T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ MUTLAK CESÀRO TOPLANABİLME

Hazırlayan
Nazlı ERTEN

Danışman
Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

Yüksek Lisans Tezi

Ağustos 2017
KAYSERİ

T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ MUTLAK CESÀRO TOPLANABİLME

Hazırlayan
Nazlı ERTEN

Danışman
Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

Yüksek Lisans Tezi

Ağustos 2017
KAYSERİ

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Tezi Hazırlayan

Nazlı ERTEN

“Genelleştirilmiş Mutlak Cesàro Toplanabilme” adlı Yüksek Lisans tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi’ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan
Nazlı ERTEN

Danışman
Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

Matematik ABD Başkanı
Prof. Dr. Fuat GÜRCAN

Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN danışmanlığında **Nazlı ERTEN** tarafından hazırlanan **"Genelleştirilmiş Mutlak Cesàro Toplanabilme"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

22/08/2017

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

Üye : Doç. Dr. Sezer SORGUN

Üye : Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 14/09/2017 tarih ve 2017/38-33 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

14/09/2017

Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Mehmet AKKURT

TEŞEKKÜR

Tezimin konusunun belirlenmesinde, araştırma aşamasında, yön tayininde ve tamamlanmasında destek olan değerli hocam ve tez danışmanım sayın **Prof. Dr.Hikmet ÖZARSLAN**'a bana ayırdığı değerli zaman ve bana sağladığı destek için kendisine minnettarım. Ayrıca tezimin hazırlanma sürecinde benden yardımlarını esirgemeyen aileme sonsuz şükranlarımı sunarım.

Nazlı ERTEN

Kayseri, Ağustos 2017

GENELLEŞTİRİLMİŞ MUTLAK CESÀRO TOPLANABİLME

Nazlı ERTEN
Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Ağustos 2017
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, bu çalışma boyunca kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, sonsuz serilerin $|C,1|_k$ toplanabilmesi ile ilgili verilen teoremin $\varphi-|C,1|_k$ ve $\varphi-|C,\alpha|_k$ genellemesini veren teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

Üçüncü bölümde, hemen hemen artan diziler ile ilgili teoremlere yer verilmiştir. $\varphi-|C,1|_k$ ve $|C,\alpha;\delta|_k$ toplanabilme ile ilgili teoremlerde pozitif azalmayan dizi yerine hemen hemen artan dizi alınarak $\varphi-|C,\alpha|_k$ toplanabilme ile ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

Dördüncü bölümde, yarı β-kuvvetli artan diziler ile ilgili teoremlere yer verilmiştir. $\varphi-|C,1|_k$ ve $|C,\alpha;\delta|_k$ toplanabilme ile ilgili teoremlerde pozitif azalmayan dizi yerine yarı β-kuvvetli artan dizi alınarak $\varphi-|C,\alpha|_k$ toplanabilme ile ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

Son olarak beşinci bölümde, yapılan çalışmalarla ilgili sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Riesz ortalaması, Mutlak toplanabilme, Toplanabilme çarpanı, Minkowski eşitsizliği, Hölder eşitsizliği, Sonsuz seriler.

GENERALIZED ABSOLUTE CESÀRO SUMMABILITY

Nazlı ERTEN
Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M.Sc. Thesis, August 2017
Thesis Supervisor: Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

ABSTRACT

This thesis contains five parts.

In first chapter, basic definitions and theorems used during this study have been given.

In second chapter, theorems giving of $\varphi-|C,1|_k$ and $\varphi-|C,\alpha|_k$ generalization of the theorem which is giving about $|C,1|_k$ summable of infinite series have been expressed and proved.

In third chapter, it has been given place to the theorems which are about almost increasing sequences. Theorems about $\varphi-|C,\alpha|_k$ summability has been expressed and proved operating almost increasing sequences in place of positive non-decreasing sequence in theorems about $\varphi-|C,1|_k$ and $|C,\alpha;\delta|_k$ summability.

In fourth chapter, it has been given place to the theorems which are about quasi β-power increasing sequences. Theorems about $\varphi-|C,\alpha|_k$ summability has been expressed and proved operating quasi β-power increaing sequence in place of positive non-decreasing sequence in theorems about $\varphi-|C,1|_k$ and $|C,\alpha;\delta|_k$ summability.

Finally, in fifth chapter, the results about the studies which have been done are given.

Keywords: Riesz mean, Absolute summability, Summability factor, Minkowski inequality, Hölder inequality, Infinite series.

İÇİNDEKİLER

GENELLEŞTİRİLMİŞ MUTLAK CESÀRO TOPLANABİLME

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK SAYFASI…… ..i
YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI…….ii
KABUL VE ONAY……iii
TEŞEKKÜR……iv
ÖZET……v
ABSTRACT……vi
İÇİNDEKİLER……vii
SEMBOLLER LİSTESİ……...ix

GİRİŞ……**1**

1. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

1.1. Temel Tanım ve Teoremler……...……4

2.BÖLÜM

SONSUZ SERİLERİN $\varphi-|C,1|_k$ ve $\varphi-|C,\alpha|_k$ TOPLANABİLMESİ İLE İLGİLİ TEOREMLER

2.1. $\sum a_n\rho_n$ Serisinin $\varphi-|C,1|_k$ Toplanabilmesi İle İlgili Teorem……12

