halinde

$$V_1 = T\ , \quad V_2 = N\ , \quad V_3 = B$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

veya;

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu şekilde yazılan k_1 eğriliğine 1. eğrilik (sadece eğrilik) adı verilir ve κ ile gösterilir. k_2 ye ise torsiyon (burulma) adı verilir ve τ ile gösterilir. Buradan,

$$T' = \kappa N$$
$$N' = -\kappa T + \tau B$$
$$B' = -\tau N$$

yazılır [6].

Teorem 3.1.2. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasındaki $i-$yinci eğrilik $k_i(s)$ ve Frenet r-ayaklısı

$$\{V_1(s), ..., V_r(s)\}$$

ve

$$E_i(s) = \alpha^{(i)}(s) - \sum_{j<1} \alpha^{(i)}(s), \quad V_j(s) > V_j(s), \quad 1 \le i \le r$$

ise

$$k_i(s) = \frac{\|E_{i+1}(s)\|}{\|E_i(s)\|}, \quad (1 \le i < r)$$

dir.

İspat: Frenet vektörlerinin tanımından,

$$V_i(s) = \frac{E_i(s)}{\|E_i(s)\|}$$

şeklinde yazılabilir. Eğriliklerin tanımı göz önüne alındığında,

$$k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle$$
$$= \left\langle \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\|E_i(s)\|} E_i(s) \right), V_{i+1}(s) \right\rangle$$

dir. Buradan,

$$k_i(s)=\frac{1}{\|E_i(s)\|}\langle E_i'(s),V_{i+1}(s)\rangle-\frac{\langle E_i',E_i\rangle}{\|E_i(s)\|^3}\underbrace{\langle E_i(s),V_{i+1}(s)\rangle}_{0}$$

$$k_i(s)=\frac{1}{\|E_i(s)\|}\langle E_i'(s),V_{i+1}(s)\rangle$$

dir. E_i ifadesinin s' ye göre türevi alınırsa,

$$E_i'=\alpha^{(i+1)}(s)-\frac{d}{ds}\left(\sum_{j<1}\langle\alpha^{(i)}(s),V_j(s)\rangle\right)V_j(s)-\sum_{j<1}\langle\alpha^{(i)}(s),V_j(s)\rangle V_j'(s)$$

bulunur. Bu eşitliğin sağ tarafında $\alpha^{(i+1)}(s)$ in dışındaki her bir vektör $V_1,V_2,...,V_i$ vektörlerinin bir lineer terkibidir ve bunların hepsi de V_{i+1} vektörüne ortogonaldir. Bu son eşitliğin her iki tarafı V_{i+1} ile iç çarpıma tabii tutulursa;

$$\langle E_i',V_{i+1}\rangle=\langle\alpha^{(i+1)}(s),V_{i+1}\rangle$$

veya

$$\langle E_i',V_{i+1}\rangle=\frac{1}{\|E_{i+1}\|}\langle E_{i+1},E_{i+1}\rangle=\|E_{i+1}\|$$

elde edilir. Bu değer $k_i(s)$ ifadesinde yerine yazılırsa,

$$k_i(s)=\frac{\|E_{i+1}(s)\|}{\|E_i(s)\|},\quad 1\le i<r$$

dir. Bu ise istenen sonuçtur.

Teorem 3.1.3. $M\subset E^n$ eğrisi herhangi bir (J,β) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda, $t\in J$ ye karşılık gelen $\beta(t)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı

$$\{V_1(t),...,V_r(t)\}$$

ve

$$F_i(t) = \beta^{(i)}(t) - \sum_{j<1} \left\langle \beta^{(i)}(t), V_j(t) \right\rangle V_j(t)$$

olmak üzere

$$k_i(t) = \frac{\|F_{i+1}(t)\|}{\|F_1(t)\| \|F_i(t)\|}, \quad 1 \le i < r$$

dir [6].

4. BÖLÜM

KÜRESEL EĞRİLER

Tanım 4.1.1. $M \subset E^n$ eğrisi ve $S^p \subset E^n$ p-hiperküresi verilsin. Eğer $M \subset S^p$ ise M ye E^n nin bir p-hiperküresel eğrisi denir.

$n=3$ ve $p=1$ halinde M eğrisi bir çember veya çember yayıdır. Burada $n=3$ ve $p=2$ olduğunda $M \subset S^2$ eğrisi için bir karakterizasyon elde edilecektir [6].

Teorem 4.1.1. $M \subset E^3$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasında Frenet 3-ayaklısı

$$\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\}$$

olan kürelerin merkezlerinin geometrik yeri,

$$a(s) = \alpha(s) - m_2(s)V_2(s) - \lambda V_3(s)$$

dir. Burada $m_2 : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olup

$$m_2(s) = -\frac{1}{k_1(s)}$$

ve $\lambda \in \mathbb{R}$ dir.

İspat: M eğrisi s yay parametresi ile verilsin. $\alpha(s) \in M$ noktasında M ile sonsuz yakın üç noktası olan bir kürenin merkezi "a" ve yarıçapı "r" olmak üzere

$$f : I \to \mathbb{R}$$
$$s \to f(s) = \langle \alpha(s) - a, \alpha(s) - a \rangle - r^2$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$S^2 = \{ x \mid x \in E^3, \langle x - a, x - a \rangle = r^2 \}$$

ile M eğrisinin sonsuz yakın üç ortak noktasının olabilmesi için,

$$f(s) = f'(s) = f''(s) = 0$$

olmalıdır.

$$f(s) = 0 \Rightarrow \langle \alpha(s) - a, \alpha(s) - a \rangle = r^2$$

$$\Rightarrow f'(s) = \langle \alpha'(s), \alpha(s) - a \rangle + \langle \alpha(s) - a, \alpha'(s) \rangle$$
$$= 2\langle \alpha'(s), \alpha(s) - a \rangle = 0$$
$$\Rightarrow \langle \alpha'(s), \alpha(s) - a \rangle = 0$$
$$\Rightarrow \langle V_1(s), \alpha(s) - a \rangle = 0$$

dır.

$$f''(s) = \langle V_1'(s), \alpha(s) - a \rangle + \langle V_1(s), \alpha'(s) \rangle$$
$$= \langle k_1 V_2(s), \alpha(s) - a \rangle + \langle V_1(s), V_1(s) \rangle = 0$$
$$\Rightarrow k_1 \langle V_2(s), \alpha(s) - a \rangle + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \langle V_2(s), \alpha(s) - a \rangle = -\frac{1}{k_1(s)}$$

dir. Eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri

$$\{ V_1(s), V_2(s), V_3(s) \}$$

tanjant uzayının bir bazını teşkil eder [6].

$$-\alpha(s) + a = m_1 V_1 + m_2 V_2 + m_3 V_3$$

dir. Eşitliğin her iki tarafı V_1 ile iç çarpıma tabii tutulursa;

$$\langle a-\alpha(s),V_1\rangle = m_1\underbrace{\langle V_1,V_1\rangle}_{1}+m_2\underbrace{\langle V_2,V_1\rangle}_{0}+m_3\underbrace{\langle V_3,V_1\rangle}_{0}$$
$$\Rightarrow m_1=0$$

bulunur. Her iki tarafını V_2 ile iç çarpıma tabii tutulrsa;

$$\langle a-\alpha(s),V_2\rangle = m_1\underbrace{\langle V_1,V_2\rangle}_{0}+m_2\underbrace{\langle V_2,V_2\rangle}_{1}+m_3\underbrace{\langle V_3,V_2\rangle}_{0}$$

$$\Rightarrow -m_2=\frac{1}{k_1(s)}$$

elde edilir. $f(s)=0$ dan

$$\langle \alpha(s)-a,\alpha(s)-a\rangle = r^2$$
$$\langle a-\alpha(s),a-\alpha(s)\rangle = r^2$$

$$\langle m_1V_1+m_2V_2+m_3V_3,m_1V_1+m_2V_2+m_3V_3\rangle = r^2$$

$$\underbrace{m_1^2}_{0}\langle V_1,V_1\rangle+m_2^2\underbrace{\langle V_2,V_2\rangle}_{1}+m_3^2\underbrace{\langle V_3,V_3\rangle}_{1}=r^2$$

$$m_2^2+m_3^2=r^2$$

$$m_3^2=r^2-m_2^2=r^2-\frac{1}{k_1^2}$$

$$m_3=\mp\sqrt{r^2-\frac{1}{k_1^2}}=\mp\lambda$$

$$a-\alpha(s)=\frac{1}{k_1(s)}V_2-\lambda V_3$$

$$a=\alpha(s)-m_2V_2-\lambda V_3$$

bulunur.

Tanım 4.1.2. $M\subset E^3$ eğrisi ile $m\in M$ noktasında sonsuz yakın dört noktası ortak olan küreye M eğrisinin m noktasındaki **oskülatör küresi** veya **eğrilik küresi** denir.

