T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

REGÜLER VE KUVVETLİ REGÜLER YAKIN-HALKALARIN İNCELENMESİ

Tezi Hazırlayan
Serap ŞENER

Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. Emin AYGÜN

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Şubat 2010
KAYSERİ

T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

REGÜLER VE KUVVETLİ REGÜLER YAKIN-HALKALARIN İNCELENMESİ

Tezi Hazırlayan
Serap ŞENER

Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. Emin AYGÜN

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Bu çalışma Erciyes Üniversitesi Bilimsel Araştırma Proje Birimi tarafından B-970 kodlu proje ile desteklenmiştir.

Şubat 2010
KAYSERİ

Yrd. Doç. Dr. Emin AYGÜN danışmanlığında Serap ŞENER tarafından hazırlanan **"Regüler ve Kuvvetli Regüler Yakın-Halkaların İncelenmesi "** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

02 / 02 / 2010

JÜRİ:

Başkan: Prof. Dr. Hüseyin ALTINDİŞ

Üye : Prof. Dr. Mehmet BARAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Emin AYGÜN

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 16/02/2010 tarih ve 2010/08-07 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

16 / 02 / 2010

N. Ayyıldız

Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren, çalışmalarımın planlanmasında, yürütülmesinde ve yazılmasında değerli katkılarıyla en büyük desteği gördüğüm saygıdeğer hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Emin AYGÜN' e teşekkürlerimi sunarım. B-970 proje kodu ile maddi destek aldığım T.C. ERCİYES ÜNİVERSİTESİ BİLİMSEL ARAŞTIRMA PROJLERİ BİRİMİ' ne teşekkür ederim. Hayatımın her aşamasında maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme, çalışmalarım boyunca sıkıntımı çeken ve paylaşan, komikliği ile stresimi alan ve şuan vatani görevini yapmakta olan kardeşim Fatih Şener'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

REGÜLER VE KUVVETLİ REGÜLER YAKIN-HALKALARIN İNCELENMESİ

Serap ŞENER

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Şubat 2010
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Emin AYGÜN

ÖZET

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci ve ikinci bölümde konuyla ilgili yapılan literatür çalışmasında, yakın-halkalar, sıfır-simetrik ve sabit yakın-halkalar, yakın-halka idealleri, yakın-halka homomorfizmi, *N*-grup ve tipleri ile ilgili temel tanımlara, özelliklere ve teoremlere yer verildi.

Regüler yakın-halka kavramı, kuvvetli regüler yakın-halka kavramı, idempotent ve nilpotent elemanlar, regüler bileşen kavramları tanımlanarak örnekleri ve özellikleri bu tezin üçüncü bölümünde verildi.

Anahtar Kelimeler: Yakın-halka, regüler yakın-halkalar, kuvvetli regüler yakın-halkalar.

INVESTIGATION OF REGULAR NEAR-RINGS AND STRONGLY REGULAR NEAR-RİNGS

Serap ŞENER

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M. Sc. Thesis, February 2010
Thesis Supervisor: Assist. Prof. Emin AYGÜN

ABSTRACT

This thesis consists of three chapters.

In the first and the second chapter, the literature study of the topic in this thesis has been introduced and basic definitions, properties and theorems about near-rings, zero-symmetric and constant near-rings, ideals of near-rings, homomorphisms of near-rings, N-groups and types of N-groups have been given.

The third chapters of the thesis, regular near-rings, strongly regular near-rings, idempotent and nilpotent member, regularity companion with its properties and examples has been given.

Keywords : Near-rings, regular near-rings, strongly regular near-rings.

İÇİNDEKİLER

KISALTMA VE SEMBOLLER

N	: Yakın-Halka
N_0	: N yakın-halkasının 0-simetrik kısmı
N_C	: N yakın-halkasının sabit kısmı
N_d	: Dağılmalı yakın-halka
Γ	: N-grup
N^Γ	: N yakın-halkası üzerindeki bir N-grup
$M(\Gamma)$	: Γ 'dan Γ' ya tüm fonksiyonların yakın-halkası
$M_0\ (\Gamma)$	: Γ 'da sıfırı koruyan tüm fonksiyonların yakın-halkası
$M_C\ (\Gamma)$	: Γ 'da tüm sabit fonksiyonların yakın-halkası
R	: Halka
$E(\Gamma)$	: Γ 'dan Γ' ya tüm endomorfizmlerin yakın-halkası
$Hom\ (N,M)$	: N 'den M' ye tüm yakın-halka homomorfizmlerin cümlesi
$Hom_N(N, \Gamma)$	: N 'den Γ N-grubuna tüm N-homomorfizmlerin cümlesi
Ω	: Γ 'nın en küçük N-alt grubu
$(0: \Gamma)$	: Γ 'nın sıfırlayanı
$J_v(N)$	: v-tipinde Radikal

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Tarihsel olarak ilk adım 1905 yılında Dickson [1] tarafından atılmış olan yakın-halkalar, halkaların bir genelleştirilmesidir. Dickson sadece bir yönlü dağılma özelliği olan cisimlerin varlığını göstermiştir. Şimdi bu cisimler yakın-cisimler olarak anılmaktadır. Yıllar sonra tüm sonlu yakın-cisimler ise Zassenhaus [2] tarafından tespit edilmiştir. Günümüzde yakın-cisimler doubly transitive grupları, incidence grupları ve Frobenius gruplarını karakterize etmek için kullanışlı bir araç olmuşlardır.

Bir $(\Gamma,+)$ komutatif olmayan grubun iki endomorfizminin toplamı, genelde bir endomorfizm olmadığından, Γ 'nın endomorfizmlerinin tüm sonlu toplamlarının ve farklarının $E(\Gamma)$ cümleleri çalışılarak noktasal toplama ve bileşke işlemleri altında bir yakın-halka olduğu gösterilmiştir. Böylece $E(\Gamma)$'nın dağılmalı üretilmiş yakın-halkalar sınıfına ait bir yakın-halka olduğu görülmüştür. Yakın-halkalar genelleştirilmiş halkalar olduğundan halkaların kuruluş teorisinin birçok kısmı yakın-halkalara aktarılmış ve yakın-halkaların kendine özgü özellikleri incelenmiştir. Bu şekilde devam edilerek yakın-halka teorisi kurulmuştur.

Halkalarda Jacobson Radikalinin sahip olduğu özelliklerin çoğu bir N yakın-halkasında $J_0(N)$, $J_1(N)$, $J_2(N)$ ve $J_3(N)$ olarak yakın-halkalara farklı birçok primitif tanımları sayesinde yeni radikaller eklenmiştir. Bu radikallerin özellikleri ve birbirleriyle olan ilişkileri birçok yazar tarafından çalışılmış ve halen de çalışılmaktadır.

Kaarli [3], *I, N* ‘nin bir ideali olmak üzere

$$J_2(I) = I \cap J_2(N)$$

olduğunu ispatlayarak $J_2(N)$ nin bir kalıtsal radikal olduğunu belirlemiştir. $J_3(N)$ radikalini tanımlayarak sahip olduğu özellikleri araştırıp $J_2(N)$ ile yakından ilgili olduğunu, kalıtsal radikal olduğunu;

$$J_3(I) = J_3(N) \cap I$$

ve

$$J_3(J_3(N)) = J_3(N)$$

eşitliklerini Holcombe [4,5] de göstermiştir.

Clay ve Lawver, halkaların genellemesi olan yakın-halkalarda, halkada Boolean halkası olarak bilinen halkanın bir genellemesini tanımlamışlar ve özelliklerini geliştirmişlerdir. Sonrasında Clay ve Lawver ‘ın çalışmalarını da kullanarak Ratliff p-yakın-halkaları tanımlamıştır. Beidleman da p-halkaların bir genellemesi olan regüler halkayı kullanarak, p-yakın-halkalar sayesinde regüler yakın-halkaları tanımlamış ve özelliklerini araştırmıştır. Bu şekilde regüler yakın-halkaların özellikleri ve diğer yapılarla olan ilişkileri birçok yazar tarafından çalışılmış ve halen de çalışılmaktadır.

Halkalarda da kullanılan regüler halkalar kavramı, bu tezde yakın-halkalara: *N* bir yakın-halka olmak üzere $\forall n \in N$ için $n = nxn$ olacak şekilde $\exists\, x \in N$ varsa *N* yakın-halkasına regüler yakın-halka denir şeklinde aktarılmıştır. Regüler yakın-halka örnekleri, regüler bileşeni ve bileşenin idempotent olduğu, birimli bir regüler yakın-halkanın idempotent elemana sahip olduğu tanım ve teoremlerle verilmiştir. Kuvvetli Regüler Yakın-halka kavramı ve *N* sıfır-simetrik bir regüler yakın-halka ve *N* nin tek nilpotent elemanının 0 olması durumunda aşağıdaki ifadelerin denkliği şu teoremle verilmiştir.

Teorem 1.1: *N* sıfır-simetrik bir yakın-halka ve *N* nin tek nilpotent elemanı *0* olsun. Bu taktirde;

a) $\forall k,m \in N$ için $m.k = 0$ ise $k.m = 0$,

b) *N, IFP* yakın-halkadır,

c) Her *e* idempotenti için $x \in N$ olmak üzere $exe = ex$,

d) Her dağılmalı idempotent merkezildir.

e) N birimli yakın-halka ise tüm idempotentleri merkezildir.