2.2. $\sum a_n\rho_n$ Serisinin $\varphi-|C,\alpha|_k$ Toplanabilmesi İle İlgili Teorem……..15

3.BÖLÜM

SONSUZ SERİLERİN HEMEN HEMEN ARTAN DİZİLER ÜZERİNE UYGULAMALARI

3.1. Hemen Hemen Artan Diziler İle İlgili Teoremler……18

4.BÖLÜM

SONSUZ SERİLERİN YARI β-KUVVETLİ ARTAN DİZİLER ÜZERİNE UYGULAMALARI

4.1. Yarı β-Kuvvetli Artan Diziler İle İlgili Teoremler……25

5.BÖLÜM

TARTIŞMA-SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1. Tartışma-Sonuç ve Öneriler……..31

KAYNAKLAR……..33

ÖZGEÇMİŞ……...35

SEMBOLLER LİSTESİ

Sembol	**Anlamı**
$\sum a_n$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sonsuz serisi
(s_n)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sonsuz serisinin kısmi toplamlar dizisi
$s_n = O(1)$	(s_n) dizisi sınırlı
Δt_n	Herhangi bir (t_n) dizisi için $t_n - t_{n+1}$
BV	Sınırlı salınımlı dizilerin uzayı

GİRİŞ

Iraksak seriler matematikçiler tarafından 17. ve 18. yüzyılda kullanılmıştır. 17. yüzyıl öncesinde matematikçilerin ıraksak seriler ile ilgili çalışmaları olmakla beraber ıraksak serileri sistematik olarak kullanan ilk matematikçiler Newton ve Leibnitz olmuştur.
17. yüzyılın sonlarına doğru ıraksak seriler hakkında yapılan ilk tartışma Grandi tarafından $1-1+1-1+...$ sonsuz serisinin ortaya atılmasıyla başlamıştır. Grandi, 1703 yılında

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-...$$

serisinde $x=1$ alarak

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+...$$

sonucunu elde etmiştir

17. yüzyılda Bernoulli, ıraksak serilere sezgisel argümanlarla değer atamıştır. Örneğin $\sum(-1)^k$ serisine $\frac{1}{2}$ değerini atamıştır. 18. yüzyıl matematikçileri ise yakınsak seri kavramı ile ilgilenmiş ve ıraksak serilerin tam bir değerinin olamayacağını söylemişlerdir. 19. yüzyıl başlarında yakınsak sonsuz seriler üzerinde çalışmalar devam etmiş ve Cauchy 1821 yılında yazdığı ***'Algebric Analysis'*** isimli kitabında serilerin yakınsaklığını formülize etmiştir. 1880 de Frobenius, 1882 de Hölder ıraksak seriler ile ilgili tanımlamalar yapmışlardır. 1890 yılında ise Cesàro serilerin çarpımı ile ilgili Hardy nin ***'Divergent Series'*** [1] adlı kitabında yaptığı çalışma ile ıraksak serilere çeşitli metotlar yardımı ile toplanabilmenin temelini atan ilk matematikçi olmuştur.

Herhangi bir $\sum a_k$ serisi verilsin. Bu serinin kısmi toplamlar dizisi $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ şeklinde ifade edilsin. Eğer kısmi toplamlar dizisi bir limit değerine sahipse yani eğer $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ ise, $\sum a_k$ serisinin yakınsak olduğu ve s toplamına eşit olduğu söylenebilir. Eğer kısmi toplamlar dizisinin limiti mevcut değilse bu serinin ıraksak olduğu söylenebilir.

Iraksak seriler, belirli ıraksak seriler ve belirsiz ıraksak seriler olmak üzere iki ana gruba ayrılır. Belirli ıraksak seriler $\sum a_k = \pm\infty$ biçimindeki serilerdir, belirsiz ıraksak seriler ise (s_n) kısmi toplamlar dizisinin birden fazla yığılma noktasına sahip olduğu dizilerdir ve bu özellikteki dizilere salınım yapan diziler denir.

Toplanabilme teorisinde amaç, belirsiz ıraksak serilere en iyi bir değer karşılık getirmektir. Bu değerleri bulmak için çeşitli toplanabilme metotları tanımlanmıştır. Bu metotlardan bazıları Cesàro, Nörlund, Riesz, Hausdorff, Euler, Borel ve daha genel olan matris metotlarıdır. Ayrıca toplanabilme metotlarının sağlaması gereken bazı şartlar vardır. Bu şartlar;

i) Regülerlik: Bir toplanabilme metodu yakınsak bir seriyi yine serinin yakınsadığı değere toplamalıdır.
ii) Genişletme: Bir toplanabilme metodu belirsiz anlamda ıraksak serilerden en az birisini toplamalıdır.
iii) Tutarlılık: İki farklı toplanabilme metodu belirsiz ıraksak bir seriye uygulandığında seriye aynı sayıyı karşılık getirmelidirler.

Cesàro metodu ıraksak serilerin toplamında yaygın olarak kullanılan metotlardan biridir. $\sum a_k$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olan (s_n) dizisinin Cesàro ortalama dizisi (z_n) olmak üzere eğer $z_n \to s$ $(n\to\infty)$ ise $\sum a_k$ serisi s değerine değerine Cesàro toplanabilirdir denir. Örneğin $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ serisini ele alalım. Bu seri ıraksak olduğundan karşılık geldiği bir değer yoktur, ancak bu serinin kısmi toplamlar dizisi olan (s_n) dizisinin Cesàro ortalama dizisi (z_n), $\frac{1}{2}$ değerine yakınsaktır.