Tanım 4.1.3. $M \subset E^3$ eğrisi ile $m \in M$ noktasında sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerin merkezlerinin geometrik yerine M nin $m \in M$ noktasındaki **eğrilik ekseni** adı verilir.

Teorem 4.1.2. $M \subset E^3$ eğrisi yay parametresi ile verilsin. $\alpha(s)$ noktasındaki oskülatör kürenin merkezi a ise,

$$a = \alpha(s) - m_2 V_2 - m_3 V_3$$

dir. $\alpha(s)$ noktasında Frenet 3-ayaklısı, $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\}$ olmak üzere;

$$m_2(s) = -\frac{1}{k_1(s)} \quad , \quad m_3(s) = -\frac{m_2'(s)}{k_2(s)}$$

dir.

İspat: Oskülatör küre ile M eğrisinin sonsuz yakın dört ortak noktasının olması için

$$f(s) = 0, f'(s) = 0, f''(s) = 0$$

ifadesine ilaveten $f'''(s) = 0$ olmalıdır. Bir önceki teoremden,

$$f(s) = 0 \Rightarrow \langle \alpha(s) - a, \alpha(s) - a \rangle = r^2$$

$$f'(s) = 0 \Rightarrow \langle V_1(s), \alpha(s) - a \rangle = 0$$

$$f''(s) = 0 \Rightarrow m_2(s) = -\frac{1}{k_1(s)}$$

$$f''(s) = k_1 \langle V_2(s), \alpha(s) - a \rangle + 1$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$f'''(s) = k_1' \langle V_2(s), \alpha(s) - a \rangle + k_1 \left[\langle V_2'(s), \alpha(s) - a \rangle + \langle V_2(s), \alpha'(s) \rangle \right] + 0$$

$$f'''(s) = k_1' \langle V_2(s), \alpha(s) - a \rangle + k_1 \langle V_2'(s), \alpha(s) - a \rangle + k_1 \langle V_2(s), \alpha'(s) \rangle = 0$$

$$k_1' \langle V_2(s), \alpha(s) - a \rangle + k_1 \langle V_2'(s), \alpha(s) - a \rangle = 0$$

$$k_1'\langle V_2(s),\alpha(s)-a\rangle - k_1^2\langle V_1,\alpha(s)-a\rangle + k_1k_2\langle V_3,\alpha(s)-a\rangle = 0$$

$$k_1'\langle V_2(s),\alpha(s)-a\rangle + k_1k_2\langle V_3,\alpha(s)-a\rangle = 0$$

$$k_1'm_2 + k_1k_2m_3 = 0$$

dır.

$$m_2 = -\frac{1}{k_1} \Rightarrow m_2' = -\frac{k_1'}{k_1^2}$$

olduğundan,

$$m_3 = \frac{k_1'}{k_1^2k_2} = \frac{m_2'}{k_2}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.1. M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki oskülatör küresinin yarıçapı"r" olmak üzere;

$$r = \left(m_2^2 + m_3^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

dir [7].

Teorem 4.1.3. S_0^2, O merkezli bir küre ve $M \subset S_0^2$ bir küresel eğri olsun. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere,

$$\langle \alpha(s), V_i(s)\rangle = m_i, \quad 2 \le i \le 3$$

dır.

İspat: $s \in I$ için $\alpha(s) \in S_0^2$ olduğundan S_0^2 nin yarıçapı "r" olmak üzere, kürenin denkleminden;

$$\langle \alpha(s), \alpha(s)\rangle = r^2$$

dir. Bu eşitliğin her iki tarafının s' ye göre türevini alınırsa;

$$\langle \alpha'(s), \alpha(s)\rangle + \langle \alpha(s), \alpha'(s)\rangle = 0$$

$$2\langle \alpha(s), \alpha'(s)\rangle = 0$$

$$\langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle = 0$$

bulunur. Dolayısıyla;

$$\langle V_1(s), \alpha(s) \rangle = m_1 = 0$$

dır. Bu son eşitliğin tekrar s' ye göre türevi alınırsa,

$$\langle V_1'(s), \alpha(s) \rangle + \langle V_1(s), \alpha'(s) \rangle = 0$$

$$\langle k_1 V_2(s), \alpha(s) \rangle + \langle V_1(s), V_1(s) \rangle = 0$$

$$k_1 \langle V_2(s), \alpha(s) \rangle + 1 = 0$$

$$\langle V_2(s), \alpha(s) \rangle = -\frac{1}{k_1} = m_2$$

elde edilir. Bu eşitliğin tekrar türevi alınırsa;

$$\langle V_2'(s), \alpha(s) \rangle + \langle V_2(s), \alpha'(s) \rangle = m_2'$$

$$\langle -k_1 V_1 + k_2 V_3, \alpha(s) \rangle + \langle V_2(s), V_1(s) \rangle = m_2'$$

$$-k_1 \langle V_1(s), \alpha(s) \rangle + k_2 \langle V_3(s), \alpha(s) \rangle = m_2'$$

$$k_2 \langle V_3(s), \alpha(s) \rangle = m_2'$$

$$\langle V_3(s), \alpha(s) \rangle = \frac{m_2'}{k_2} = m_3$$

bulunur. $2 \le i \le 3$ olması halinde eşitlik sağlanır.

5. BÖLÜM

REKTİFİYAN GELİŞTİRİLEBİLİRLİK VE KÜRESEL DARBOUX GÖRÜNTÜ

5. 1. Rektifiyan Geliştirilebilirlik

Bu bölümde $\mathbb{R}^3$ öklid uzayında diferensiyel geometrinin uzay eğrileri üzerindeki bazı temel kavramları incelenerek, rektifiyan geliştirilebilirlik tanımlanacaktır.

$\langle x, y \rangle$ standart iç çarpım uzayında bir γ eğrisi,

$$\gamma : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^3 \ , \quad \gamma'(t) = \frac{d\gamma}{dt} \quad \text{ve} \quad \gamma'(t) \neq 0$$

ile verilsin.

s bir parametre olmak üzere eğer $\|\gamma'(s)\| = 1$ ise γ eğrisi yay parametresidir.

Burada $t(s) = \gamma'(s)$ vektörü ile γ nın tanjant vekörünü, γ nın eğriligi $\kappa(s) = \|\gamma''(s)\| \neq 0$ olmak üzere, γ nın normal vektörünü $\gamma''(s) = \kappa(s)\mathrm{n}(s)$ ile ve γ nın binormal vektörünü de $b(s) = t(s) \times n(s)$ ile göstereceğiz.

Serret - Frenet Formülleri

$$t'(s) = \kappa(s) n(s)$$
$$n'(s) = -\kappa(s) t(s) + \tau(s) b(s)$$
$$b'(s) = -\tau(s) n(s)$$

dır. Burada $\tau(s)$, γ eğrisinin torsiyonudur.

Tanım 5.1.1 (Darboux Vektörü). $\tau(s) \neq 0$ olmak üzere birim hızlı

$$\gamma : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^3$$

eğrisinin Darboux vektörü

$$D(s) = \tau(s)t(s) + \kappa(s)b(s)$$

şeklinde tanımlanır.

Darboux vektörünü kullanarak Serret -Frenet formülleri yeniden yazılırsa;

$$\begin{aligned}\left[\tau(s)t(s) + \kappa(s)b(s)\right] \times t(s) &= \tau(s)t(s) \times t(s) + \kappa(s)b(s) \times t(s) \\ &= \kappa(s)n(s) \\ &= t'(s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\tau(s)t(s) + \kappa(s)b(s)\right] \times n(s) &= \tau(s)t(s) \times n(s) + \kappa(s)b(s) \times n(s) \\ &= -\kappa(s)t(s) + \tau(s)b(s) \\ &= n'(s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\tau(s)t(s) + \kappa(s)b(s)\right] \times b(s) &= \tau(s)t(s) \times b(s) + \kappa(s)b(s) \times b(s) \\ &= -\tau(s)n(s) \\ &= b'(s)\end{aligned}$$

dır. Sonuç olarak;

$$\begin{aligned}t'(s) &= \mathrm{D}(s) \times t(s) \\ n'(s) &= \mathrm{D}(s) \times n(s) \\ b'(s) &= \mathrm{D}(s) \times b(s)\end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 5.1.2 (Modife Edilmiş Darboux Vektörü). $\gamma : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^3$

birim hızlı eğrisi verilsin.

$$\tilde{D}(s) = (\tau/\kappa)(s)t(s) + b(s)$$

vektörüne γ eğrisinin modife edilmiş Darboux vektörü denir.

Tanım 5.1.3.

$$d : \mathrm{I} \to S^2$$

$$s \to d(s) = \frac{D(s)}{\|D(s)\|}$$

küresel eğrisine, d nin **küresel Darboux görüntüsü** denir.

$RG(\gamma) = \{ut(s) + b(s) \mid u \in \mathbb{R},\ s \in \mathrm{I}\}$ yüzeyine **rektifiyan Gauss yüzeyi**,

$RD(\gamma) = \{\gamma(s) + u\tilde{D}(s) \mid u \in \mathbb{R}\}$ yüzeyine de γ nın **rektifiyan geliştirilebilirliği** adı verilir.