Bu teoremden örneklendirilerek bu tezin üçüncü bölümünde gösterilmiştir. Ayrıca önemli bir teoremde üçüncü bölümde su şekilde ifade edilmiştir.

Teorem 1.2: N birimli ve sağ değişmeli bir yakın-halka ise bu taktirde

a) N sıfır simetriktir,

b) N nin her N-altgrubu sol idealdir,

c) N nin her N-altgrubu idealdir [23].

2. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tezde kullanılan, temel bilgi niteliğinde olan tanım ve kavramlara bu bölümde yer verilecektir. Günter Pilz'e ait ve yenilenmiş baskısı 1983 yılında yapılmış olan Yakın-halka teorisinde temel kaynak kabul edilen "Near-rings" adlı kitabından bu bölümde faydalanılmıştır.

2.1. Temel Tanım ve Özellikler

Her halka bir yakın-halkadır. Halkada olmayan bir özellik yakın-halkada da olamaz. Yani; yakın-halkalar, genelleştirilmiş halkalardır. Sadece halkalardan farklı olarak, bir yakın-halkanın ilk işlemi değişmeli olmak zorunda değildir ve ikinci işlemin yakın-halka üzerindeki birinci işleme tek yönlü dağılma özelliğinin olması yeterlidir ki bu aşağıda vereceğimiz tanımdan da açık olarak anlaşılır.

Tanım 2.1.1. Boştan farklı bir N cümlesi üzerinde tanımlanan "+" ve "." şeklinde gösterilen iki ikili işlem ile aşağıdaki şartları sağlıyorsa, $(N, +, .)$ üçlüsüne bir yakın-halka denir.

i) $(N, +)$ değişmeli olması gerekmeyen bir grup,

ii) $(N, .)$ bir yarı grup,

iii) $\forall m,n,p \in N$ için $(m+n).p = m.p + n.p$

Burada *iii)* şıkkında sağdan dağılma özelliği verildiğinden, bu şartları sağlayan $(N,+,.)$ üçlüsüne bir sağ yakın-halka denir. Eğer bunun yerine,

$$\forall m,n,p \in N \text{ için } m.(n+p) = m.n + m.p$$

alınırsa, yani soldan dağılma özelliği sağlanıyorsa , $(N,+,.)$ üçlüsüne bir sol yakın-halka denir. Dolayısıyla, yakın-halkanın sağ veya sol olmasını dağılma özelliğinin yönü belirler[11].

Bu çalışmada, kullanılan her yakın-halka terimi bir sağ yakın-halkayı ifade edecektir. Bazı yakın-halka örnekleri aşağıdadır.

Örnek 2.1.2. $N = \{ 1, -1, i, -i \}$ olmak üzere "Δ" işlemi $\forall x, y \in N$ için

$$x \,\Delta\, y = x$$

ile tanımlanırsa bilinen çarpma ve "Δ" işlemleri altında N bir sağ yakın-halka olur ki bu işlemi bütün gruplara uygulayarak, yani; işleme giren elemanlardan birincisini veren, yeni bir ikinci işlem belirleyip bir yakın-halka elde edilebilir.
Aynı şekilde

$$x \,\Delta\, y = 0$$

olması durumunda da bir yakın-halka elde edilir.

Örnek 2.1.3. $(\Gamma,+)$ herhangi bir grup olsun.

$$M(\Gamma) = \{ f : \Gamma \to \Gamma \mid f \text{ bir fonksiyon} \}$$

ile tanımlanan bu cümle, fonksiyonlarda toplama ve bileşke işlemleri altında bir yakın-halkadır.

Örnek 2.1.4. $(N,+)$ bir grup ve $\forall m,n \in N$ için çarpma işlemi;

$$mn = \begin{cases} m & ,n \neq 0 \\ 0 & ,n = 0 \end{cases}$$

ile tanımlanırsa, $(N,+,.)$ üçlüsü bir yakın-halka olur. Bu yakın-halka literatürde, bazen, aşikar yakın-halka adıyla karşımıza çıkmaktadır.

Örnek 2.1.5. Her grup için bir yakın-halka elde edilebilir. Şöyle ki , eğer $(N,+)$ grubu üzerinde ikinci işlem, $\forall m,n \in N$ için,

$$mn = 0$$

ile tanımlanırsa, $(N,+,\cdot)$ bir yakın-halkadır.

Örnek 2.1.6. $(\Gamma,+)$ herhangi bir grup ve "0_Γ" ile bu grubun etkisiz elemanı gösterilsin. Bu durumda, fonksiyonlarda toplama ve bileşke işlemleri altında aşağıdakiler birer yakın-halkadır;

i) $M_0(\Gamma)=\{f:\Gamma\to\Gamma \mid f(0_\Gamma)=0_\Gamma\}$

ii) $M_c(\Gamma)=\{\, f:\Gamma\to\Gamma \mid f \text{ sabit}\}$

iii) $M_c^0(\Gamma)=\{\, f_\gamma:\Gamma\to\Gamma \mid \gamma\in\Gamma \text{ ve } f_\gamma(\delta)=\begin{cases}0_\Gamma & ,\delta=0\\ \gamma & ,\delta\neq 0\end{cases} \}$

Özellikler 2.1.7. N bir yakın-halka ise aşağıdaki özellikler sağlanır.

a) $\forall x\in N$ için, $0x=0$ dır.

b) $\forall x,y\in N$ için, $(-x)y=-xy$ dir.

İspat : ***a)*** $\forall x\in N$ için, sağdan dağılma mevcut olduğundan,

$$0x=(0+0)x=0x+0x$$

olur ki

$$0x=0$$

elde edilir.

b) $\forall x,y\in N$ için, yine sağdan dağılma özelliği kullanılırsa,

$$(-x)y=(0-x)y=0y-xy=0-xy=-xy$$

olarak bulunur.

Bir N yakın-halkasında

$$0x=0 \text{ ve } (-x)y=-xy$$

iken

$$x0=0 \text{ ve } x(-y)=-xy$$

olmak zorunda değildir. Şöyle ki Örnek 2.1.3. de tanımlanan $M(\Gamma)$ yakın-halkasında $f,g\in M(\Gamma)$ için

$$f\circ 0=0$$

olması f fonksiyonunun orjinden geçmesi ile sağlanır. Benzer şekilde

$$f\circ(-g)=-(f\circ g)$$

olması da f fonksiyonunun tek fonksiyon olması ile sağlanacaktır.

Çok kullanılacak yeni bir tanımı bu şekilde $x0 = 0$ olacak şekildeki elemanların cümlesi ortaya çıkarmıştır.

Tanım 2.1.8. N bir yakın-halka olsun.

i) $N_0 = \{ n \in N \mid n0 = 0 \}$ cümlesine N yakın-halkasının sıfır-simetrik kısmı,

ii) $N_C = \{ n \in N \mid \forall m \in N$ için $nm = n \}$ cümlesine N yakın-halkasının sabit kısmı denir [11].

Burada, N yakın-halkası üzerinde tanımlanan işlemler altında N_0 ve N_C birer yakın-halkadırlar. $N = N_0$ ise N yakın-halkasına sıfır-simetrik yakın-halka ve $N = N_C$ ise N yakın-halkasına sabit yakın-halka adını alır.

Örnek 2.1.9. $(M(\Gamma))_0 = M_0(\Gamma)$ ve $(M(\Gamma))_c = M_c(\Gamma)$ dır. Şöyle ki ,

$$\begin{aligned}(M(\Gamma))_0 &= \{f \in M(\Gamma) \mid f \circ 0 = 0\} \\ &= \{f \in M(\Gamma) \mid f(0) = 0\} \\ &= M_0(\Gamma)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(M(\Gamma))_c &= \{f \in M(\Gamma) \mid f \circ 0 = f\} \\ &= \{f \in M(\Gamma) \mid f \text{ sabit}\} \\ &= M_c(\Gamma)\end{aligned}$$

dır. Bu yüzden $M_0(\Gamma)$ bir 0-simetrik ve $M_c(\Gamma)$ bir sabit yakın-halkadır.

Tanımda da görüldüğü gibi yakın-halkadaki sabit kısım ve sıfır simetrik kısımdan ve bunların yakın-halka oluşlarından verilen örnekte de bahsedilmektedir. Yakın-halkanın tüm elemanlarının sabit eleman ve sıfır simetrik eleman tarafından teşkil edilebileceği aşağıda vereceğimiz teoremde de görülmektedir.

Teorem 2.1.10. N yakın-halkasında $N = N_0 + N_C$ dır [10].

İspat: $n \in N$ için

$$[n-(n0)]0 = [n+(-n)0]0$$
$$= n0+((-n)0)0$$
$$= n0+(-n)0$$
$$= 0$$

olacağından,

$$[n-(n0)] \in N_0$$

dır. Dolayısıyla $\forall\, m \in N$ için

$$(n0)m = n0$$

olur ki

$$n0 \in N_C$$

olacağından

$$n = [n-(n0)] + n0$$

formunda yazılabilir ki bu da ispatı tamamlar.

Sonuç olarak bir N yakın-halkasında $\forall\, n \in N$ için

$$n = n_0 + n_C$$

olacak şekilde $\exists\, n_0 \in N_0$ ve $\exists\, n_C \in N_C$ vardır.