1957 yılında Flett [2] tarafından $\alpha-$ıncı mertebeden Cesàro toplanabilirlik kavramı verildikten sonra, 1969 yılında Das [3] tarafından mutlak toplanabilirlik kavramı verilmiştir. Daha sonra 1970 yılında Kishore ve Hotta [4], toplanabilme çarpanı kavramını tanımlamışlardır.

Bu tezde amacımız toplanabilme teorisinde oldukça yakın bir zamanda kullanılmaya başlanan hemen hemen artan dizi tanımından yola çıkarak literatür taraması sonucunda elde edilen çeşitli makaleleri incelemektir. Buna ek olarak hemen hemen artan dizi yerine yarı β-kuvvetli artan dizi kavramını kullanarak sonsuz serilerin Cesàro toplanabilirliğini araştırmaktır.

1. BÖLÜM
TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, sonsuz serilerin mutlak toplanabilmesi ile ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir.

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1. F kompleks veya reel sayıların bir cismi ve $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olsun. $n,k=1,2,...$ için $a_{nk}\in F$ olmak üzere $A=(a_{nk})$ sonsuz matrisi verilsin. Bu halde (s_n) dizisinden (σ_n) dizisine bir dönüşüm

$$\sigma_n=\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}s_k \tag{1.1}$$

şeklinde verilsin. (σ_n) dizisi, (s_n) dizisinin A-dönüşüm dizisi ve A da diziden diziye bir dönüşümdür. Bu dönüşümün tanımlanabilmesi için (1.1) deki toplamın $\forall n\in N$ için yakınsak olması gerekir [5].

Tanım 1.1.2. Bir $A=(a_{nk}),\quad n,k=1,2,...$ matrisi verilsin. A matrisi yardımıyla oluşturulan dönüşüm yakınsak olan her diziyi yine yakınsak bir diziye dönüştürüyor ve aynı zamanda limiti de koruyorsa, A matrisine regülerdir denir [6].

Aşağıdaki teorem, verilen bir A matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şartları verir.

Teorem 1.1.1 (Silverman-Teoplitz Teoremi).

Bir $A=(a_{nk}),\ n,k=1,2,...$ matrisi regülerdir $\Leftrightarrow$

$$(i)\quad \forall k \quad \text{için} \quad \lim_{n\to\infty}a_{nk}=0$$

$$\text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}=1 \tag{1.2}$$

$$(iii)\ \forall\ n \ \text{ için } \ \sum_{k=0}^{\infty}|a_{nk}| \le M$$

olacak şekilde n den bağımsız bir M pozitif reel sayısı vardır [7].

Tanım 1.1.3. $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olsun. Ayrıca (s_n) dizisinin $A=(a_{nk})$ matrisi yardımıyla oluşturulan (σ_n) dönüşüm dizisi, (1.1) deki şekilde tanımlansın. Eğer $\lim_{n\to\infty} t_n = s$ ise, $\sum a_n$ serisine veya (s_n) dizisine s değerine A toplanabilirdir denir [7].

Tanım 1.1.4. $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olsun. (s_n) dizisinin $A=(a_{nk})$ matrisi yardımıyla verilen (σ_n) dönüşüm dizisi, (1.1) deki gibi tanımlansın. Eğer $(\sigma_n)\in BV$ ise, $\sum a_n$ serisi veya (s_n) dizisi mutlak A toplanabilirdir ve bu durum $\sum a_n \in |A|$ veya $(s_n)\in |A|$ şeklinde gösterilir [3].

Tanım 1.1.5. $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olsun. $\sum a_n$ serisinin veya (s_n) dizisinin matris elemanları

$$a_{nv} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}, & v \le n \ \text{ için} \\ 0, & v > n \ \text{ için} \end{cases} \qquad (1.3)$$

ile verilen $A=(a_{nv})$ matrisi yardımıyla elde edilen (z_n) dönüşüm dizisi

$$z_n = \frac{1}{n+1}\sum_{v=0}^{n} s_v \qquad (1.4)$$

olarak tanımlansın.

Bu şekilde tanımlanan ortalamaya Cesàro ortalaması veya kısaca $(C,1)$ ortalaması denir. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} z_n = s$$

ise, $\sum a_n$ serisi s değerine $(C,1)$ toplanabilirdir denir [7].

Tanım 1.1.6. (z_n), (1.4) deki gibi tanımlanmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n - z_{n-1}| < \infty \tag{1.5}$$

ise, $\sum a_n$ serisi $|C,1|$ toplanabilirdir denir [8].

Tanım 1.1.7. $k \geq 1$ ve (z_n), (1.4) deki gibi tanımlanmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}|z_n - z_{n-1}|^k < \infty \tag{1.6}$$

ise, $\sum a_n$ serisi $|C,1|_k$ toplanabilirdir denir [2].

Burada $t_n = n(z_n - z_{n-1})$ olduğundan (1.6) şartı

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|t_n|^k < \infty$$

şeklinde de yazılabilir.