Teorem 5.1.1. C^∞ topoloji ile $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^3, \tau \neq 0$ ve $\kappa \neq 0$ olan regüler eğrilerin uzayı $\mathrm{O} \subset \mathrm{I}\mu\mu_\tau(S^1, \mathbb{R}^3)$ olsun. Herhangi bir $\gamma \in \mathrm{O}$ için öyle bir $\mathrm{O} \subset \mathrm{I}\mu\mu_\tau(S^1, \mathbb{R}^3)$ cümlesi mevcuttur öyleki aşağıdaki özellikler sağlanır [8].

1) $(\tau/\kappa)'(s) = 0$ eşitliğini sağlayan $s \in S^1$ noktaların sayısı sonludur.

2) $(\tau/\kappa)'(s) = (\tau/\kappa)'' = 0$ eşitliğini sağlayan $s \in S^1$ noktası mevcut değildir.

3) $(\tau/\kappa)''(s) = 0$ eşitliğini sağlayan $s \in S^1$ noktaların sayısı sonludur.

4) $(\tau/\kappa)''(s) = (\tau/\kappa)'''(s) = 0$ eşitliğini sağlayan $s \in S^1$ noktası mevcut değildir.

Teorem 5.1.2. $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun.

$\mathrm{C} = \{(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \mid x_1^{\,2} = x_2^{\,3}\}$ ve $SW = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 3u^4 + u^2 v, x_2 = 4u^3 + 2uv, x_3 = v\}$

olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır [9].

1) Küresel Darboux görüntü $d(s_0)$ da C ye local diffeomorfiktir $\Leftrightarrow (\tau/\kappa)'(s_0) = 0$ ve $(\tau/\kappa)''(s_0) \neq 0$ olmasıdır.

2) (a) Rektifiyan Gauss yüzeyi $u_0 t(s_0) + b(s_0)$ da $C \times \mathbb{R}$ ye local diffeomorfiktir $\Leftrightarrow$

$u_0 = (\tau/\kappa)(s_0)$ ve $(\tau/\kappa)'(s_0) \neq 0$ olmasıdır.

(b) Rektifiyan Gauss yüzeyi $u_0 t(s_0) + b(s_0)$ da SW ye local diffeomorfiktir

$\Leftrightarrow u_0 = (\tau/\kappa)(s_0), (\tau/\kappa)'(s_0) = 0$ ve $(\tau/\kappa)''(s_0) \neq 0$ dır.

3) (a) Rektifiyan geliştirilebilirlik $\gamma(s_0) + u_0 \tilde{D}(s_0)$ da $C \times \mathbb{R}$ ye local diffeomorfiktir

$\Leftrightarrow (\tau/\kappa)'(s_0) \neq 0,\ (\tau/\kappa)''(s_0) \neq 0$ ve $u_0 = \dfrac{1}{(\tau/\kappa)'(s_0)}$ dır.

(b) Rektifiyan geliştirilebilirlik $\gamma(s_0) + u_0 \tilde{D}(s_0)$ da SW ye local diffeomorfiktir

$\Leftrightarrow (\tau/\kappa)'(s_0) \neq 0,\ (\tau/\kappa)''(s_0) = 0,\ (\tau/\kappa)'''(s_0) \neq 0$ ve $u_0 = \dfrac{1}{(\tau/\kappa)'(s_0)}$ dır.

5.2. Uzay Eğrileri Üzerinde Düzgün Fonksiyonların Aileleri

Bu bölümde $d, RG(\gamma)$ ve $RD(\gamma)$ ile ilgili çalışmalarda kullanışlı olan, uzay eğrileri üzerinde 2 farklı fonksiyon ailesi tanımlayacağız**.**

$$\gamma : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^3$$

birim hızlı uzay eğrisi ve $\kappa(s) \neq 0, \tau(s) \neq 0$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 5.2.1. (Volumlike Uzaklık Fonksiyonları). I üzeride düzgün fonksiyonların 3 parametreli ailesi,

$$F : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$(s,u) \to F(s,u) = \left| t(s)\ n(s)\ \gamma(s) - u \right|$$

$$= (\gamma(s) - u)(t(s) \times n(s))$$
$$= (\gamma(s) - u) b(s)$$
$$= \langle \gamma(s) - u,\ b(s) \rangle$$

ile tanımlanan F 'e γ üzerinde bir volumelike uzaklık fonksiyonu denir ve

$$f_u(s) = F(s,u)$$

ile gösterilir.

Burada $|\ a\ b\ c\ |$, (a,b,c) matrisinin determinantını ve $\langle a,\ b\rangle$, a ve b nin standart iç çarpımını gösterir.

Önerme 5.2.1. $\gamma : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^3$

birim hızlı eğri ve $\kappa(s) \neq 0, \tau(s) \neq 0$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

1) $f_u'(s) = 0 \Leftrightarrow \gamma(s) - u \in \langle t(s), b(s)\rangle$ dır.

2) $f_u'(s) = f_u''(s) = 0 \Leftrightarrow \gamma(s) - u = \mu\big((\tau/\kappa)(s)t(s) + b(s)\big)$ dır.

3) $f_u'(s) = f_u''(s) = f_u'''(s) = 0 \Leftrightarrow \gamma(s) - u = \dfrac{1}{(\tau/\kappa)'(s)}\big((\tau/\kappa)(s)t(s) + b(s)\big)$,

$(\tau/\kappa)'(s) \neq 0$ dır.

4) $f_u'(s) = f_u''(s) = f_u'''(s) = f_u^{(4)}(s) = 0 \Leftrightarrow$

$\gamma(s) - u = \dfrac{1}{(\tau/\kappa)'(s)}\big((\tau/\kappa)(s)t(s) + b(s)\big)$, $(\tau/\kappa)'(s) \neq 0$ ve $(\tau/\kappa)''(s) = 0$ dır.

5) $f_u'(s) = f_u''(s) = f_u'''(s) = f_u^{(4)}(s) = f_u^{(5)}(s) = 0 \Leftrightarrow$

$\gamma(s) - u = \dfrac{1}{(\tau/\kappa)'(s)}\big((\tau/\kappa)(s)t(s) + b(s)\big)$, $(\tau/\kappa)'(s) \neq 0$, $(\tau/\kappa)''(s) = 0$ ve

$(\tau/\kappa)'''(s) = 0$ dır.

İspat:

$$f_u(s) = |\ t(s)\ n(s)\ \gamma(s) - u\ | = \langle \gamma(s) - u,\ b(s)\rangle$$

eşitliğini göz önüne alalım. Buna göre;

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a})\quad f_u'(s) &= \langle \gamma'(s), b(s)\rangle + \langle \gamma(s)-u, b'(s)\rangle \\
&= \langle t(s), b(s)\rangle + \langle \gamma(s)-u, -\tau(s)n(s)\rangle \\
&= -\tau(s)\langle \gamma(s)-u, n(s)\rangle \\
&= -\tau(s)\big(\gamma(s)-u\big)\big(b(s)\times t(s)\big) \\
&= \tau(s)\left|\begin{array}{ccc} \mathrm{t}(s) & b(s) & \gamma(s)-u \end{array}\right|.
\end{aligned}
$$

bulunur.