Yarı-direkt çarpım gruplarda şu şekildeydi: (G, +) bir grup, (A, +) ve (B, +)'da iki alt grubu olsun. Eğer, $A \cap B = \{0\}$, $A + B = G$ ve A alt grubu G' de normal ise, G grubuna A alt grubunun B alt grubuyla bir yarı-direkt çarpımı adı verilir.

Sonuç 2.1.11. Bir (N, +, .) yakın-halkası için, (N, +) grubu, $(N_0,+)$'nın $(N_c,+)$ ile bir yarı-direkt çarpımıdır [10].

İspat: $x \in N_0 \cap N_c$ olsun. Dolayısıyla

$$x = n0$$

şeklinde $n \in N$ vardır ve

$$x0 = 0$$

olarak yazılabilir. Şu halde

$$0 = x0 = (n0)0 = n(00) = n0 = x$$

olur ki $N_0 \cap N_c = \{0\}$ dır. Teorem 2.1.10 dan $N = N_0 + N_c$ dir. Şimdi de $(N_0,+)$ 'nın $(N, +)$'da normal olduğunu göstermek gerekir. Eğer $m \in N_0$ ve $y \in N$ ise, bu durumda,

$$(y + m - y)0 = (y0) + (m0) + (-y)0$$

yazılışında,

$$m0 = 0$$

olacağından,

$$y0 + (-y)0 = 0$$

şeklinde yazılır. Bu ise, $(N_0,+)$ 'nın $(N, +)$'da normal olması demektir.

Tanım 2.1.12. $(N, +, .)$ üçlüsü bir yakın-halka olmak üzere

i) $\forall\, x,y \in N$ için

$$d(x + y) = dx + dy$$

şeklinde bir $d \in N$ elemanına dağılmalı eleman,

ii) N yakın-halkasının tüm dağılmalı elemanlarının cümlesi N_d ile gösterilir ve $N = N_d$ ise, N 'ye bir dağılmalı yakın-halka,

iii) $(N,+)$ değişmeli ise N 'ye bir abelyen yakın-halka,

iv) $(N,.)$ değişmeli ise, N 'ye bir komutatif yakın-halka

v) $(N,.)$ birimli ise N 'ye birimli bir yakın-halka,

vi) $(N - \{0\}, .)$ grup ise N 'ye yakın-cisim

denir [11].

Örnek 2.1.13. Γ değişmeli olması gerekmeyen bir grup olmak üzere $E(\Gamma), \Gamma$' nın bütün endomorfizmlerin cümlesi olmak üzere noktasal toplama ve bileşke işlemleri altında bir dağılmalı yakın-halkadır [11].

2.2. *N*-Gruplar

Halkalarda çokça kullanılan modül kavramının, yakın-halkalara aktarılmasıyla elde edilen yakın-modül kavramına N-grup adı verilir ve şu şekilde tanımlanır:

Tanım 2.2.1. $(\Gamma,+)$ bir grup ve N bir yakın-halka olsun. $\forall x, y \in N$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$\begin{array}{rcl} \mu : N \times \Gamma & \to & \Gamma \\ (x,\gamma) & \to & x\gamma \end{array}$$

dönüşümü altında; aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (Γ, μ) ikilisine bir N-grup, yani N üzerinde yakın-modül denir,

a) $(x+y)\gamma = x\gamma + y\gamma$

b) $(xy)\gamma = x(y\gamma)$

Bu kısaca, N^{Γ} ile gösterilir. Eğer N, birimi 1 olan birimli bir yakın-halka ise, $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$1\gamma = \gamma$$

şartını sağlayan Γ N-grubuna, bir üniter N-grup denir.

Her yakın-halka kendi üzerinde bir N-grup olduğundan bu N^N şeklinde gösterilir.

Örnek 2.2.2. Γ bir grup olsun.

$$\begin{array}{rcl} \mu : M(\Gamma) \times \Gamma & \to & \Gamma \\ (f,\gamma) & \to & f(\gamma) \end{array}$$

olmak üzere $\forall f, g \in M(\Gamma)$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ için

$$(f+g)\gamma = (f+g)(\gamma) = f(\gamma) + g(\gamma) = f\gamma + g\gamma$$

$$(fg)\gamma = (fg)(\gamma) = f(g(\gamma)) = f(g\gamma)$$

olduğundan Γ bir $M(\Gamma)$-gruptur.

Özellikler 2.2.3. N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olmak üzere,

a) $\forall \gamma \in \Gamma$ için, $0\gamma = 0_{\Gamma}$,

b) $\forall \gamma \in \Gamma$ ve $\forall x \in N$ için, $(-x)\gamma = -x\gamma$,

c) $\forall x \in N_0$ için, $x0_{\Gamma} = 0_{\Gamma}$,

d) $\forall\gamma\in\Gamma$ ve $\forall n\in N_c$ için, $n\gamma = n0_\Gamma$ dır.

İspat: ***a)*** $\forall\gamma\in\Gamma$ için,

$$0\gamma = (0+0)\gamma = 0\gamma + 0\gamma$$

olacağından $0\gamma = 0_\Gamma$ dır.

b) $\forall\gamma\in\Gamma$ ve $\forall x\in N$ için,

$$(-x)\gamma = (0-x)\gamma = 0\gamma - x\gamma = 0_\Gamma - x\gamma = -x\gamma$$

olur.

c) $\forall x\in N_0$ için,

$$x0_\Gamma = x(00_\Gamma) = (x0)0_\Gamma = 00_\Gamma = 0_\Gamma$$

şeklinde yazılır.

d) $\forall\gamma\in\Gamma$ ve $\forall n\in N_c$ için,

$$n\gamma = (n0)\gamma = n(00_\Gamma) = n0_\Gamma$$

olarak bulunur.

2.3. Diğer Yapılar

Tanım 2.3.1. N bir yakın-halka ve (M , +), (N ,+)' nın bir alt grubu olsun. Eğer, $\forall m,n\in M$ için

$$m.n\in M$$

ise, M 'ye N 'nin bir alt yakın-halkası denir [11].

Örnek 2.3.2. **Y**akın-halkalarda ki sıfır-simetrik kısım ve sabit kısım N ' nin birer alt yakın-halkalarıdır. Şöyle ki $\forall x,y\in N_0$ için

$$(x-y)0 = x0 - y0 = 0 - 0 = 0$$

olur ki N_0 bir alt gruptur. Benzer olarak

$$(xy)0 = x(y0) = x0 = 0$$

olacağından $N_0 N_0 \subseteq N_0$ elde edilir. Bu ise N_0 'ın bir alt yakın-halka olduğu anlamına gelir. Yine benzer olarak N_C sabit yakın-halkanın da bir alt yakın-halka olduğu görülebilir [11].

Tanım 2.3.3. N bir yakın-halka olsun. $a \in N$ için

$$a^k = 0$$

olacak şekilde en az bir k tamsayısı varsa a elemanına nilpotent eleman adı verilir.

Tanım 2.3.4. N bir yakın-halka ve $e \in N$ olmak üzere

$$e^2 = e$$

ise "e" elemanına idempotent eleman adı verilir

Tanım 2.3.5. N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Γ' nin

$$NH \subseteq H$$

şartını sağlayan bir H alt grubuna Γ 'nin bir N-alt grubu denir ve

$$H \leq_N \Gamma$$

şeklinde gösterilir.

Herhangi bir Γ N-grubunun alt modülleri birer N-alt gruptur.

2.4. İdealler ve Homomorfizm

Tanım 2.4.1. N bir yakın-halka ve I, N' nin bir normal alt grubu olmak üzere

a) $IN \subseteq I$

b) $\forall\, m, n \in N$ ve $\forall\, i \in I$ için $m(n + i) - mn \in I$

şartları sağlanıyorsa I ' ya N yakın-halkasının bir ideali denir ve $I \lhd N$ şeklinde gösterilir. Sadece *a*) şartı sağlanıyorsa I' ya N' nin bir sağ ideali, sadece *b*) şartı sağlanıyorsa I ' ya N ' nin sol ideali denir ve bu sırasıyla $I \lhd_r N$ ve $I \lhd_l N$ şeklinde gösterilir [11].

Tanım 2.4.2. N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olmak üzere Γ' nın bir H normal alt grubu $\forall \gamma \in \Gamma$, $\forall\, h \in H$ ve $\forall\, n \in N$ için,

$$n(\gamma + h) - n\gamma \in H$$

oluyorsa H' a Γ' nın bir ideali denir ve $H \lhd_N \Gamma$ şeklinde gösterilir [11].

Örnek 2.4.3. N bir yakın-halka olmak üzere N_0, N yakın-halkasının sol idealidir ancak genelde ideali değildir.

Şöyle ki $\forall n \in N$ ve $n_0 \in N_0$ için

$$\begin{aligned}(n + n_0 - n)0 &= n0 + n_0 0 - n0 \\ &= n0 - n0 \\ &= 0\end{aligned}$$

olur ki N_0, N'nin bir normal alt grubudur. $\forall m,n \in N$ ve $n_0 \in N_0$ için

$$\begin{aligned}[m(n + n_0) - mn]0 &= m(n0 + n_0 0) - mn0 \\ &= m\,n0 - mn0 \\ &= 0\end{aligned}$$

olacağından,

$$m(n + n_0) - mn \in N_0$$

elde edilir ki bu N_0 ın N' nin bir sol ideali olduğunu gösterir.