Ayrıca (1.6) da $k=1$ alınırsa $|C,1|$ toplanabilme elde edilir.

Tanım 1.1.8. (φ_n) pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. k≥1 ve (t_n) dizisi (na_n) dizisinin 1. mertebeden Cesàro ortalamasını göstersin. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^k}|t_n|^k < \infty \tag{1.7}$$

ise, $\sum a_n$ serisi φ-$|C,1|_k$ toplanabilirdir denir [9].

Tanım 1.1.9. (s_n), $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olsun. $\alpha \geq -1$ olmak üzere d_n^{α} ve h_n^{α} sırasıyla (s_n) ve (na_n) dizilerinin α-ıncı mertebeden Cesàro ortalamasını göstersinler. Yani

$$d_n^{\alpha} = \frac{1}{A_n^{\alpha}}\sum_{v=0}^{n}A_{n-v}^{\alpha-1}s_v \tag{1.8}$$

$$h_n^{\alpha} = \frac{1}{A_n^{\alpha}}\sum_{v=1}^{n}A_{n-v}^{\alpha-1}va_v \tag{1.9}$$

olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} d_n^{\alpha} = s$$

ise, $\sum a_n$ serisi s değerine (C,α) toplanabilirdir denir. Burada

$$A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} = O(n^\alpha), \qquad A_0^\alpha = 1 \tag{1.10}$$

$n > 0$ için $\quad A_{-n}^\alpha = 0$

dır [10].

Tanım 1.1.10. (d_n^α), (1.8) de ki gibi tanımlanmak üzere, eğer $\alpha > -1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| d_n^\alpha - d_{n-1}^\alpha \right| < \infty \tag{1.11}$$

İse, $\sum a_n$ serisine $|C,\alpha|$ toplanabilirdir denir [8].

Tanım 1.1.11. $k \geq 1$ ve (d_n^α), (1.8) deki gibi tanımlanmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \left| d_n^\alpha - d_{n-1}^\alpha \right|^k < \infty \tag{1.12}$$

ise, $\sum a_n$ serisi $|C,\alpha|_k$ toplanabilirdir denir [2].

Burada $h_n^\alpha = n(d_n^\alpha - d_{n-1}^\alpha)$ olduğundan (1.12) şartı

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left| h_n^\alpha \right|^k < \infty \tag{1.13}$$

şeklinde de yazılabilir.

Tanım 1.1.12. k≥1, α>-1 ve $\delta \geq 0$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\delta k-1} \left| h_n^\alpha \right|^k < \infty$$

ise, bu taktirde $\sum a_n$ serisi $|C,\alpha;\delta|_k$ toplanabilirdir denir [11].

Tanım 1.1.13. k≥1 ve $\alpha > -1$ ve olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{k-1} n^{-k} \left| h_n^\alpha \right|^k < \infty \tag{1.14}$$

ise, bu taktirde $\sum a_n$ serisi $\varphi - |C,\alpha|_k$ toplanabilirdir denir [9].

Tanım 1.1.14. *A* ve *B* iki toplanabilme metodu olsun. *A* toplanabilen bir dizi aynı değere *B* toplanabilir ise *A* metodu *B* metodunu gerektiriyor denir ve bu durum $A \subseteq B$ şeklinde ifade edilir. $A \subseteq B$, $B \subseteq A$ ise, *A* toplanabilme metodu *B* toplanabilme metoduna denktir denir [7].

Tanım 1.1.15. Bir $\sum a_n$ serisi verilsin. $\sum a_n \rho_n$ serisi bir *A* toplanabilme metodu yardımıyla toplanabiliyorsa, (ρ_n) dizisine $\sum a_n$ serisinin *A* metodu için bir toplanabilme çarpanı denir [4].

Tanım 1.1.16. A ve B herhangi iki pozitif sabit ve (c_n) dizisi pozitif artan bir dizi olmak üzere

$$Ac_n \le b_n \le Bc_n \tag{1.15}$$

şartını sağlayan pozitif (b_n) dizisine hemen hemen artan dizi denir [12].

Tanım 1.1.17. Her $n \ge m \ge 1$ için

$$Kn^{\beta} \mu_n \ge m^{\beta} \mu_m \tag{1.16}$$

olacak şekilde bir $K = K(\beta, \mu)$ sabiti mevcut olsun. Bu taktirde (μ_n) pozitif dizisine yarı β – kuvvetli artan bir dizi denir [13].

Tanım 1.1.18 (Abel Dönüşümü).

(a_k) ve (b_k) kompleks sayıların iki dizisi olsun.

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...a_n$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} s_k \Delta b_k + s_n b_n$$

dir [14].

Tanım 1.1.19 (Hölder Eşitsizliği).

$p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $m_1, m_2, ..., m_n \ge 0$, $l_1, l_2, ..., l_n \ge 0$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k=1}^{n} m_k l_k \le \left(\sum_{k=1}^{n} m_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} l_k^q \right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.17}$$

dur [5].

Tanım 1.1.20 (Minkowski Eşitsizliği).

$p \geq 1$ ve $m_1, m_2, ..., m_n \geq 0, \quad l_1, l_2, ..., l_n \geq 0$ olsun. Bu taktirde

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \left(m_k + l_k \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} m_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} l_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.18}$$

dir [5].