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{b})\quad f_u''(s) &= -\tau'(s)\langle \gamma(s)-u, n(s)\rangle - \tau(s)\big[\langle \gamma(s)-u, n(s)\rangle\big]' \\
&= -\tau'(s)\langle \gamma(s)-u, n(s)\rangle - \tau(s)\big[\langle \gamma'(s), n(s)\rangle + \langle \gamma(s)-u, n'(s)\rangle\big] \\
&= -\tau'(s)\langle \gamma(s)-u, n(s)\rangle - \tau(s)\langle \gamma(s)-u, -\kappa(s)t(s)+\tau(s)b(s)\rangle \\
&= -\tau'(s)\langle \gamma(s)-u, n(s)\rangle + \tau(s)\kappa(s)\langle \gamma(s)-u, t(s)\rangle - \tau^2(s)\langle \gamma(s)-u, b(s)\rangle \\
&= -\tau'(s)\big[\big(\gamma(s)-u\big)\big(b(s)\times t(s)\big)\big] + \tau(s)\kappa(s)\big[\big(\gamma(s)-u\big)\big(n(s)\times b(s)\big)\big] \\
&\quad -\tau^2(s)\big[\big(\gamma(s)-u\big)\big(t(s)\times n(s)\big)\big] \\
&= -\tau^2(s)\left|\begin{array}{ccc} \mathrm{t}(s) & \mathrm{n}(s) & \gamma(s)-u \end{array}\right| + \tau(s)\kappa(s)\left|\begin{array}{ccc} \mathrm{n}(s) & b(s) & \gamma(s)-u \end{array}\right| \\
&\quad + \tau'(s)\left|\begin{array}{ccc} \mathrm{t}(s) & b(s) & \gamma(s)-u \end{array}\right|.
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{c})\quad f_u'''(s) &= -\tau''(s)\langle \gamma(s)-u, n(s)\rangle - \tau'(s)\big[\langle \gamma'(s), n(s)\rangle + \langle \gamma(s)-u, n'(s)\rangle\big] \\
&\quad + \kappa'(s)\tau(s)\langle \gamma(s)-u, t(s)\rangle + \kappa(s)\tau'(s)\langle \gamma(s)-u, t(s)\rangle \\
&\quad + \kappa(s)\tau(s)\big[\langle \gamma'(s), t(s)\rangle + \langle \gamma(s)-u, t'(s)\rangle\big] \\
&\quad - 2\tau(s)\tau'(s)\langle \gamma(s)-u, b(s)\rangle - \tau^2(s)\langle \gamma'(s), b(s)\rangle \\
&\quad - \tau^2(s)\langle \gamma(s)-u, b'(s)\rangle \\
&= -\tau''(s)\langle \gamma(s)-u, n(s)\rangle - \tau'(s)\langle t(s), n(s)\rangle \\
&\quad - \tau'(s)\langle \gamma(s)-u, -\kappa(s)t(s)+\tau(s)b(s)\rangle \\
&\quad + \kappa'(s)\tau(s)\langle \gamma(s)-u, t(s)\rangle \\
&\quad + \kappa(s)\tau'(s)\langle \gamma(s)-u, t(s)\rangle + \kappa(s)\tau(s)\langle t(s), t(s)\rangle \\
&\quad + \kappa(s)\tau(s)\langle \gamma(s)-u, \kappa(s)n(s)\rangle - 2\tau(s)\tau'(s)\langle \gamma(s)-u, b(s)\rangle \\
&\quad - \tau^2(s)\langle t(s), b(s)\rangle \\
&\quad - \tau^2(s)\langle \gamma(s)-u, -\tau(s)n(s)\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\tau''(s)\langle \gamma(s)-u, n(s)\rangle + \tau'(s)\kappa(s)\langle \gamma(s)-u, t(s)\rangle \\
&\quad -\tau'(s)\tau(s)\langle \gamma(s)-u, b(s)\rangle \\
&\quad +\kappa'(s)\tau(s)\langle \gamma(s)-u, t(s)\rangle + \kappa(s)\tau'(s)\langle \gamma(s)-u, t(s)\rangle \\
&\quad +\kappa(s)\tau(s) \\
&\quad +\kappa^2(s)\tau(s)\langle \gamma(s)-u, n(s)\rangle - 2\tau(s)\tau'(s)\langle \gamma(s)-u, b(s)\rangle \\
&\quad +\tau^3(s)\langle \gamma(s)-u, n(s)\rangle \\
&= -3\tau'(s)\tau(s)\left|\, \mathrm{t}(s)\ \mathrm{n}(s)\ \gamma(s)-u\,\right| \\
&\quad +\left(\tau''(\mathrm{s}) - \kappa^2(\mathrm{s})\tau(\mathrm{s}) - \tau^3(\mathrm{s})\right)\left|\, \mathrm{t(s)}\ \mathrm{b(s)}\ \gamma(\mathrm{s})\text{-u}\,\right| \\
&\quad +\left(2\,\kappa(s)\tau'(s)+\kappa'(s)\tau(s)\right)\left|\, \mathrm{n}(s)\ b(s)\ \gamma(s)-u\,\right| + \kappa(s)\tau(s)
\end{aligned}
$$

bulunur.

$$
\begin{aligned}
\textbf{(}\boldsymbol{d}\textbf{)}\quad f_u^{(4)}(s) &= \left(3\tau^2(s)\tau'(s) - \tau'''(s) + 2\kappa(s)\kappa'(s)\tau(s) + \kappa^2(s)\tau'(s)\right)\langle \gamma(s)-u, n(s)\rangle \\
&\quad +\left(\tau^3(s) - \tau''(s) + \kappa^2(s)\tau(s)\right)\left(\langle \gamma'(s), n(s)\rangle + \langle \gamma(s)-u, n'(s)\rangle\right) \\
&\quad +\left(2\tau''(s)\kappa(s) + 2\tau'(s)\kappa'(s) + \kappa''(s)\tau(s) + \kappa'(s)\tau'(s)\right)\langle \gamma(s)-u, t(s)\rangle \\
&\quad +\left(2\tau'(s)\kappa(s) + \kappa'(s)\tau(s)\right)\left(\langle \gamma'(s), t(s)\rangle + \langle \gamma(s)-u, t'(s)\rangle\right) \\
&\quad +\left(-3\tau'(s)\tau'(s) - 3\tau(s)\tau''(s)\right)\langle \gamma(s)-u, b(s)\rangle \\
&\quad +\left(-3\tau(s)\tau'(s)\right)\left(\langle \gamma'(s), b(s)\rangle + \langle \gamma(s)-u, b'(s)\rangle\right) \\
&\quad +\kappa'(s)\tau(s) + \kappa(s)\tau'(s) \\
&= \left(3\tau^2(s)\tau'(s) - \tau'''(s) + 2\kappa(s)\kappa'(s)\tau(s) + \kappa^2(s)\tau'(s)\right)\langle \gamma(s)-u, n(s)\rangle \\
&\quad +\left(\tau^3(s) - \tau''(s) + \kappa^2(s)\tau(s)\right)\langle \gamma(s)-u, -\kappa(s)t(s) + \tau(s)b(s)\rangle \\
&\quad +\left(2\tau''(s)\kappa(s) + 2\tau'(s)\kappa'(s) + \kappa''(s)\tau(s) + \kappa'(s)\tau'(s)\right)\langle \gamma(s)-u, t(s)\rangle \\
&\quad +\left(2\tau'(s)\kappa(s) + \kappa'(s)\tau(s)\right)\left(1 + \langle \gamma(s)-u, \kappa(s)n(s)\rangle\right) \\
&\quad +\left(-3\tau'(s)\tau'(s) - 3\tau(s)\tau''(s)\right)\langle \gamma(s)-u, b(s)\rangle \\
&\quad +\left(-3\tau(s)\tau'(s)\right)\langle \gamma(s)-u, -\tau(s)n(s)\rangle + \kappa'(s)\tau(s) + \kappa(s)\tau' \\
&= \left(-4\tau(s)\tau''(s) - 3\left(\tau'(s)\right)^2 + \kappa^2(s)\tau^2(s) + \tau^4(s)\right)\left|\, t(s)\ n(s)\ \gamma(s)-u\,\right| \\
&\quad +\left(3\kappa(s)\tau''(s) + 3\kappa'(s)\tau'(s) + \kappa''(s)\tau(s) - \kappa(s)\tau^3(s) - \kappa^3(s)\tau(s)\right) \\
&\quad \left|\, n(s)\ b(s)\ \gamma(s)-u\,\right|\left(\tau'''(s) - 3\kappa(s)\kappa'(s)\tau(s) - 6\tau^2(s)\tau'(s)\right) \\
&\quad +\left(-3\kappa^2(s)\tau'(s)\right)\left|\, t(s)\ b(s)\ \gamma(s)-u\,\right| \\
&\quad +\left(2\kappa'(s)\tau(s) + 3\kappa(s)\tau'(s)\right).
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Benzer hesaplamalar $f_u^{(5)}(s)$ için de yapılacak olursa;

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{e})\quad f_u^{(5)}(s) = &\left(-5\tau(s)\tau'''(s) - 10\tau'(s)\tau''(s) + 5\kappa^2(s)\tau(s)\tau'(s)\right.\\
&+10\tau^3(s)\tau'(s) + 5\kappa(s)\kappa'(s)\tau^2(s)\big)\\
&+\big(4\kappa(s)\tau'''(s) + 6\kappa'(s)\tau''(s) + 4\kappa''(s)\tau'(s)\\
&-9\kappa(s)\tau^2(s)\tau'(s) - 4\kappa^3(s)\tau'(s)\kappa^2(s)\tau(s) + \kappa'''(s)\tau(s)\\
&-\kappa'(s)\tau^3(s) - 6\kappa^2(s)\kappa'(s)\tau(s)\big)\,|\,n(s)\ b(s)\ \gamma(s) - u|\\
&+\big(\tau^4(s) - 6\kappa^2(s)\tau''(s) - 10\tau^2(s)\tau''(s) - 12\kappa(s)\kappa'(s)\tau'(s)\big)\\
&-15\tau(s)\left(\tau'(s)\right)^2 + 2\kappa^2(s)\tau^3(s) + \tau^5(s) - 4\kappa(s)\kappa''(s)\tau(s)\\
&+\ \kappa^4(s)\tau(s) - 3\left(\kappa'(s)\right)^2\tau(s)\big)\,|\,t(s)\ b(s)\ \gamma(s) - u|\\
&+\big(6\kappa'(s)\tau''(s) + 8\kappa'(s)\tau'(s) + 3\kappa''(s)\tau(s) - \kappa(s)\tau^3(s) - \kappa^3(s)\tau(s)\big).
\end{aligned}
$$