Genelde ideali olmadığını göstermek için; $\boldsymbol{R}$ reel sayılar cümlesi ve $N = M(R)$ olsun. $N_0 = M_0(R)$ ve

$$h : R \to R,\ h(x) = 1_R$$

olmak üzere $h \in M(R)$ dır. 1 birim fonksiyon olmak üzere

$$1 \circ h = 1_R$$

olur ki,

$$1 \circ h \notin M_0(R)$$

olacağından $M_0(R)$, $M(R)$' nin bir ideali değildir.

Tanım 2.4.4. N ve M iki yakın-halka ve $h : N \to M$ bir dönüşüm olmak üzere $\forall x,y \in N$ için,

a) $h(x + y) = h(x) + h(y)$

b) $h(xy) = h(x)\,h(y)$

şartları sağlanıyorsa h dönüşümüne bir yakın-halka homomorfizmi denir. N yakın-halkasından M yakın-halkasına bütün yakın-halka homomorfizmlerinin cümlesi *Hom* (N, M) ile gösterilir [11].

Tanım 2.4.5. N bir yakın-halka, Γ ve Ψ iki N -grup olsun. Eğer $h : \Gamma \to \Psi$ dönüşümü, $\forall n \in N$ ve $\forall \gamma, \delta \in \Gamma$ için,

a) $h(\gamma + \delta) = h(\gamma) + h(\delta)$

b) $h(n\gamma) = nh(\gamma)$

şartları sağlanıyorsa h dönüşümüne bir N-homomorfizm denir [8].

Bilinen diğer yapılarda kullanılan monomorfizm, izomorfizm, otomorfizm, homomorfizmin çekirdeği ve görüntü cümlesi kavramları yakın-halka teorisinde de aynı şekilde aktarılabilir.

Önerme 2.4.6. N ve M iki yakın-halka ve $h : N \to M$ yakın-halka homomorfizmi olsun.

a) $h(N)$ görüntüsü, M'nin bir altyakın-halkasıdır.

b) Eğer T, M'nin bir altyakın-halkası ise, bu taktirde $h^{-1}(T)$'de N'nin bir alt-yakın-halkasıdır.

c) $h(N_0) \subseteq M_0$ dır.

d) $h(N_C) \subseteq M_C$ dir.

e) Eğer h bir izomorfizm ise, h^{-1}'de bir izomorfizmdir [11].

İspat: ***a***) Açık olarak $h(N)$, N'nin bir alt grubudur. $x = h(m)$, $y = h(n) \in h(N)$ olduğundan,

$$xy = h(m)\,h(n) = h(mn) \in h(N)$$

şeklinde yazılabilir ki $h(N)$, M'nin bir altyakın-halkasıdır.

b) T , M'nin bir altyakın-halkası olsun. $h^{-1}(T)$'nin N'nin bir alt grubu olduğu açıkça görülür. $h(m), h(n) \in T$ ise,

$$h(mn) = h(m)\,h(n) \in T$$

olur ki,

$$mn \in h^{-1}(T)$$

olacağından $h^{-1}(T)$ N'nin bir alt yakın-halkasıdır.

c) $\forall n_0 \in N_0$ için,

$$h(n_0)0_M = h(n_0)h(0_N) = h(n_0 0_N) = h(0_N) = 0_M$$

bulunur ki, $h(N_0) \subseteq M_0$ dır.

d) $\forall n_c \in N_c$ için,

$$h(n_c)0_M = h(n_c)\, h(0_N) = h(n_c\ 0_N) = h(n_c)$$

yazılır ki buda $\forall n_c \in N_c$ için, $h(n_c) \in M_c$, yani $h(N_c) \subseteq M_c$ sonucunu verir.

e) $h : N \to M$ bir izomorfizm olmak üzere, $h^{-1} : M \to N$ bir grup izomorfizmidir. $m,n \in M$ olmak üzere,

$$h(x) = m \text{ ve } h(y) = n$$

formunda $x,y \in N$ elemanları vardır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} h^{-1}(mn) &= h^{-1}\ (h(x)\ h(y)) \\ &= h^{-1}(\ h(xy)\ ) \\ &= xy \\ &= h^{-1}\ (h(x))\ h^{-1}\ (h(y)) \\ &= h^{-1}(m)\, h^{-1}(n) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabileceğinden ispat tamamdır.

Örnek 2.4.7. N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olmak üzere, $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$\begin{aligned} h_\gamma : N &\to \Gamma \\ n &\to n\gamma \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir N-homomorfizmdir. Bu genel olarak $Hom_N(N, \Gamma)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.8. N yakın-halkasının bir M alt yakın-halkası için

$$MN \subseteq M \quad \text{ve} \quad NM \subseteq M$$

şartları sağlanıyorsa M ye N yakın-halkasının bir invaryant alt yakın-halkası denir. Burada N 'nin yönüne göre M sağ ya da sol invaryant alt yakın-halka adını alır [11].

Özellikler 2.4.9. N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olmak üzere;

i) $I \lhd_l N$ ise $N_0 \; I \subseteq I$ dır.

ii) $N = N_0$ olması için gerek ve yeter şart N yakın-halkasının her bir sol idealinin N^N nin bir N-altgrubu olmasıdır.

iii) $N = N_0$ ise Γ, N-grubunun her H ideali, Γ 'nın bir N-altgrubudur.

iv) $\forall \gamma \in \Gamma$ için, $N\gamma \leq_N \Gamma$ yani $N\gamma$, Γ N-grubunun bir N-alt grubudur.

v) Γ, N-grubunun her H N-altgrubu için $N0_\Gamma = N_c 0_\Gamma \subseteq H$ dır.

Burada $N0_\Gamma$ veya $N_c 0_\Gamma$ N-altgrubu Γ 'nin en küçük N-altgrubudur ve bu Ω ile gösterilir. Açık olarak $N = N_0$ ise $\Omega = 0_\Gamma$ dır [12].

Örnek 2.4.10. N bir yakın-halka olmak üzere N_C, N yakın-halkasının invaryant alt yakın-halkasıdır fakat ideali değildir.

Şöyle ki $\forall n \in N$ ve $n_c \in N_C$ için

$$\begin{aligned}(n\; n_c)0 &= n(n_c\; 0)\\ &= n\; n_c\end{aligned}$$

olur ki $NN_C \subseteq N_C$ dır. Benzer olarak $N_C N \subseteq N_C$ olduğu da görülebilir. Dolayısıyla N_C, N 'nin bir invaryant alt yakın-halkasıdır. (N_C,+), (N, +) nın normal alt grubu olmadığından N_C, N 'nin ne sağ ne de sol idealidir. (Γ,+) komutatif olmayan bir grup ve $\gamma, \delta \in \Gamma$ elemanları

$$\gamma + \delta \neq \delta + \gamma$$

olacak şekilde seçilsin. Şimdi, bir f_γ dönüşümü

$$\begin{aligned} f_\gamma : \Gamma &\to \Gamma \\ x &\to \gamma \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, $f_\gamma \in M_c(\Gamma)$ 'dır. $1 \in M(\Gamma)$ birim dönüşümü için;

$$(1 + f_\gamma - 1)(0_\Gamma) = 0_\Gamma + \gamma - 0_\Gamma = \gamma$$

olur ama

$$(1 + f_\gamma - 1)(\delta) = \delta + \gamma - \delta \neq \gamma$$

olduğundan

$$1+f_\gamma-1\notin M_c(\Gamma)$$

olur ki $M_c(\Gamma)$, $M(\Gamma)$'nın bir normal alt grubu değildir [11]. O halde, $M_c(\Gamma)$'nın $M(\Gamma)$'da normal olması için gerek ve yeter şart Γ'nın bir abel grubu olmasıdır.

Tanım 2.4.11. *N* bir yakın-halka olsun. *N* nin tüm sıfırdan farklı ideallerinin cümlesinde en küçük olan ideale *N*' nin minimal ideali denir [11] .

$\{0\}$ ideali, bir *N* yakın-halkasının tüm ideallerinin cümlesinde daima minimal olduğundan, aşağıdaki tanımlar halka teorisinde olduğu gibidir.

Tanım 2.4.12. *N* bir yakın-halka ve Γ bir *N*-grup olsun. *N*' nin (Γ'nın) aşikar olmayan ideali yoksa *N*' ye (Γ'ya) basittir denir. Eğer Γ'nın Ω ve Γ dışında *N*-alt grubu yoksa Γ'ya *N*-basittir denir [11].

Tanım 2.4.13. *N* bir yakın-halka, Γ bir *N*-grup, K_1 ve K_2, Γ'nın iki alt cümlesi olsun. Bu taktirde

$$(K_1 : K_2)_N = \{\, n\in N \mid nK_2 \subseteq K_1 \,\}$$

ile tanımlanır. $\gamma\in\Gamma$ için $(\{\gamma\}:K)=(\gamma:K)$ ile gösterilecektir.

$$(0_\Gamma : K)_N = \{\, n\in N \mid nK \subseteq 0_\Gamma \,\}$$

cümlesine *K* nın sıfırlayanı denir ve kısaca $(0:K)$ ile gösterilir [11].