Teorem 1.1.2. $k \geq 1$ olmak üzere, eğer

$$\rho_m = o(1), \ m \to \infty \tag{1.19}$$

$$\sum_{n=1}^{m} n \log n \left| \Delta^2 \rho_n \right| = O(1), \quad m \to \infty \tag{1.20}$$

$$\sum_{v=1}^{m} \frac{\left| t_v \right|^k}{v} = O(\log m), \ m \to \infty \tag{1.21}$$

şartları sağlanıyorsa, $\sum a_n \rho_n$ serisi $\left| C, 1 \right|_k$ toplanabilirdir [15].

Teorem 1.1.3. $k \geq 1$ olmak üzere $\left(X_n \right)$ pozitif azalmayan bir dizi olsun. $\left(\rho_n \right)$ dizisi aşağıdaki şartları sağlasın.

$$\left| \rho_n \right| X_n = O(1), \ n \to \infty \tag{1.22}$$

$$\sum_{v=1}^{n} v X_v \left| \Delta^2 \rho_v \right| = O(1), \quad n \to \infty \tag{1.23}$$

$\epsilon > 0$ olmak üzere eğer $\left(n^{\varepsilon - k} \left| \varphi_n \right|^k \right)$ dizisi artmayan bir dizi ve

$$\sum_{v=1}^{n} v^{-k} \left| \varphi_v t_v \right|^k = O(X_n), \ n \to \infty \tag{1.24}$$

şartı sağlanıyor ise $\sum a_n \rho_n$ serisi $\varphi - \left| C, 1 \right|_k$ toplanabilirdir [16].

Teorem 1.1.4. $k \geq 1$ ve $0 \leq \delta < \alpha \leq 1$ olmak üzere $\left(X_n \right)$ pozitif azalmayan dizi olsun. $\left(\zeta_n \right)$ ve $\left(\rho_n \right)$ dizileri

$$\left| \Delta \rho_n \right| \leq \zeta_n \tag{1.25}$$

$$\zeta_n \to 0,\ n \to \infty \tag{1.26}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left|\Delta\zeta_n\right| X_n < \infty \tag{1.27}$$

$$\left|\rho_n\right| X_n = O(1), n \to \infty \tag{1.28}$$

şartlarını sağlasınlar. Eğer

$$f_n^{\alpha} = \begin{Bmatrix} \left|h_n^{\alpha}\right|, & \alpha = 1 \\ \max\limits_{1\le v\le n}\left|h_v^{\alpha}\right| & 0 < \alpha < 1 \end{Bmatrix} \tag{1.29}$$

olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{m} n^{\delta k-1}\left(f_n^{\alpha}\right)^k = O(X_m),\ \ m \to \infty \tag{1.30}$$

şartı sağlanırsa, $\sum a_n\rho_n$ serisi $\left|C,\alpha;\delta\right|_k$ toplanabilirdir [17].

Lemma 1.1.1. $0<\propto\le 1$ ve $1\le v\le n$ olmak üzere

$$\left|\sum_{p=0}^{v} A_{n-p}^{\alpha-1}a_p\right| \le \max_{1\le m\le v}\left|\sum_{p=0}^{m} A_{m-p}^{\alpha-1}a_p\right| \tag{1.31}$$

dir [18].

Lemma 1.1.2. $\left(X_n\right)$ hemen hemen artan bir dizi olsun. Teorem 1.1.3 ün (1.22) ve (1.23) şartları altında

$$\sum_{n=1}^{m} X_n\left|\Delta\rho_n\right| = O(1),\ m \to \infty \tag{1.32}$$

$$mX_m\left|\Delta\rho_m\right| = O(1),\ m \to \infty \tag{1.33}$$

dur [19].

Lemma 1.1.3. (X_n) hemen hemen artan bir dizi ve Teorem 1.1.4 ün (1.26) ve (1.27) şartları altında

$$\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n X_n < \infty \tag{1.34}$$

ve

$$n\zeta_n X_n = O(1),\ n \to \infty \tag{1.35}$$

dur [20].

Lemma 1.1.4. $(\rho_n) \in BV_o$ olsun. $0 < \beta < 1$ olmak üzere (X_n) yarı β-kuvvetli artan bir dizi olsun. Teorem 1.1.3 ün (1.22) ve (1.23) şartları altında

$$nX_n |\Delta\rho_n| = O(1),\ n \to \infty \tag{1.36}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n |\Delta\rho_n| < \infty \tag{1.37}$$

dur [21].

Lemma 1.1.5. (X_n), (ζ_n) ve (ρ_n) dizileri Teorem 1.1.4 deki gibi tanımlansın. (1.27) şartı sağlanmak üzere

$$n\zeta_n X_n = O(1),\ n \to \infty \tag{1.38}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n X_n < \infty \tag{1.39}$$

dur [13].

2. BÖLÜM

SONSUZ SERİLERİN $\varphi-|C,1|_k$ ve $\varphi-|C,\alpha|_k$ TOPLANABİLMESİ İLE İLGİLİ TEOREMLER

Bu bölümde $k\geq 1$ olmak üzere $|C,1|_k$ toplanabilme ile ilgili Teorem 1.1.2 yi $\varphi-|C,1|_k$ ve $\varphi-|C,\alpha|_k$ toplanabilme metotlarına genelleştiren iki teorem ifade ve ispat edilecektir.