bulunur. Aynı zamanda aşağıdaki hesaplamaları yapabiliriz;

$$
\begin{aligned}
\left(\tau/\kappa\right)'(s) &= \frac{\tau'(s)\kappa(s) - \tau(s)\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}\\
&= \left(1/\kappa^2(s)\right)\left(\tau'(s)\kappa(s) - \tau(s)\kappa'(s)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\tau/\kappa\right)''(s) &= \left(-2\kappa'(s)/\kappa^3(s)\right)\left(\tau'(s)\kappa(s) - \tau(s)\kappa'(s)\right)\\
&\quad + \left(1/\kappa^2(s)\right)\left(\tau''(s)\kappa(s) - \tau(s)\kappa''(s)\right)\\
&= \left(1/\kappa^3(s)\right)\left(\tau''(s)\kappa^2(s) - \tau(s)\kappa''(s)\kappa(s)\right.\\
&\quad \left.-2\kappa'(s)\tau'(s)\kappa(s) + 2\tau(s)\left(\kappa'(s)\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\tau/\kappa\right)'''(s) = &\left(-3\kappa'(s)/\kappa^4(s)\right)\left(\tau''(s)\kappa^2(s) - \tau(s)\kappa''(s)\kappa(s)\right.\\
&\left.-2\kappa'(s)\tau'(s)\kappa(s) + 2\tau(s)\left(\kappa'(s)\right)^2\right)\\
&+\left(1/\kappa^3(s)\right)\left(\tau'''(s)\kappa^2(s) + 2\kappa(s)\kappa'(s)\tau''(s) - \tau'(s)\kappa''(s)\kappa(s)\right.\\
&-\tau(s)\kappa'''(s)\kappa(s) - \tau(s)\kappa''(s)\kappa'(s) - 2\kappa''(s)\tau'(s)\kappa(s)\\
&\left.-2\kappa'(s)\tau''(s)\kappa(s) - 2\kappa'(s)\tau'(s)\kappa'(s)\right)
\end{aligned}
$$

$$= \left(1/\kappa^4(s)\right)\left(\tau'''(s)\kappa^3(s) + 3\kappa^2(s)\kappa'(s)\tau''(s) - 3\kappa^2(s)\kappa''(s)\tau'(s) - \tau(s)\kappa'''(s)\kappa^2(s) + 6\kappa''(s)\kappa'(s)\kappa(s)\tau(s) + 6\left(\kappa'(s)\right)^2\tau'(s)\kappa(s) - 6\left(\kappa'(s)\right)^3\tau(s)\right)$$

elde edilir.

Böylece $\tau \neq 0$ olduğundan (1) iddiası ve (a) formülü birlikte düşünülürse;

$$\begin{aligned} f_u'(s) &= \tau(s)\left| t(s)\ b(s)\ \gamma(s) - u \right| \\ &= \tau(s)t(s)\left(b(s)\times\gamma(s) - u\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur ve $\tau \neq 0$ olduğundan,

$$\gamma(s_0) - u = vt(s_0) + \mu b(s_0) \qquad \textbf{(5.2.1)}$$

elde edilir.

Benzer şekilde (5.2.1) eşitliğini ve (b) formülünü birlikte düşünelim ve

$$\left| \mathrm{t}(s)\ \mathrm{n}(s)\ \gamma(s) - u \right| \qquad (\textbf{\textit{i}})$$

$$\left| \mathrm{n}(s)\ \mathrm{b}(s)\ \gamma(s) - u \right| \qquad (\textbf{\textit{ii}})$$

$$\left| \mathrm{t}(s)\ \mathrm{b}(s)\ \gamma(s) - u \right| \qquad (\textbf{\textit{iii}})$$

ile gösterelim.

$(i), (ii)$ ve (iii) ifadelerinde (5.2.1) eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned} (\textbf{\textit{i}})\ \left| \mathrm{t}(s)\ \mathrm{n}(s)\ \gamma(s) - u \right| &= \mathrm{t}(s)\left(\mathrm{n}(s)\times\gamma(s) - u\right) \\ &= \mathrm{t}(s)\left(\mathrm{n}(s)\times\left(vt(s) + \mu b(s)\right)\right) \\ &= \mathrm{t}(s)\left(v\mathrm{n}(s)\times t(s) + \mu n(s)\times b(s)\right) \\ &= \mathrm{t}(s)\left(-vb(s) + \mu t(s)\right) \\ &= \mu \end{aligned}$$

$$(\textbf{\textit{ii}})\ \left| \mathrm{n}(s)\ \mathrm{b}(s)\ \gamma(s) - u \right| = n(s)\left(b(s)\times\gamma(s) - u\right)$$

$$= n(s)\left(b(s)\times\left(vt(s)+\mu b(s)\right)\right)$$
$$= n(s)\left(vb(s)\times t(s)+\mu b(s)\times b(s)\right)$$
$$= n(s)\left(vn(s)\right)$$
$$= v$$

$$(\textbf{\textit{iii}})\ \left|\,\mathrm{t}(s)\ \mathrm{b}(s)\ \gamma(s)-u\,\right| = \mathrm{t}(s)\left(\mathrm{b}(s)\times\gamma(s)-u\right)$$
$$= \mathrm{t}(s)\left(b(s)\times\left(vt(s)+\mu b(s)\right)\right)$$
$$= \mathrm{t}(s)\left(vb(s)\times t(s)+\mu b(s)\times b(s)\right)$$
$$= \mathrm{t}(s)\left(vn(s)\right)$$
$$= 0$$

elde edilir. Bulunan $(i),\ (ii),(iii)$ eşitlikleri (b) formülünde yerine yazılırsa ve

$$f_u''(s) = -\tau^2(s)\mu + \kappa(s)\tau(s)v = 0$$

olarak alınırsa;

$$v = (\tau/\kappa)(s)\mu$$

elde edilir.

Benzer şekilde (2) iddiasını ve (c) formülünü birlikte düşünülürse ve $(i),\ (ii),(iii)$ ifadelerinde,

$$\gamma(s)-u = \mu\left((\tau/\kappa)(s)t(s)+b(s)\right)$$

eşitliği kullanılırsa,

$$(\textbf{\textit{i}})\ \left|\,\mathrm{t}(s)\ \mathrm{n}(s)\ \gamma(s)-u\,\right| = \mathrm{t}(s)\left(\mathrm{n}(s)\times\gamma(s)-u\right)$$
$$= \mathrm{t}(s)\left(\mathrm{n}(s)\times\left(\mu(\tau/\kappa)(s)t(s)+\mu b(s)\right)\right)$$
$$= \mathrm{t}(s)\left(\mu(\tau/\kappa)(s)\mathrm{n}(s)\times t(s)+\mu n(s)\times b(s)\right)$$
$$= \mathrm{t}(s)\left(-\mu(\tau/\kappa)(s)b(s)+\mu t(s)\right)$$
$$= \mu$$

$$(\textbf{\textit{ii}})\ \left|\,\mathrm{n}(s)\ \mathrm{b}(s)\ \gamma(s)-u\,\right| = n(s)\left(b(s)\times\gamma(s)-u\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= n(s)\left(b(s)\times\left(\mu(\tau/\kappa)(s)t(s)+\mu b(s)\right)\right)\\
&= n(s)\left(\mu(\tau/\kappa)(s)b(s)\times t(s)+\mu b(s)\times b(s)\right)\\
&= n(s)\left(\mu(\tau/\kappa)(s)n(s)\right)\\
&= \mu(\tau/\kappa)(s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\textbf{\textit{iii}})\ \left|\mathrm{t}(s)\ \mathrm{b}(s)\ \gamma(s)-u\right| &= \mathrm{t}(s)\left(\mathrm{b}(s)\times\gamma(s)-u\right)\\
&= \mathrm{t}(s)\left(b(s)\times\left(\mu(\tau/\kappa)(s)t(s)+\mu b(s)\right)\right)\\
&= \mathrm{t}(s)\left(\mu(\tau/\kappa)(s)n(s)\right)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Bulunan $(i),\ (ii),(iii)$ eşitlikleri (c) formülünde yerine yazılırsa;

$$f_u'''(s) = -3\tau(s)\tau'(s)\mu + \left(2\kappa(s)\tau'(s)+\kappa'(s)\tau(s)\right)\mu(\tau/\kappa)(s)$$

bulunur.

$$f_u'''(s) = -3\tau(s)\tau'(s)\mu + \left(2\kappa(s)\tau'(s)+\kappa'(s)\tau(s)\right)\mu(\tau/\kappa)(s) = 0$$

olarak alınırsa;

$$\kappa(s) = \frac{\kappa(s)\tau'(s)-\kappa'(s)\tau(s)}{\kappa(s)}\mu$$

elde edilir. Buradan da, $(\tau/\kappa)'(s)\mu = 1$ bulunur.