Önerme 2.4.14. *N* bir yakın-halka, Γ bir *N*-grup olsun. Bu taktirde;

a) K_1 Γ 'nin bir alt grubu , K_2 de bir alt cümlesi ise $(K_1:K_2)_N$ cümlesi de N^N nin bir alt grubu olur. Aynı tanım K_1 in Γ 'nın normal alt grubu, *N*-alt grubu ve ideali olması durumunda da geçerlidir.

b) $\forall\gamma\in\Gamma$ için $(0:\gamma)\lhd_l N$ dir.

c) Her *K* *N*-alt grubu için $(0:K)\lhd N$ dir.

d) $K, K_i\,(i\in I)$ Γ 'nın alt cümleleri olsun. Bu taktirde

$$\bigcap_{i\in I}(K_i : K) = (\bigcap_{i\in I} K_i : K)$$

olacağından

$$\bigcup_{i\in I}(K_i : K) \subseteq (\bigcup_{i\in I} K_i : K)$$

dır.

e) $K \subseteq \Gamma$ ise,

$$(0 : K) = \bigcap_{k\in K}(0 : k)$$

şeklinde yazılır.

f) N yakın-halkasının herhangi iki Γ ve K N-grupları, N-izomorfik ise

$$(0_\Gamma : \Gamma) = (0_k : K)$$

eşitliği vardır [11].

Tanım 2.4.15. N bir yakın-halka, Γ bir N-grup olmak üzere $(0_\Gamma : \Gamma) = 0$ ise Γ'ya düzenli (faithful) N-grup denir [11].

Tanım 2.4.16. N bir yakın-halka olmak üzere eğer $\forall a,b,n \in N$ için

$$ab = 0 \text{ iken } anb = 0$$

ise, N 'ye bir IFP (araya çarpan alma özelliği) yakın-halka adı verilir.

Önerme 2.4.17. N bir yakın-halka, Γ bir düzenli N-grup olmak üzere;

a) Γ komutatif bir grup ise N yakın-halkası da komutatifdir.

b) $\forall n \in N$ ve $\forall \gamma, \delta \in \Gamma$ için,

$$n(\gamma + \delta) = n\gamma + n\delta$$

oluyorsa, bu taktirde $N = N_d$ dir.

2.5. İlkel İdealler

Tanım 2.5.1. N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olmak üzere,

a) $N\gamma = \{ n\gamma : n \in N \} = \Gamma$ olacak şekilde $\gamma \in \Gamma$ varsa Γ' ya monojenik N-grup,

b) Γ monojenik ve $\forall \; \gamma \in \Gamma$ için,

$$N\gamma = \Gamma \text{ veya } N\gamma = 0$$

oluyorsa Γ' ya kuvvetli monojenik N-grup adı veriir [11].

Burada monojenik alt grup elde etmek için Γ yerine N' nin bir alt grubu alınır. Kuvvetli monojenik bir N-grupta

$$\Omega = \{0\} \text{ veya } \Omega = \Gamma$$

eşitlikleri geçerlidir.

Önerme 2.5.2. Γ , γ_0 elemanı tarafından monojenik olan bir N-grup olmak üzere

a) Eğer $I \triangleleft_l N$ ise $I\gamma_0 \triangleleft_N \Gamma$ dir,

b) $e \in N$ bir sol birim ise bu taktirde $\forall \; \gamma \in \Gamma$ için $e\gamma = \gamma$ dir,

c) Γ düzenli bir N-grup ve $e \in N$ bir sol birim ise bu taktirde e çift yönlü birimdir.

d) Eğer Γ bir N_0-grup ve N_0-basit ise, bu durumda ya $N\Gamma = \{ 0_\Gamma \}$ ya da Γ kuvvetli monojeniktir.

e) $N^G \cong_N N/(0:\gamma_o)$ dır [11].

İspat: ***a***) Γ, γ_0 tarafından monojenik bir N-grup olduğundan,

$$N\gamma_0 = \Gamma$$

dir. $\forall \; \gamma \in \Gamma$ için,

$$\gamma = n_\gamma \gamma_0$$

şeklinde $\exists \, n_\gamma \in N$ vardır. O halde $\forall \, i\gamma_0 \in I\gamma_0$, $\forall \, n \in N$ ve $\forall \; \gamma \in \Gamma$ için,

$$\begin{aligned} n(\gamma + i\gamma_0) - n\gamma &= n(n_\gamma \gamma_0 + i\gamma_0) - nn_\gamma \gamma_0 \\ &= [n(n_\gamma + i) - nn_\gamma]\gamma_0 \in I\gamma_0 \end{aligned}$$

olur ki $I\gamma_0 \lhd_N \Gamma$ sonucuna ulaşılır.

b) Γ, γ_0 tarafından monojenik bir *N*-grup olduğundan, $\forall\ \gamma \in \Gamma$ için,

$$\gamma = n_\gamma \gamma_0$$

şeklinde $\exists\ n_\gamma \in N$ vardır. O halde $\forall\ \gamma \in \Gamma$ için

$$e\gamma = en_\gamma \gamma_0 = n_\gamma \gamma_0 = \gamma$$

yazılabileceğinden istenen elde edilir.

c) $e \in N$ sol birim olmak üzere $\forall\ \gamma \in \Gamma$ ve $\forall\ n \in N$ için

$$0_\Gamma = n\gamma - ne\gamma = (n - ne)\ \gamma$$

şeklinde yazılabilir ki Γ düzenli olduğundan,

$$n - ne \in (0_\Gamma : \Gamma) = \{0\}$$

dır. O halde

$$n - ne = 0 \Rightarrow n = ne$$

elde edilir ki e çift yönlü birimdir.

d) Γ bir N_0-grup ve N_0-basit olmak üzere, Kabul edelim ki Γ'nın $\Omega = N_0 0_\Gamma$ ve kendisinden başka N_0-alt grubu bulunmasın. $\forall\ \gamma \in \Gamma$ için, $N\gamma$ Γ' nın N_0-alt grubu olduğundan,

$$N\gamma = \Omega = N_0 0_\Gamma = \{0_\Gamma\}$$

ya da

$$N\gamma = \Gamma$$

olacağından Γ kuvvetli monojeniktir.

e)

$$\begin{aligned} f : N &\to \Gamma \\ n &\to n\gamma_o \end{aligned}$$

bir *N*-epimorfizmi olsun.

$$\begin{aligned} çek f &= \{\, n \in N \mid h(n) = 0_\Gamma \,\} \\ &= \{\, n \in N \mid n\gamma_0 = 0_\Gamma \,\} \end{aligned}$$

$$= (0_\Gamma : \gamma_0)$$

olduğundan izomorfizm teoremleri gereğince

$$N^G \cong_N N/(0 : \gamma_o)$$

dir.

Örnek 2.5.3. Γ bir grup olsun. Örnek 2.2.2. de tanımlanan Γ, $M(\Gamma)$-grubunun kuvvetli monojenik olduğunu gösterelim. $(\Gamma, +)$ grubu üzerinde

$$M(\Gamma) = \{\, h : \Gamma \rightarrow \Gamma \mid h \text{ bir fonksiyon } \}$$

cümlesi fonksiyonlardaki noktasal toplama ve bileşke işlemleri altında bir yakın-halka olduğu biliniyor. $\gamma \in \Gamma$ için,

$$M(\Gamma)\gamma = \{h \,.\, \gamma \mid h \in M(\Gamma)\} = \Gamma$$

olacağından Γ, $M(\Gamma)$-grubu kuvvetli monojeniktir.

Tanım 2.5.4. N bir yakın-halka ve Γ sıfırdan farklı bir monojenik N-grup olsun.

i) Γ 'nın 0 ve kendi dışında ideali yoksa Γ 'ya 0-tipinde [4],

ii) Γ kuvvetli monojenik N-grubun 0 ve kendi dışında ideali yoksa Γ 'ya 1-tipinde [4],

iii) Γ 'nın 0 ve kendi dışında N-alt grubu yoksa Γ'ya 2-tipinde [5],

iv) Γ 2-tipinde ve $\forall f, g \in \Gamma$ ve $\forall n \in N$ için $nf = ng$ iken $f = g$ oluyorsa Γ'ya 3-tipinde denir [13].

Örnek 2.5.5. $\Gamma = Z_4$ ve $N = M(Z_4)$ yakın-halkası olsun.

$$M_1 = \{\, h \in M_0\ (Z_4) \mid f(2) \in \{0, 2\}\}$$

cümlesi Γ 'nın 0 ve kendi dışında bir ideali olmadığından Γ 0-tipinde bir M_1-gruptur. Fakat Γ grubu kuvvetli monojenik değildir. Bundan dolayı 1-tipinde bir M_1-grup değildir [17].

1-tipinde olup 2-tipinde olmayan bir örnek verelim.

Örnek 2.5.6. $\Gamma = Z_4$ grubunu ve $N = M(Z_4)$ yakın-halkasını göz önüne alalım.

$$M_2 = \{ h \in M_0 (Z_4) \mid h(2) = 0 \}$$

olmak üzere, $\forall \gamma \in \Gamma$ için

$$M_2 \gamma = \Gamma \text{ veya } 0$$

olduğundan Γ kuvvetli monojenik bir M_2-gruptur. Ayrıca Γ 'nın 0 ve kendi dışında bir ideali olmadığından Γ 1-tipinde bir M_2-gruptur ama $\{0, 2\}$ Γ 'nın bir M_2-alt grubudur. Dolayısıyla Γ 2-tipinde bir M_2-grup değildir [17].