2.1. $\sum a_n\rho_n$ Serisinin $\varphi-|C,1|_k$ Toplanabilmesi İle İlgili Teorem

Teorem 2.1.1. $k\geq 1$ olmak üzere (φ_n) pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. Teorem 1.1.2 nin (1.19) ve (1.20) şartları sağlansın. Eğer

$$\sum_{v=1}^{m}\frac{\varphi_v^{k-1}}{v^k}|t_v|^k=O(\log m),\ m\to\infty \tag{2.1}$$

$$\sum_{n=v}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^{k+1}}=O\left(\frac{\varphi_v^{k-1}}{v^k}\right) \tag{2.2}$$

şartları sağlanıyor ise $\sum a_n\rho_n$ serisi $\varphi-|C,1|_k$ toplanabilirdir [22].

Teorem 2.1.1 de $\varphi_n=n$ alırsak (2.1) şartı Teorem 1.1.2 nin (1.21) şartına, (2.2) şartı ise

$$\sum_{n=v}^{m}\frac{1}{n^2}=O\left(\frac{1}{v}\right) \tag{2.3}$$

şartına dönüşür.

Teorem 2.1.1 in ispatı:

(H_n) dizisi $(na_n\rho_n)$ dizisinin n. mertebeden $(C,1)$ ortalaması olsun. Abel dönüşümü kullanılırsa,

$$H_n = \frac{1}{n+1}\sum_{v=1}^{n} va_v\rho_v$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{v=1}^{n-1}\Delta\rho_v\sum_{r=0}^{v} ra_r + \frac{\rho_n}{n+1}\sum_{r=0}^{n} ra_r$$

elde edilir. Burada $t_n = \frac{1}{n+1}\sum_{r=0}^{n} ra_r$ olduğundan

$$H_n = \frac{1}{n+1}\sum_{v=0}^{n-1}(v+1)\Delta\rho_v t_v + \rho_n t_n$$

$$= H_{n,1} + H_{n,2}$$

olarak bulunur. k>1 olmak üzere, Teorem 2.1.1 i ispatlamak için

$$\left|H_{n,1}+H_{n,2}\right|^k \le 2^k\left(\left|H_{n,1}\right|^k + \left|H_{n,2}\right|^k\right)$$

eşitsizliği kullanılarak r=1, 2 için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^k}\left|H_{n,r}\right|^k < \infty \qquad (2.4)$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

k>1, $\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1$ olmak üzere Hölder eşitsizliğinden

$$\sum_{n=2}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^k}\left|H_{n,1}\right|^k = \sum_{n=2}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^k}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{v=1}^{n-1}\Delta\rho_v(v+1)t_v\right|^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^{2k}}\left(\sum_{v=1}^{n-1} v\left|\Delta\rho_v\right|\left|t_v\right|\right)^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^{2k}}\sum_{v=1}^{n-1} v\left|\Delta\rho_v\right|\left|t_v\right|^k\left(\sum_{v=1}^{n-1} v\left|\Delta\rho_v\right|\right)^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^{k+1}}\left(\sum_{v=1}^{n} v\left|\Delta\rho_v\right|\left|t_v\right|^k\right)$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m} v\left|\Delta\rho_v\right|\left|t_v\right|^k\sum_{n=v}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^{k+1}}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m} v\left|\Delta\rho_v\right|\frac{\varphi_v^{k-1}}{v^k}\left|t_v\right|^k .$$

Burada Abel dönüşümü kullanılırsa

$$\sum_{n=2}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^k}\left|H_{n,1}\right|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\left|\Delta\left(v\left|\Delta\rho_v\right|\right)\right|\sum_{r=1}^{v}\frac{\varphi_r^{k-1}}{r^k}\left|t_r\right|^k + m\left|\Delta\rho_m\right|\sum_{r=1}^{m}\frac{\varphi_r^{k-1}}{r^k}\left|t_r\right|^k$$

elde edilir. $\sum_{v=1}^{m}\frac{\varphi_v^{k-1}}{v^k}\left|t_v\right|^k = O(\log m)$ olduğundan

$$\sum_{n=2}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^k}\left|H_{n,1}\right|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\left|\Delta\rho_v\right|\log v + \sum_{v=1}^{m-1} v\left|\Delta^2\rho_v\right|\log v + m\left|\Delta\rho_m\right|\log m$$

bulunur. Teorem 1.1.2 nin (1.20) şartından

$$\sum_{n=2}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^k}\left|H_{n,1}\right|^k = O(1),\ m\to\infty$$

elde edilir. Son olarak, $H_{n,1}$ de yaptığımız benzer işlemler yapılırsa

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^k}\left|H_{n,2}\right|^k = O(1)\sum_{n=1}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^k}\left|\rho_n t_n\right|^k$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^k}\left|t_n\right|^k\left|\sum_{v=n}^{m}\Delta\rho_v\right|$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m}\left|\Delta\rho_v\right|\sum_{n=1}^{v}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^k}\left|t_n\right|^k$$

elde edilir. (2.1) şartından $\sum_{v=1}^{m}\frac{\varphi_v^{k-1}}{v^k}\left|t_v\right|^k = O(\log m)$ olduğu kullanılırsa

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^k}\left|H_{n,2}\right|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m}\left|\Delta\rho_v\right|\log v$$

$$= O(1),\ \ m\to\infty$$

bulunur. Bu durumda r=1, 2 için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^k}\left|H_{n,r}\right|^k = O(1),\ m\to\infty$$

elde edilir ki bu da Teorem 2.1.1 in ispatını tamamlar.