Aynı işlemler (3) iddiası ve (d) formülü birlikte düşünülerek uygulanırsa;

$$(\tau/\kappa)'(s)\neq 0 \ \text{ ve } \ \gamma(s)-u = \frac{1}{(\tau/\kappa)'(s)}\left(\left(\tau(s)/\kappa(s)\right)\mathrm{t}(s)+\mathrm{b}(s)\right)$$

bulunur. İşlemlere bu şekilde devam edilerek $(4).$ ve $(5).$ iddialar da ispatlanır [10].

Tanım 5.2.2 (Volumelike Yükseklik Fonksiyonları).
I üzeride düzgün fonksiyonların 2 parametreli ailesini tanımlayalım.

$$G: I \times S^2 \to \mathbb{R}$$
$$(s,v) \to G(s,v) = \left| n(s)\ b(s)\ v \right| = \langle t(s), v \rangle$$

ile tanımlanan G ye γ üzerinde bir volumelike yükseklik fonksiyonu denir ve

$$g_u(s) = G(s,v)$$

ile gösterilir.

Önerme 5.2.2. $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri ve $\kappa(s) \neq 0,\ \tau(s) \neq 0$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

1) $g_u'(s) = 0 \Leftrightarrow v = \lambda t(s) + \mu b(s),\ \lambda^2 + \mu^2 = 1$ olacak şekilde $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ sayıları mevcuttur.

2) $g_u'(s) = g_u''(s) = 0 \Leftrightarrow v = \pm \dfrac{\kappa(s)}{\sqrt{\tau^2(s) + \kappa^2(s)}} \left((\tau/\kappa)(s) t(s) + b(s) \right)$

dır.

3) $g_u'(s) = g_u''(s) = g_u'''(s) = 0 \Leftrightarrow v = \pm \dfrac{\kappa(s)}{\sqrt{\tau^2(s) + \kappa^2(s)}} \left((\tau/\kappa)(s) t(s) + b(s) \right)$,

$$(\tau/\kappa)'(s) = 0$$

dır.

4) $g_u'(s) = g_u''(s) = g_u'''(s) = g_u^4(s) = 0$

$$\Leftrightarrow v = \pm \frac{\kappa(s)}{\sqrt{\tau^2(s) + \kappa^2(s)}} \left((\tau/\kappa)(s) t(s) + b(s) \right),$$

$$(\tau/\kappa)'(s) = (\tau/\kappa)''(s) = 0$$

dır.

5) $g_u'(s) = g_u''(s) = g_u'''(s) = g_u^4(s) = g_u^5(s) = 0$

$$\Leftrightarrow v = \pm \frac{\kappa(s)}{\sqrt{\tau^2(s)+\kappa^2(s)}}\left((\tau/\kappa)(s)t(s)+b(s)\right),$$

$$(\tau/\kappa)'(s) = (\tau/\kappa)''(s) = (\tau/\kappa)'''(s) = 0$$

dır.

İspat:

$$g_u(s) = \left| n(s)\ b(s)\ v \right| = \langle t(s), v \rangle$$

eşitliğini göz önüne alalım. Buna göre;

(*a*) $g_u'(s) = \langle t'(s), v \rangle + \langle t(s), v' \rangle$

$$= \langle \kappa(s) n(s), v \rangle$$
$$= \kappa(s) \langle n(s), v \rangle$$
$$= -\kappa(s) \left| \mathrm{t}(s)\ b(s)\ v \right|$$

dır.

(*b*) $g_u''(s) = \kappa'(s)\langle n(s), v \rangle + \kappa(s)\langle n'(s), v \rangle + \kappa(s)\langle n(s), v' \rangle$

$$= \kappa'(s)\langle n(s), v \rangle + \kappa(s)\langle -\kappa(s)t(s) + \tau(s)b(s), v \rangle$$
$$= \kappa'(s)\langle n(s), v \rangle - \kappa^2(s)\langle t(s), v \rangle + \kappa(s)\tau(s)\langle b(s), v \rangle$$
$$= -\kappa'(s) \left| \mathrm{t}(s)\ b(s)\ v \right| - \kappa^2 \left| \mathrm{n}(s)\ b(s)\ v \right| + \kappa(s)\tau(s) \left| \mathrm{t}(s)\ \mathrm{n}(s)\ v \right|$$

dır.

(*c*) $g_u'''(s) = \kappa''(s)\langle n(s), v \rangle + \kappa'(s)\langle n'(s), v \rangle + \kappa'(s)\langle n(s), v' \rangle$

$$-2\kappa(s)\kappa'(s)\langle t(s), v \rangle - \kappa^2(s)\left(\langle t'(s), v \rangle + \langle t(s), v' \rangle\right)$$
$$+ \kappa'(s)\tau(s)\langle b(s), v \rangle + \kappa(s)\tau'(s)\langle b(s), v \rangle$$
$$+ \kappa(s)\tau(s)\left(\langle b'(s), v \rangle + \langle b(s), v' \rangle\right)$$
$$= \kappa''(s)\langle n(s), v \rangle + \kappa'(s)\langle -\kappa(s)t(s) + \tau(s)b(s), v \rangle$$
$$- 2\kappa(s)\kappa'(s)\langle t(s), v \rangle - \kappa^2(s)\left(\langle \kappa(s)n(s), v \rangle\right)$$
$$+ \kappa'(s)\tau(s)\langle b(s), v \rangle + \kappa(s)\tau'(s)\langle b(s), v \rangle$$
$$+ \kappa(s)\tau(s)\left(\langle -\tau(s)n(s), v \rangle\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \kappa''(s)\langle n(s),v\rangle - \kappa'(s)\kappa(s)\langle t(s),v\rangle + \kappa'(s)\tau(s)\langle b(s),v\rangle \\
&\quad - 2\kappa(s)\kappa'(s)\langle t(s),v\rangle - \kappa^3(s)\big(\langle n(s),v\rangle\big) + \kappa'(s)\tau(s)\langle b(s),v\rangle \\
&\quad + \kappa(s)\tau'(s)\langle b(s),v\rangle - \kappa(s)\tau^2(s)\big(\langle n(s),v\rangle\big) \\
&= \big(-\kappa''(s) + \kappa^3(s) + \kappa(s)\tau^2(s)\big)\,|\, t(s)\ b(s)\ v\,| \\
&\quad + \big(-3\kappa'(s)\kappa(s)\big)\,|\, \mathrm{n}(s)\ b(s)\ v\,| \\
&\quad + \big(2\kappa'(s)\tau(s) + \kappa(s)\tau'(s)\big)\,|\, t(s)\ \mathrm{n}(s)\ v\,|
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

(*d*) $g_u^{(4)}(s)$

$$
\begin{aligned}
&= \big(\kappa'''(s) - 3\kappa^2(s)\kappa'(s) - \kappa'(s)\tau^2(s) - 2\tau(s)\tau'(s)\kappa(s)\big)\langle n(s),v\rangle \\
&\quad + \big(\kappa''(s) - \kappa^3(s) - \kappa(s)\tau^2(s)\big)\langle n'(s),v\rangle \\
&\quad + \big(-3\kappa''(s)\kappa(s) - 3\kappa'(s)\kappa'(s)\big)\langle t(s),v\rangle - 3\kappa'(s)\kappa(s)\langle t'(s),v\rangle \\
&\quad + \big(2\kappa''(s)\tau(s) + 3\kappa'(s)\tau'(s) + \kappa(s)\tau''(s)\big)\langle b(s),v\rangle \\
&\quad + \big(2\kappa'(s)\tau(s) + \kappa(s)\tau'(s)\big)\langle b'(s),v\rangle \\
&= \big(\kappa'''(s) - 3\kappa^2(s)\kappa'(s) - \kappa'(s)\tau^2(s) - 2\tau(s)\tau'(s)\kappa(s)\big)\langle n(s),v\rangle \\
&\quad + \big(\kappa''(s) - \kappa^3(s) - \kappa(s)\tau^2(s)\big)\langle -\kappa(s)t(s) + \tau(s)b(s),v\rangle \\
&\quad + \Big(-3\kappa''(s)\kappa(s) - 3\big(\kappa'(s)\big)^2\Big)\langle t(s),v\rangle - 3\kappa'(s)\kappa(s)\langle \kappa(s)n(s),v\rangle \\
&\quad + \big(2\kappa''(s)\tau(s) + 3\kappa'(s)\tau'(s) + \kappa(s)\tau''(s)\big)\langle b(s),v\rangle \\
&\quad + \big(2\kappa'(s)\tau(s) + \kappa(s)\tau'(s)\big)\langle -\tau(s)n(s),v\rangle \\
&= \big(-\kappa'''(s) + 6\kappa^2(s)\kappa'(s) + 3\kappa'(s)\tau^2(s)\big) \\
&\quad + 3\kappa(s)\tau(s)\tau'(s)\big)\ |\, t(s)\ b(s)\ v\,| \\
&\quad + \Big(-4\kappa(s)\kappa''(s) + \kappa^4(s) + \kappa^2(s)\tau^2(s) - 3\big(\kappa'(s)\big)^2\Big)\,|\, \mathrm{n}(s)\ b(s)\ v\,| \\
&\quad + \big(3\kappa''(s)\tau(s) - \kappa^3(s)\tau(s) - \kappa(s)\tau^3(s) \\
&\quad + 3\kappa'(s)\tau'(s) + \kappa(s)\tau''(s)\big)\,|\, t(s)\ \mathrm{n}(s)\ v\,|
\end{aligned}
$$

dır.