Önerme 2.5.7. N bir yakın-halka ve Γ sıfırdan farklı bir monojenik N-grup olsun. Bu taktirde

a) Γ 2-tipinde $\Rightarrow$ 1-tipinde $\Rightarrow$ 0-tipindedir,

b) Γ 1-tipinde veya 2-tipinde ise bu taktirde $\Omega = \{0\}$ veya $\Omega = \Gamma$ dir.

c) N sıfır-simetrik bir yakın-halka ve Γ bir üniter N-grup ise bu taktirde Γ 1-tipindedir $\Leftrightarrow$ 2-tipindedir [11].

Tanım 2.5.8. N yakın-halkasının bir I ideali için eğer $I = (0 : \Gamma)_N$ olacak şekilde v-tipinde ($v = 0,1,2,3$) bir N-grubu varsa, I 'ya Γ 'nın bir v-ilkel ideali denir. Eğer bu Γ N-grubu düzenli ise, N 'ye bir v-ilkel yakın-halka adı verilir [11].

Tanım 2.5.9. N bir yakın-halka ve $P \lhd N$ olsun. $\forall$ A, $B \lhd N$ idealleri için

$$AB \subseteq P \text{ iken } A \subseteq P \text{ veya } B \subseteq P$$

oluyorsa P idealine 0-asal ideal denir [14].

1-asal ve 2-asal ideal tanımlarını, Holcombe [4] yapmıştır. 1-tipinde N-grup tanımından yola çıkarak 3-asallığı Groenewald [7], halkalardaki asallığın yeni bir genelleştirmesi olan e-asal (equiprime) ideal kavramını ise Booth, Groenewald ve Veldsman [18] çalışmışlardır. Yakın-halkaların tam asal ideallerini de Reddy ve Murty [19] tanımlamıştır.

Tanım 2.5.10. N bir yakın-halka ve P, N 'nin bir ideali olmak üzere

a) Her A ve B, sol idealleri için $AB \subseteq P \Rightarrow A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ oluyorsa P'ye 1-asal ideal,

b) N 'nin her A ve B, N-altgrubu için $AB \subseteq P$ iken $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ oluyorsa P ye 2-asal ideal,

c) N 'nin $aNb \subseteq P$ olacak şekildeki her a,b elemanı için $a \in P$ veya $b \in P$ ise P ye 3-asal ideal[7],

d) $\forall\, n \in N$ ve $a,x,\, y \in N$ için $anx - any \in P$ iken $a \in P$ veya $x\text{-}y \in P$ ise P ye e-asal(equiprime) ideal denir [18].

Tanım 2.5.11. Bir N yakın-halkasının sıfır ideali v-asal (v = 0,1,2,3,e) ise, N 'ye v-asal yakın-halka denir [11].

Bir N yakın-halkasının bir P ideali için e-asal ise 3-asal, 3-asal ise 2-asal, 1-asal ise 0-asal, yakın-halka sıfır simetrik iken 2-asal ise 1-asal geçişleri mevcuttur fakat tersleri N 'nin sıfır-simetrik olması durumunda dahi mevcut değildir [9]. Bir e-asal yakın-halka aynı zamanda 0-simetrik ve 3-asal yakın-halkadır.

Örnek 2.5.12. $(\Gamma, +)$ bir sonlu grup ve $0 \neq K$, Γ' nın aşikar olmayan bir alt grubu olsun.

$$M_0\ (\Gamma) = \{\, h : \ \Gamma \to \ \Gamma \ \mid h(0_\Gamma) = 0_\Gamma \ \}$$

yakın-halkasını göz önüne alalım.

$$M_1\ (\Gamma) = \{\, h \in M_0\ (\Gamma) \mid h\,(K) \subseteq K \ \}$$

seçilirse $M_1(\Gamma)$, $M_0\ (\Gamma)$'nın bir alt yakın-halkası olur. $M_1(\Gamma)$'nın kendisinden ve sıfırdan farklı tek ideali:

$$I = (\, 0 : K\,)_{M_1(\Gamma)} = \{\, h \in\ M_1(\Gamma) \mid h\,K = 0\ \}$$

dır. $I^2 \neq\ 0$ olduğundan, $M_1(\Gamma)$ 0-asal yakın-halkadır. $M_1(\Gamma)$' nın kendisinden farklı tek 1-asal ideali I'dır. O halde $M_1(\Gamma)$' nın sıfır-ideali 1-asal değil, yani $M_1(\Gamma)$ 1-asal bir yakın-halka değildir [7].

Örnek 2.5.13. Klein-4-grup üzerinde, elemanları {0, 1, 2, 3} olan, $\forall x,y \in N$ için, ikinci işlemi

$$xy = \begin{cases} x & , y = 3 \\ 0 & , y \neq 3 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış bir yakın-halka N olsun. N'nin tüm sol idealleri, {0} ve N dir. $N^2 \neq 0$ olduğundan, {0} N'nin 1-asal idealidir ki N bir 1-asal yakın-halkadır.

Örnek 2.5.14. N, Klein-4-grup üzerinde, ikinci işlem tablodaki gibi verilen bir yakın-halka olmak üzere

.	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	0	0	0	2
3	1	1	1	3

N 'nin tüm N-alt grupları N ve I = {0,1} dir. $I^2 \neq \{0\}$ olduğundan, N 2-asal bir yakın-halkadır. Ama $J = \{0,2\} \triangleleft_l N$ ve $J^2 = \{0\}$ olduğundan N 1-asal bir yakın-halka değildir [6]. Bu durumun tersi genelde doğru değildir. Yani, 0-simetriklik durumu olsa dahi, bir yakın-halkada 1-asallık 2-asallığı gerektirmez.

Örnek 2.5.15. N Klein-4-grup üzerinde, elemanları {0, 1, 2, 3} olan, $\forall x,y \in N$ için, ikinci işlemi

$$xy = \begin{cases} x & , y = 3 \\ 0 & , y \neq 3 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan bir yakın-halka olsun. Örnek 2.5.13.'den N yakın-halkası 1-asaldır. I = {0,1} N'nin $I^2 = \{0\}$ olan bir N-alt grubudur. O halde N 2-asal bir yakın-halka değildir.

Bir N yakın-halkasının 2-asal ideali, aynı zamanda 3-asal ideal olmak zorunda değildir.

Örnek 2.5.16. N, $Z_3 = \{0,1,2\}$ grubu üzerinde çarpma işlemi $\forall x,y \in Z_3$ için,

$$xy = \begin{cases} x & , y = 2 \\ 0 & , y \neq 2 \end{cases}$$

ile tanımlanan bir yakın-halka olsun. Bu durumda N' nin tüm N-alt grupları sadece $\{0\}$ ve N dir. $N^2 \neq \{0\}$ olduğundan, N 2-asal bir yakın-halkadır. Fakat,

$$1N1 = \{0\}$$

olduğundan N bir 3-asal yakın-halka değildir.

Bir e-asal yakın-halkanın aynı zamanda 0-simetrik ve 3-asal olduğunu biliyoruz bunun tersinin doğru olmadığını örnekle gösterelim.

Örnek 2.5.17. $(N, +)$ mertebesi 3'e eşit veya büyük olan bir grup olsun ve N üzerinde çarpma işlemi, $\forall x,y \in N$ için,

$$xy = \begin{cases} x & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\forall x \in N$ için $x0 = 0$ olduğundan, N 0-simetrik bir yakın-halkadır. Eğer $x,y \neq 0$ ise, $xNy = \{0, x\}$

olur. Buradan $xNy = 0$ iken $x = 0$ veya $y = 0$ elde edilir. O halde N bir 3-asal yakın-halkadır. Şimdi $0 \neq x,y \in N$ ve $x \neq y$ olsun. $y_1 \in N$ için

eğer $y_1 \neq 0$ ise,

$$x\,y_1 x = x\,y_1 y = x$$

ve eğer $y_1 = 0$ ise,

$$x\,y_1 x = x\,y_1 y = 0$$

olur ki, bu durumda $\forall\, y_1 \in N$ için,

$$x\,y_1 x = x\,y_1 y$$

dir. Fakat $x \neq y$ olduğundan, N bir e-asal yakın-halka değildir.

3. BÖLÜM

REGÜLER YAKIN-HALKALARIN İNCELENMESİ

Regüler yakın-halka kavramı, özellikleri, örnekleri, teoremleri ile incelenmiş ve yakın-halkaya kattığı farklılıklara bu bölümde yer verilmiştir. Regüler yakın-halka kavramını incelerken faydalandığımız temel kaynaklar; Pilz' in kitabı ve Groenewald [6,20], Holcombe[4,5] 'nin makaleleri olmuştur.

3.1. Regüler Yakın-Halkalar

Tanım 3.1.1. Herhangi bir yakın-halka N olsun. $\forall k \in N$ için $k = kxk$ olacak şekilde $\exists\, x \in N$ varsa N yakın-halkasına regüler yakın-halka denir.

Örnek 3.1. 2. N yakın-halkasının sabit kısmı olan N_C bir regüler yakın-halkadır.
Şimdi N_C 'nin regüler yakın-halka olduğunu gösterelim;

$$N_C = \{\, k \in N \mid \forall k \in N \text{ için } k.m = k \,\}$$

olduğundan $\forall k \in N_C$ için $k = kxk$ olacak şekilde $\exists x \in N_C$ vardır. Gerçekten $\forall k \in N_C$ olduğundan $kx = k$ dır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} kxk &= k\,k \\ &= k \end{aligned}$$

olur ki N_C bir regüler yakın-halkadır.