2.2. $\sum a_n\rho_n$ Serisinin $\varphi-|C,\alpha|_k$ Toplanabilmesi İle İlgili Teorem

Teorem 2.2.1. $k\geq 1$, $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere (φ_n) pozitif reel sayıların bir dizisi olsun ve (1.19) ve (1.20) şartları sağlansın. Eğer

$$\sum_{v=1}^{m}\frac{\varphi_v^{k-1}}{v^k}\left|h_v^{\alpha}\right|^k=O(\log m),\ m\to\infty \tag{2.5}$$

$$\sum_{n=v}^{m+1}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^{k+\alpha}}=O\left(\frac{\varphi_v^{k-1}}{v^{k+\alpha-1}}\right) \tag{2.6}$$

şartları sağlanıyor ise $\sum a_n\rho_n$ serisi $\varphi-|C,\alpha|_k$ toplanabilirdir [23].

Teorem 2.2.1. nin ispatı:

(H_n^{α}) dizisi $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere $(na_n\rho_n)$ dizisinin n. mertebeden (C,α) ortalaması olsun.

$$H_n^{\alpha}=\frac{1}{A_n^{\alpha}}\sum_{v=1}^{n}A_{n-v}^{\alpha-1}va_v\rho_v \tag{2.7}$$

dür. Burada Abel dönüşümü kullanılırsa

$$\begin{aligned}H_n^{\alpha}&=\frac{1}{A_n^{\alpha}}\sum_{v=1}^{n-1}\Delta\rho_v\sum_{p=1}^{v}A_{n-p}^{\alpha-1}pa_p+\frac{\rho_n}{A_n^{\alpha}}\sum_{v=1}^{n}A_{n-v}^{\alpha-1}va_v\\&=\frac{1}{A_n^{\alpha}}\sum_{v=1}^{n-1}A_v^{\alpha}\Delta\rho_v h_v^{\alpha}+\rho_n h_n^{\alpha}\\&=H_{n,1}^{\alpha}+H_{n,2}^{\alpha}\end{aligned}$$

bulunur. Teorem 2.2.1 i ispatlamak için k>1 olmak üzere

$$\left|H_{n,1}^{\alpha}+H_{n,2}^{\alpha}\right|^k\leq 2^k\left(\left|H_{n,1}^{\alpha}\right|^k+\left|H_{n,2}^{\alpha}\right|^k\right)$$

eşitsizliğinden r=1, 2 için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^k}\left|H_{n,r}^{\alpha}\right|^k<\infty$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

İlk olarak, Hölder eşitsizliğinden

$$\sum_{n=2}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^k}\left|H_{n,1}^{\alpha}\right|^k=\sum_{n=2}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^k}\left|\frac{1}{A_n^{\alpha}}\sum_{v=1}^{n-1}\Delta\rho_v h_v^{\alpha}A_v^{\alpha}\right|^k$$

elde edilir. (1.10) şartından $A_n^{\alpha}=O(n^{\alpha})$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^k}\left|H_{n,1}^{\alpha}\right|^k&=O(1)\sum_{n=2}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^{k+\alpha k}}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}v^{\alpha}\left|\Delta\rho_v\right|\left|h_v^{\alpha}\right|\right\}^k\\&=O(1)\sum_{n=2}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^{k+\alpha k}}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}v^{\alpha}\left|\Delta\rho_v\right|\left|h_v^{\alpha}\right|^k\right\}\times\left\{\sum_{v=1}^{n-1}v^{\alpha}\left|\Delta\rho_v\right|\right\}^{k-1}\\&=O(1)\sum_{n=2}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^{k+\alpha}}\left\{\sum_{v=1}^{n}v^{\alpha}\left|\Delta\rho_v\right|\left|h_v^{\alpha}\right|^k\right\}\\&=O(1)\sum_{v=1}^{m}v^{\alpha}\left|\Delta\rho_v\right|\left|h_v^{\alpha}\right|^k\sum_{n=v}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^{k+\alpha}}\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\sum_{n=v}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^{k+\alpha}}=O\left(\frac{\varphi_v^{k-1}}{v^{k+\alpha-1}}\right)$ olduğu kullanılırsa

$$\sum_{n=2}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^k}\left|H_{n,1}^{\alpha}\right|^k=O(1)\sum_{v=1}^{m}v\left|\Delta\rho_v\right|\frac{\varphi_v^{k-1}}{v^k}\left|h_v^{\alpha}\right|^k$$

elde edilir. Abel dönüşümü kullanılırsa

$$\sum_{n=2}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^k}\left|H_{n,1}^{\alpha}\right|^k=O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\left|\Delta\left(v\left|\Delta\rho_v\right|\right)\right|\sum_{r=1}^{v}\frac{\varphi_r^{k-1}}{r^k}\left|h_r^{\alpha}\right|^k+m\left|\Delta\rho_m\right|\sum_{r=1}^{m}\frac{\varphi_r^{k-1}}{r^k}\left|h_r^{\alpha}\right|^k$$