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{e})\, g_u^{(5)}(s) = \big(&-\kappa^{(4)}(s)+15\kappa(s)\kappa'^2(s)+10\kappa^2(s)\kappa''(s)+6\kappa''(s)\tau^2(s)\\
&+12\kappa'(s)\tau(s)\tau'(s)+3\kappa(s)\tau'^2(s)+4\kappa(s)\tau(s)\tau''(s)-\kappa^5(s)\\
&-2\kappa^3(s)\tau^2(s)-\kappa(s)\tau^4(s)\big)\,|\, t(s)\ b(s)\ v\,|\\
&(-5\kappa(s)\kappa'''(s)+10\kappa^3(s)\kappa'(s)+5\kappa(s)\kappa'(s)\tau^2(s)\\
&+5\kappa^2(s)\tau(s)\tau'(s)-10\kappa'(s)\kappa''(s)\big)\,|\,\mathrm{n}(s)\ b(s)\ v\,|\\
&+\big(4\kappa'''(s)\tau(s)-9\kappa^2(s)\kappa'(s)\tau(s)-4\kappa'(s)\tau^3(s)-6\kappa(s)\tau^2(s)\tau'(s)\\
&+6\kappa''(s)\tau'(s)-\kappa^3(s)\tau'(s)+4\kappa'(s)\tau''(s)+\kappa(s)\tau'''(s)\big)\,|\,\mathrm{t}(s)\ \mathrm{n}(s)\ v\,|
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece, gerekli türevler hesaplandıktan sonra ispata geçebiliriz.

Yukarıda elde ettiğimiz (a) formülünde $v=\lambda t(s)+\mu b(s)$ eşitliğini kullanarak (1) iddiasını ispatlayabiliriz.

$$
\begin{aligned}
g_u'(s) &= -\kappa(s)\,|\,\mathrm{t}(s)\ b(s)\ v\,|\\
&= -\kappa(s)\,|\,\mathrm{t}(s)\ b(s)\ \lambda\mathrm{t}(s)+\mu b(s)\,|\\
&= -\kappa(s)\mathrm{t}(s)\big(b(s)\times(\lambda\mathrm{t}(s)+\mu b(s))\big)\\
&= -\kappa(s)\mathrm{t}(s)\big(\lambda b(s)\times t(s)\big)\\
&= -\kappa(s)\mathrm{t}(s)\big(\lambda n(s)\big)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

bulunur.

O halde, $g_u'(s)=0 \Leftrightarrow v=\lambda t(s)+\mu b(s),\ \lambda^2+\mu^2=1$ dır.

Benzer şekilde (b) formülünde $v=\lambda t(s)+\mu b(s)$ eşitliğini kullanalım ve kolaylık sağlaması açısından,

$$|\,\mathrm{t}(s)\ b(s)\ v\,| \qquad (\boldsymbol{i})$$

$$|\,\mathrm{n}(s)\ b(s)\ v\,| \qquad (\boldsymbol{ii})$$

$$|\,\mathrm{t}(s)\ \mathrm{n}(s)\ v\,| \qquad (\boldsymbol{iii})$$

ile gösterelim.O halde,

$$(\boldsymbol{i}) \quad |\,\mathrm{t}(s)\ b(s)\ \lambda t(s)+\mu b(s)\,|$$

$$= \mathrm{t}(s)\left(b(s)\times\left(\lambda t(s)+\mu b(s)\right)\right)$$
$$= \mathrm{t}(s)\left(\lambda n(s)\right)$$
$$= 0$$

(***ii***) $\left|\mathrm{n}(s)\ b(s)\ \lambda t(s)+\mu b(s)\right|$

$$= n(s)\left(b(s)\times\left(\lambda t(s)+\mu b(s)\right)\right)$$
$$= n(s)\left(\lambda n(s)\right)$$
$$= 0$$

(***iii***) $\left|\mathrm{t}(s)\ \mathrm{n}(s)\ \lambda t(s)+\mu b(s)\right|$

$$= \mathrm{t}(s)\left(n(s)\times\left(\lambda t(s)+\mu b(s)\right)\right)$$
$$= \mathrm{t}(s)\left(\lambda n(s)\times t(s)+\mu n(s)\times b(s)\right)$$
$$= \mathrm{t}(s)\left(\lambda\left(-b(s)\right)+\mu t(s)\right)$$
$$= \mu$$

elde edilir.

bulunanan $(i),(ii),(iii)$ eşitlikleri (b) formülünde yerine yazılırsa;

$$g_u''(s) = -\kappa^2(s)\lambda+\kappa(s)\tau(s)\mu$$

bulunur. $g_u''(s)=0$ olsun. Bu taktirde;

$$g_u''(s) = -\kappa^2(s)\lambda+\kappa(s)\tau(s)\mu$$
$$= \kappa(s)\left(\tau(s)\mu-\kappa(s)\lambda\right)$$
$$= 0$$

bulunur. $\kappa(s)\neq 0$ olduğundan

$$\left(\tau(s)\mu-\kappa(s)\lambda\right)=0$$

dır. Buradan, $\lambda=\dfrac{\tau(s)}{\kappa(s)}\mu$ bulunur. Böylece,

$$v=\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}\mu t(s)+\mu b(s)$$

$$=\mu\left((\tau/\kappa)(s)t(s)+b(s)\right)$$

elde edilir.

$v\in S^2, \kappa(s)\geq 0$ ve $v=\lambda t(s)+\mu b(s),\ \lambda^2+\mu^2=1$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\lambda t(s)+\mu b(s)=\mu\left((\tau/\kappa)(s)t(s)+b(s)\right)$$
$$\Rightarrow \lambda t(s)=\mu\left((\tau/\kappa)(s)t(s)\right)$$
$$\Rightarrow \mu=\frac{\lambda\kappa(s)}{\tau(s)}=\pm\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\tau(s)}\kappa(s)$$
$$\Rightarrow \mu=\pm\frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}$$
$$\Rightarrow v=\pm\frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}\left((\tau/\kappa)(s)t(s)+b(s)\right)$$

bulunur. Şimdi,

$$v=\pm\frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}\left((\tau/\kappa)(s)t(s)+b(s)\right)$$

ifadesini $(i),(ii),(iii)$ eşitliklerinde kullanarak (c) formülünü düzenlenirse;

$$(\boldsymbol{i})\quad \left| t(s)\ b(s)\ \pm\frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}\left((\tau/\kappa)(s)t(s)+b(s)\right)\right|$$
$$= t(s)\left(b(s)\times\left(\pm\frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}\left((\tau/\kappa)(s)t(s)+b(s)\right)\right)\right)$$
$$=0$$
$$(\boldsymbol{ii})\quad \left| \mathrm{n}(s)\ b(s)\ \pm\frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}\left((\tau/\kappa)(s)t(s)+b(s)\right)\right|$$

$$= n(s)\left(b(s)\times\left(\pm\frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}\left((\tau/\kappa)(s)t(s)+b(s)\right)\right)\right)$$

$$= n(s)\left(\pm\frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}(\tau/\kappa)(s)n(s)\right)$$

$$= \pm\frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}(\tau/\kappa)(s)$$

$$(\textit{iii}) \quad \left| t(s)\ \mathrm{n}(s)\ \pm\frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}\left((\tau/\kappa)(s)t(s)+b(s)\right)\right|$$

$$= t(s)\left(n(s)\times\left(\pm\frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}\left((\tau/\kappa)(s)t(s)+b(s)\right)\right)\right)$$

$$= t(s)\left(\pm\frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}(\tau/\kappa)(s)b(s)\pm\frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}t(s)\right)$$

$$= \pm\frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}$$

elde edilir. Bulunan $(i),(ii),(iii)$ eşitlikleri (c) formülünde yerine yazılırsa,

$$g_u'''(s) = \left(-3\kappa(s)\kappa'(s)\right)\left(\pm\frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}(\tau/\kappa)(s)t(s)\right)$$
$$+\left(2\kappa'(s)\tau(s)+\kappa(s)\tau'(s)\right)\left(\pm\frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}\right)$$
$$= \left(\pm\frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}\right)\left(-\kappa'(s)\tau(s)+\kappa(s)\tau'(s)\right)$$

bulunur.