Örnek 3.1.3. Her hangi bir grup $(N,+)$ olsun. "$*$" işlemi aşağıdaki şekilde tanımlarsa,

$$k * m = \begin{cases} k, & m \neq 0 \\ 0, & m = 0 \end{cases}$$

$(N, +, *)$ üçlüsü bir yakın-halka olur ve $\forall k\in N$ için $k = kxk$ olacak şekilde $x\in N$ vardır. Şöyle ki ;

$x \neq 0$ seçersek

$$k = k * x * k = \begin{cases} k = 0, k * k = 0 \Rightarrow k = k * k \\ k \neq 0, k * k = k \Rightarrow k = k * k \end{cases}$$

olur ki $\exists\ x\in N$ bulunur.

$x = 0$ seçersek

$$k = k * x * k = 0 * k = 0$$

olur. Dolayısıyla N bir regüler yakın-halkadır.

Örnek 3.1.4. N yakın-halkası eğer tamlık yakın-halka ise aynı zamanda regüler yakın-halkadır. Eğer tamlık durumu varsa $\forall k\in N$ için $k = xk^2$ olacak şekilde $x\in N$ vardır.

$$\begin{aligned}(k - kxk)k &= k^2 - kxk^2 \\ &= k^2 - kk \\ &= k^2 - k^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir ki $(k - kxk)k = 0$ ise tamlık yakın-halka gereği

ya $k = 0$ ya da $k - kxk = 0$

dır. $\forall k\in N$ için $k = 0$ olamayacağından

$$k - kxk = 0$$

olur ki bu N nin regüler yakın-halka olması anlamına gelir.

Tanım 3.1.5. N regüler yakın-halkasında, $\forall k\in N$ için $k = kxk$ şartını sağlayan x elemanına, k nın regüler bileşeni denir. Ayrıca $k = kxk$ yazılışında "xk" elemanına k için özel sağ birim, "kx" elemanına da benzer olarak özel sol birim adı verilir.

Önerme 3.1.6. x, k nın regüler bileşeni olmak üzere N regüler yakın-halkasında;

i) xk idempotentdir

ii) kx idempotentdir.

İspat: ***i)*** $(xk)^2 = xk$ olduğunu göstermeliyiz.

$$(xk)^2 = (xk)(xk) \ (\forall k \in N \text{ için } k = kxk \text{ olduğundan})$$

$$(xk)^2 = x(kxk) = xk$$

olacağından xk idempotentdir. Benzer olarak kx elemanınında idempotent olduğu gösterilebilir.

Teorem 3.1.7. N sağ değişmeli bir regüler yakın-halka ve m ve n, x in regüler bileşenleri ise

$$xm = xn$$

dir.

İspat: N sağ değişmeli, regüler yakın-halka ve m ve n, x in regüler bileşenleri olmak üzere

$$\begin{aligned} xm &= xnxm \\ &= xxnm \\ &= xxmn \\ &= xmxn \\ &= xn \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.1.8. N sağ değişmeli bir regüler yakın-halka ve m, x in regüler bileşeni ise

$$mx = x .$$

İspat: N sağ değişmeli, regüler yakın-halka ve m, x in regüler bileşeni olsun.

$$\begin{aligned} mx &= mmx \\ &= mxm \\ &= x \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.1.9. N birimli yakın-halkası regülerdir ancak ve ancak $\forall k \in N$ için

$$N.k = N.e$$

olacak şekilde $\exists\ e = e^2 \in N$ idempotent elemanı vardır.

İspat (⇒): N birimli yakın-halkası regüler olmak üzere $N.k = N.e$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun içinde birbirinin alt cümlesi olduğunu göstermek gerekir. İlk olarak $N.e \subseteq N.k$ olduğunu gösterelim. Önerme 3.1.6. den xk idempotent olduğundan $e = xk$ olmak üzere; $\forall n \in N$ için $ne = nxk$ olur ki $nx \in N$ olduğundan $ne \in Nk$ dır. Dolayısıyla $Ne \subseteq Nk$ olduğu gösterilmiş olur. Benzer olarak $Nk \subseteq Ne$ olduğu da gösterilebilir ki $Nk = Ne$ dir.

(⇐): N birimli yakın-halkasında $\forall k \in N$ için $Nk = Ne$ olacak şekilde $\exists\ e = e^2 \in N$ idempotenti mevcut olsun. N nin regüler olduğunu göstermeliyiz. $e = e^2$ olduğundan $e \in Ne$ olur ki $Nk = Ne$ kabulünden $e \in N.k$ dır. O halde

$$e = xk \qquad (1)$$

olacak şekilde $\exists\ x \in N$ vardır. Diğer taraftan N birimli olduğundan

$$\forall k \in N \text{ için } \qquad k = 1_N k$$

şeklinde yazılabileceğinden $k \in Nk$ dır. Böylece $Nk = Ne$ olduğundan $k \in Ne$ olur ki

$$k = ne \qquad (2)$$

olacak şekilde $n \in N$ vardır. O halde $\forall k \in N$ için

$$\begin{aligned} k &= ne \text{ ((2) den)} \\ &= nee \text{ (} e = e^2 \text{ olduğundan)} \\ &= ke \text{ ((2) den)} \\ &= kxk \text{ ((1) den)} \end{aligned}$$

olur ki N regüler yakın-halkadır.

3.2. Kuvvetli Regüler Yakın-Halkaların İncelenmesi

Kuvvetli regüler yakın-halkalar kavramı daha da genel olması bakımından regüler yakın-halkaların uygulama alanlarından biridir. Ayrıca kuvvetli regüler yakın-halkalar kavramı yakın-halkaların çok yaygın ve kullanışlı konularından birisidir.

Teorem 3.2.1. N sıfır-simetrik bir yakın-halka ve N nin tek nilpotent elemanı 0 olmak üzere;

a) $\forall k,m\in N$ için $m.k = 0$ ise $k.m = 0$,

b) N, *IFP* yakın-halkadır,

c) Her e idempotenti için $x\in N$ olmak üzere $exe = ex$,

d) Her dağılmalı idempotent merkezildir.

e) N birimli yakın-halka ise tüm idempotentleri merkezildir.

İspat: ***a)*** $\forall k,m\in N$ için $mk = 0$ olduğunu kabul edelim

$$(k.m)^2 = k\,m\,k\,m = k0m = k0 = 0$$

$(k.m)^2 = 0$ olur ki tek nilpotent eleman sıfır olduğundan $km = 0$ dır.

b) $\forall k,m\in N$ için $mk = 0$ olsun . Burada $\forall x\in N$ için $mxk = 0$ olursa N nin *IFP* olduğunu gösterilmiş demektir.

$$\begin{aligned}(m.x.k)^2 &= m.x.k.m.x.k \text{ ((a) şıkkından)}\\ &= mx\,0\,xk\\ &= mx\,0 \text{ (Sıfır simetrik olduğundan)}\\ &= 0\end{aligned}$$

olur. Burada sıfırdan başka nilpotent eleman olmadığından $\forall x\in N$ için $mxk = 0$ olacağından dolayı N yakın-halkası *IFP* yakın-halkadır.

c) Her e idempotenti için $x\in N$ olmak üzere $exe = ex$ olduğunu göstermek için

$$(ex - exe)^2 = 0$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}(ex - exe)^2 &= (ex - exe)(ex - exe)\\ &= ex(ex - exe) - exe(ex - exe)\end{aligned}$$

bu iki toplamın sırasıyla sıfır olduğunu gösterelim;

$$\begin{aligned}e(ex - exe) &= (ex - exe)e\\ &= exe - exe \text{ ((a) şıkkından)}\\ &= 0\end{aligned}$$

olacağından $e(ex - exe) = 0$ ise (b) şıkkında $\forall x\in N$ için

$$m.x.k = 0$$

olması gerektiğinden; $\forall x \in N$ için,

$$ex\,(ex - exe) = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde $\forall e \in N$ için de

$$exe\,(ex - exe) = 0$$

olur ki bu ise

$$(ex - exe)^2 = ex\,(ex - exe) - exe(ex - exe)$$
$$= 0 - 0 = 0$$

olduğundan

$$exe = ex$$

elde edilir.

d) Her dağılmalı idempotentin merkezil olduğunu gösterelim. $e \in N_d$ ve $\forall x \in N$ için

$$ex = xe$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$e\,(xe - exe) = exe - exe = 0$$
$$\Leftrightarrow e\,(xe - exe) = (xe - exe)e = 0 \text{ ((a) dan)}$$
$$\Leftrightarrow xe - exe = 0$$
$$\Leftrightarrow xe = exe$$
$$\Leftrightarrow xe = exe = ex \text{ ((c) den)}$$
$$\Leftrightarrow xe = ex$$

e) N birimli bir yakın-halkanın tüm idempotentlerinin merkezil olduğunu gösterelim. N nin "1_N" gibi bir birim elemana sahip olduğunu kabul edelim ve idempotent eleman da "e" de olmak üzere

$$(1_N - e)\,e = e - e = 0$$

olduğundan $(1_N - e)\,e = 0$ iken $\forall x \in N$ için

$$(1_N - e)\,x\,e = 0$$

olur ki

$$(1_N - e)\,x\,e = x\,e - exe = 0$$

$$x\,e = e\,x\,e$$

elde edilir. Her *"e"* idempotenti için $x\,e = e\,x$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $x\,e = e\,x\,e$ olduğundan $e\,x = e\,x\,e$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$(\,ex - exe\,)^2 = (\,ex - exe\,).(ex - exe)$$

$$(\,ex - exe\,)^2 = 0$$

olur ki tek nilpotent eleman sıfır olduğundan $(\,ex - exe\,)^2 = 0$ ise

$$(\,ex - exe) = 0$$

olacağından $e\,x = e\,x\,e$ elde edilir. Dolayısıyla

$$x\,e = e\,x\,e = e\,x \Rightarrow x\,e = e\,x$$

dir.

Sonuç 3.2.2. N sıfırdan farklı, birimli ve regüler yakın-halka ise;

i) N sıfır-simerik ise 0 dan başka nilpotent elemanı yoktur.

ii) N nin tüm idempotentleri merkezildir.

iii) N yakın-cisimlerin alt direkt toplamıdır.

Tanım 3.2.3. Sonuç 3.2.2. de ki denk şartlardan birini sağlayan yakın-halkaya kuvvetli regüler yakın-halka denir.

Önerme 3.2.4. Bir N tamlık yakın-halkasında her sıfırdan farklı idempotent eleman aynı zamanda bir sağ birimdir.

İspat : Kabul edelim ki sıfırdan farklı bir idempotent eleman "*e*" olsun. $\forall x \in N$ için

$$xe = x$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$(xe - x)\,e = x\,e - x\,e = 0$$

$$(xe - x)\,e = 0$$

N tamlık yakın-halkası olduğundan ya "*xe – x*" ya da "*e*" sıfır olmalıdır. "*e*" sıfırdan farklı olduğundan

$$xe - x = 0$$

olur ki

$$xe = x$$

elde edilir.

Önerme 3.2.5. Bir N regüler tamlık yakın-halkası için her sıfırdan farklı idempotent elemanı

$$ex = exe$$

eşitliğini sağlar.

Teorem 3.2.6. Her sabit yakın-halka için tek nilpotent eleman sıfırdır.

İspat: N sabit yakın-halka ve $a \in N$ sıfırdan farklı bir nilpotent eleman olsun. Dolayısıyla

$$a^k = 0$$

olacak şekilde en küçük $\exists k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. $N_C = \{ k \in N \mid \forall m \in N \text{ için } k.m = k \}$ sabit yakın-halka olduğundan

$$a^k = aa...a = a\,a^{k-1} = 0$$

ve $a^{k-1} = n$ seçersek

$$an = 0$$

olacağından

$$a = 0$$

olur ki bu ise çelişkidir. O halde tek nilpotent eleman sıfırdır.

Sonuçta her tamlık yakın-halkasının tek nilpotent elemanı sıfırdır.

Teorem 3.2.7. N tamlık yakın-halkası sıfır simetrik değil ise sabit yakın-halkadır.

İspat: N tamlık yakın-halkası sıfır simetrik değilse $\exists x \in N$ için $x0 \neq 0$ dır. O halde $\forall k \in N$ için

$$(kx0 - k)\, x0 = kx0 - kx0 = 0$$

olur ki N tamlık yakın-halkası ve $x0 \neq 0$ olduğundan

$$kx0 - k = 0$$

$$kx0 = k$$

elde edilir. *N* nin sabit yakın-halka olduğunu göstermek için $k0 = k$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} k0 &= kx00 \\ &= kx0 \\ &= k \end{aligned}$$

olur ki bu da *N* nin sabit yakın-halka olması demektir.

Teorem 3.2.8. *N* birimli ve sağ değişmeli bir yakın-halka ise bu taktirde

a) *N* sıfır simetriktir,

b) *N* nin her *N*-altgrubu sol idealdir,

c) *N* nin her *N*-altgrubu idealdir [23].

İspat: ***a)*** *N* birimli ve sağ değişmeli bir yakın-halka olmak üzere sıfır simetrik olması için $\forall k \in N$ için $k\,0 = 0$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} k0 &= 1.k0 \\ &= 1.0\,k \\ &= 0.\,k \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur ki *N* sıfır simetriktir.

b) *N* bir yakın-halka ve Γ bir *N*-grup olsun. Γ ' nın

$$NH \subseteq H$$

şartını sağlayan bir *H* alt grubuna Γ 'nın bir *N*-alt grubu dendiğini biliyoruz. Sol ideal olduğunu göstermek için

$$NI \subseteq I$$

olduğunu göstermeliyiz. $\forall k,m \in N$ ve $\forall i \in I$ için

$$m\,(\,k + i\,) - mk \in I$$

olmalı. $k = 0$ için de sağlaması gerekir

$$m\,(\,0 + i\,) - m0 \;= mi$$

olur ki $mi \in I$ olacağından eşiti de *I* nın elemanıdır. Bu ise *I* nın sol ideal olmasıdır.

c) Sol ideal olduğunu gösterdik, şimdi de sağ ideal olduğunu, yani;

$$IN \subseteq I$$

olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur. $NI \subseteq I$ olduğundan $mi \in I$ olur ki

$$\begin{aligned} mi &= 1.mi \\ &= 1.i\,m \\ &= i\,m \in I \end{aligned}$$

olduğundan I bir idealdir.

KAYNAKLAR

1. Dickson, L. E., Definitions of a Group and a Field by Independent Postulates, Trans. Amer. Math. Soc., 6, 198-204, 1905.
2. Zassenhaus, H., Ober Endliche Fastkörper, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, II, 187-220, 1935.
3. Kaarli, K., Prime radical of Near-rings, Tartu Riikl Ül. Toiemetised, 764, 23-29, 1987.
4. Holcombe, W.L.M., Primitive Near-rings, Doctoral Dissertation, University of Leeds, 1970.
5. Holcombe, W. L. M., A Hereditary Radical For Near-rings, Studia Sci. Hungar., 17, 453-456, 1982.
6. Groenewald, N. J., Olivier, W. A., On Regularities in Near-rings, Acta Math. Hungar., 74, 177-190, 1997.
7. Groenewald, N. J., Different Prime Ideals in Near-rings, Comm. Algebra, 19(10), 2667-2675, 1991.
8. Pilz, G., Near-rings, 2nd ed., Amsterdam, New York, Oxford, North-Holland, 1983.
9. Booth, G. L., Groenewald, N. J., Different Prime Ideals in Near-rings II, Rings and Radicals (B. J. Gardner, Liu Shaoxue, R. Wiegandt (eds.)), Shijiazhaung 1994, Pitman Res. Notes Math., 346, 131-139, 1996.
10. Clay, J. R., Near-rings Geneses and Applications, Oxford, New York, Tokyo, 1992.
11. Birkenmeier, G., et al., Prime Ideals and Prime Radicals in Near-rings, Mh. Math., 117, 179-197, 1994.
12. Fain, C. G., Some Structure Theorems for Near-rings, Doctoral Dissertation, University of Oklohama, 1968.
13. Booth, G. L., Groenewald, N. J., Equiprime Left Ideals and Equiprime N-groups of a Near-ring, Contributions to General Algebra, 8, 25-38, 1992.
14. Beidleman, J. C., On The Theory of Radicals in d.g. Near-rings I The Primitive Radical, Math. Ann., 173, 89-101, 1967.
15. Birkenmeier, G., et al., Prime Ideals in Near-rings, Results Math., 24, 27-48, 1993.

16. Laxton, R. R., Machin, A. W., On The Decomposition of Near-rings, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 38, 221-230, 1972.
17. Betsch, G., Struktursätze für Fastringe, Diss. Üniv. Tübingen, 1963.
18. Booth, G. L., et al., A Kurosh-Amitsur Prime Radical for Near-rings, Comm. Algebra, 18, 3111-3122, 1990.
19. Reddy, Y. V., Murty, C. V. L. N., Semi-symmetric Ideals in Near-rings, Indian J. Pure and Appl. Math., 16, 17-21, 1985.
20. Groenewald, N. J., Prime Near-rings and Special Radicals, East-West J. of Math., 3(2), 147-162, 2001.
21. Van der Walt, A. P. J., Prime Ideals and Nil Radicals in Near-rings, Arch. Math., 15, 408-414, 1964.
22. Atagün, A. O., Aygün, E., Yakın-halkaların Farklı Asal İdealleri ve Direkt Toplananlar, E. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 21, 54-61, 2005.
23. Aygün, E., Altındiş, H., Kuvvetli Kalıtsal Radikaller, XIX. Ulusal Matematik Sempozyumu, Ağustos 22-25, 2006.
24. Aygün, E., Atagün, A. O., Yakın-halkalar için bir kuvvetli kalıtsal radikal, E. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 22(1-2), 179-183, 2006.
25. Ramakotaiah, D., Rao, G. K., On IFP Near-rings, J. Austral. Math. Soc., 27, 365-370, 1979.

ÖZGEÇMİŞ

Serap ŞENER, 25.03.1982 tarihinde Kayseri de doğdu. İlk ve Orta öğrenimini Kayseri'de tamamladı. 2000 yılında Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı ve 2004 yılında lisans öğrenimini tamamladı. 2004 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Öğretmenliği Programında Tezsiz Yüksek Lisans yaptı. Yine 2004 yılında Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı.

Adres: Belsin Beyazşehir
Küme Evler Tınaztepe Mah.
Kartal Apt. Kat 1 No: 60/8
38070 Melikgazi / KAYSERİ

İletişim: 0 352 3269381
E-mail: serapsener38@hotmail.com