(3). iddia gereğince $g_u'(s)=g_u''(s)=g_u'''(s)=0$ olarak alınırsa,

$$\left(\pm\frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}\right)\left(-\kappa'(s)\tau(s)+\kappa(s)\tau'(s)\right)=0$$

bulunur ve buradan, $\left(\pm\frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}\right)\neq 0$ olduğundan,

$$\left(\kappa(s)\tau'(s)-\kappa'(s)\tau(s)\right)=0$$

dır. Bu ise,

$$\left(\tau/\kappa\right)'(s)=0$$

olmasıdır.

Benzer şekilde yukarıda hesaplanan $(i),(ii),(iii)$ eşitlikleri (d) formülünde yerine yazılırsa,

$$g_u^{(4)}(s)=\left(\pm\frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}\right)(\tau/\kappa)\left(-4\kappa(s)\kappa''(s)+\kappa^4(s)+\kappa^2(s)\tau^2(s)-3\left(\kappa'(s)\right)^2\right)$$

$$+\left(\pm\frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}\right)\left(3\kappa''(s)\tau(s)-\kappa^3(s)\tau(s)-\kappa(s)\tau^3(s)\right.$$

$$\left.+3\kappa'(s)\tau'(s)+\kappa(s)\tau''(s)\right)$$

$$=\left(\pm\frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}\right)\left(-\kappa''(s)\tau(s)+\kappa(s)\tau''(s)+3\frac{\kappa'}{\kappa}\left(-\kappa'(s)\tau(s)+\kappa(s)\tau'(s)\right)\right)$$

elde edilir.

(4). iddia' ya göre $g_u'(s)=g_u''(s)=g_u'''(s)=g_u^{(4)}(s)=0$ olarak alınırsa,

$$\left(\pm\frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}\right)\left(-\kappa''(s)\tau(s)+\kappa(s)\tau''(s)+3\frac{\kappa'}{\kappa}\underbrace{\left(-\kappa'(s)\tau(s)+\kappa(s)\tau'(s)\right)}_{0}\right)=0$$

dır. Bu taktirde;

$$\left(\pm \frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}} \right)\left(-\kappa''(s)\tau(s)+\kappa(s)\tau''(s)\right)=0$$

dır.

Burada $\left(\pm \frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}} \right) \neq 0$ olduğundan,

$$\left(-\kappa''(s)\tau(s)+\kappa(s)\tau''(s)\right)=0$$

dır. Bu ise,

$$(\tau/\kappa)''(s)=0$$

olmasıdır. O halde,

$$(\tau/\kappa)'(s)=(\tau/\kappa)''(s)=0$$

elde edilir

5.3. Helis ve Bir Eğrinin Küresel Tanjant Görüntüsü

Bu bölümde rektifiyan geliştirilebilirliğin geometrik özelliklerini ve bir uzay eğrisinin küresel Darboux görüntüsünü inceleyeceğiz.

$$(\tau/\kappa)'(s)\equiv 0$$

ise $\gamma(s)$ eğrisi **helis** olarak bilinir.

Birim hızlı regüler eğri $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ için, birim tanjant eğrisi $t: I \to S^2$

γ nın küresel tanjant görüntüsü olarak adlandırılır.

γ nın konik eğriliği olarak adlandırılan, t nin küresel tanjant görüntüsünün jeodezik eğriliği τ/κ fonksiyonuna eşittir.

Önerme 5.3.1. $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$
regüler bir eğri olsun.

γ bir helis dir. $\Leftrightarrow$ Modife edilmiş Darboux vektör $\tilde{D}(s)$ sabit bir vektördür. Bu şartlar altında aşağıdaki özellikler sağlanır.

$(\mathbf{1})$ γ nın küresel tanjant görüntüsü $t(s)$, S^2 birim küresi üzerinde bir çemberdir ve dairenin merkezinin yönü sabit vektör $d(s) \equiv e$ ile verilir [10].

$(\mathbf{2})$ γ nın rektifiyan geliştirilebilirliği $\gamma(s)+ue$ ile verilen silindirik yüzeydir [10]

İspat:

Serret – Frenet formülünden,

$$\tilde{D}'(s) = (\tau/\kappa)'(s)t(s)$$

olduğunu gösterebiliriz;

$$\begin{aligned}
\tilde{D}(s) &= (\tau/\kappa)(s)t(s)+b(s) \\
\tilde{D}'(s) &= (\tau/\kappa)'(s)t(s)+(\tau/\kappa)(s)t'(s)+b'(s) \\
&= (\tau/\kappa)'(s)t(s)+(\tau/\kappa)(s)\kappa(s)n(s)-\tau(s)n(s) \\
&= (\tau/\kappa)'(s)t(s)
\end{aligned}$$

bulunur. γ helis ise $(\tau/\kappa)(s)$ sabittir, o halde $(\tau/\kappa)'(s)=0$ ve buradan da $\tilde{D}'(s) \equiv 0$ dır.

Bu durum $\tilde{D}(s)$ in sabit bir vektör olma şartına eşdeğerdir. Bu şartlar altında (1) ve (2) iddialarını ispatlayabiliriz.

(1) ilk olarak $\langle e, t(s)\rangle = \cos\theta(s)$ olduğunu gösterelim. Burada $\theta(s)$, $t(s)$ ve ‘‘e’’ vektörleri arasındaki açıdır.

Diğer taraftan,

$$e = d(s) = \frac{D(s)}{\|D(s)\|}$$

$$= \frac{\tau(s)t(s) + \kappa(s)b(s)}{\sqrt{\tau^2(s) + \kappa^2(s)}}$$

$$= \frac{\kappa(s)}{\sqrt{\tau^2(s) + \kappa^2(s)}}\left((\tau/\kappa)t(s) + b(s)\right)$$

olarak bulunur. O halde,

$$\langle e, t(s)\rangle = \|e\| \ \|t(s)\| \cos\theta(s)$$
$$= \cos\theta(s)$$

dır. Aynı zamanda,

$$\langle e, t(s)\rangle = \left\langle \frac{\kappa(s)}{\sqrt{\tau^2(s) + \kappa^2(s)}}\left((\tau/\kappa)(s)t(s) + b(s)\right), t(s)\right\rangle$$

$$= \frac{\kappa(s)}{\sqrt{\tau^2(s) + \kappa^2(s)}}(\tau/\kappa)(s)$$

$$= \frac{(\tau/\kappa)(s)}{\sqrt{(\tau/\kappa)^2(s) + 1}}$$

bulunur. Böylece $\cos\theta(s)$ sabittir.

$\cos\theta(s)$ sabit ise küresel tanjant görüntüsü $t(s)$, S^2 birim küresi üzerinde bir çemberdir.

(2) $RD(\gamma) = \{\gamma(s) + u\tilde{D}(s) \mid u \in \mathbb{R}\}$ olarak tanımlanır. $e = \tilde{D}(s)$ olduğundan, γ nın rektifiyan geliştirilebilirliği $\gamma(s) + ue$ ile tanımlanan silindirik bir yüzey olur.

Bu da ispatı tamamlar.

KAYNAKLAR

1. Hacısaliholğlu, H. H., Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş, Fırat Üniversitesi, Elazığ,1980.
2. Hacısaliholğlu, H. H., Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler, İnönü Üniversitesi, Malatya,1980.
3. Spivak, M., Calculus On Manifolds, W.A. Benjamin. Inc. New York, 1965
4. Hicks, N. J., Notes On Differential Geometry, Van Nostrnd Reinhold Company, London, 1974.
5. Spivak, M., A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. I, II, III, IV, V, Brandeis University.
6. O'Neill, B. Elementary Differential Geometry, Academic Pres, New York, 1966.
7. D. Denvir and E. Stokes, A Parametrization of Great Circles using Rotation Matrices, Presentation at the Ohio section meeting of the MAA, Ohio, USA, 2003.
8. Cleave, J.P., The form of the tangent developable at points of zero torsion on space curves, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 88, 403- 407, 1980.
9. Ishikawa, G., Topological classification of the tangent developable of space curves, Hokkaido Univ. Preprint Series, 341, 1996.
10. Bruce, J.W., Giblin, P.J., Curves and Singularities, 2nd. ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

ÖZGEÇMİŞ

Adı – Soyadı **:** Esra KAYA

Baba Adı **:** Hasan

Ana Adı **:** Necla

Doğum Yeri **:** Çorum

Doğum Tarihi **:** 12.07.1984

İlk ve orta öğrenimini Çorum'da tamamladı. Erciyes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden Lisans diploması alarak 2007 yılında mezun oldu. Aynı yıl Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Eğitimine başladı. Halen Hitit Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi' nde Matematik dersi vermektedir.

İletişim Bilgileri:

Adres : Bahçelievler Mah. 2. Cad. No: 8/14

19200 / ÇORUM

e-posta : esra.math@hotmail.com

GSM: 0 555 451 977