elde edilir. Teorem 2.2.1. in (2.5) şartı kullanılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^k}\left|H_{n,1}^{\alpha}\right|^k&=O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\left|\Delta\rho_v\right|\log v+\sum_{v=1}^{m-1}v\left|\Delta^2\rho_v\right|\log v+m\left|\Delta\rho_m\right|\log m\\&=O(1),\quad m\to\infty\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak, $H_{n,1}^{\alpha}$ de yaptığımız benzer işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^k}\left|H_{n,2}^{\alpha}\right|^k&=\sum_{n=1}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^k}\left|\rho_n h_n^{\alpha}\right|^k\\&=O(1)\sum_{n=1}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^k}\left|h_n^{\alpha}\right|^k\left|\sum_{v=n}^{m}\Delta\rho_v\right|\\&=O(1)\sum_{v=1}^{m}\left|\Delta\rho_v\right|\sum_{n=1}^{v}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^k}\left|h_n^{\alpha}\right|^k\end{aligned}$$

elde edilir.

Burada (2.5) şartından

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^k}\left|H_{n,2}^{\alpha}\right|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m}\left|\Delta\rho_v\right|\log v$$

$$= O(1),\quad m\to\infty$$

bulunur. Bu durumda r=1, 2 için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n^{k-1}}{n^k}\left|H_{n,r}^{\alpha}\right|^k = O(1),\quad m\to\infty$$

elde edilir ki bu da Teorem 2.2.1 in ispatını tamamlar.

3. BÖLÜM
SONSUZ SERİLERİN HEMEN HEMEN ARTAN DİZİLER ÜZERİNE UYGULAMALARI

Bu bölümde, birinci bölümde verilen Teorem 1.1.3 ve Teorem 1.1.4 ü hemen hemen artan diziler kullanılarak $\varphi-|C,\alpha|_k$ toplanabilmeye genelleştiren teoremler ifade ve ispat edilecektir.

3.1. Hemen Hemen Artan Diziler İle İlgili Teoremler

Teorem 3.1.1. k≥1, $0<\alpha\leq 1$ ve $k\alpha+\epsilon > 1$ olsun. (X_n) hemen hemen artan bir dizi olmak üzere (ρ_n) dizisi de Teorem 1.1.3 ün (1.22) ve (1.23) şartlarını sağlasın. $\epsilon > 0$ için $\left(n^{\varepsilon-k}|\varphi_n|^k\right)$ artmayan bir dizi olsun. $\left(f_n^{\alpha}\right)$ dizisi (1.29) daki gibi tanımlı olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-k}\left(f_n^{\alpha}|\varphi_n|\right)^k = O(X_m),\ m\to\infty \tag{3.1}$$

şartı sağlanırsa, $\sum a_n\rho_n$ serisi $\varphi-|C,\alpha|_k$ toplanabilirdir [24].

Teorem 3.1.1. in ispatı: $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere $\left(R_n^{\alpha}\right)$ dizisi $\left(na_n\rho_n\right)$ dizisinin n. mertebeden (C,α) ortalaması olsun. (1.9) dan

$$R_n^{\alpha} = \frac{1}{A_n^{\alpha}}\sum_{v=1}^{n} A_{n-v}^{\alpha-1} v a_v \rho_v$$

elde edilir.

Burada Abel dönüşümü kullanılırsa

$$R_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{v=1}^{n-1}\Delta\rho_v\sum_{p=1}^{v}A_{n-p}^{\alpha-1}pa_p + \frac{\rho_n}{A_n^\alpha}\sum_{v=1}^{n}A_{n-v}^{\alpha-1}va_v$$

ve Lemma 1.1.1 kullanılarak

$$\begin{aligned}\left|R_n^\alpha\right| &\le \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{v=1}^{n-1}\left|\Delta\rho_v\right|\left|\sum_{p=1}^{v}A_{n-p}^{\alpha-1}pa_p\right| + \frac{\left|\rho_n\right|}{A_n^\alpha}\left|\sum_{v=1}^{n}A_{n-v}^{\alpha-1}va_v\right| \\ &\le \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{v=1}^{n-1}A_v^\alpha f_v^\alpha\left|\Delta\rho_v\right| + \left|\rho_n\right| f_n^\alpha \\ &= R_{n,1}^\alpha + R_{n,2}^\alpha\end{aligned}$$

bulunur. Teorem 3.1.1 i ispatlamak için k>1 olmak üzere

$$\left|R_{n,1}^\alpha + R_{n,2}^\alpha\right|^k \le 2^k\left(\left|R_{n,1}^\alpha\right|^k + \left|R_{n,2}^\alpha\right|^k\right)$$

eşitsizliğinden r=1, 2 için

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-k}\left|\varphi_n R_{n,r}^\alpha\right|^k < \infty$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

Hölder eşitsizliğinden

$$\sum_{n=2}^{m+1}n^{-k}\left|\varphi_n R_{n,1}^\alpha\right|^k \le \sum_{n=2}^{m+1}n^{-k}\left(A_n^\alpha\right)^{-k}\left|\varphi_n\right|^k\left\{\sum_{v=1}^{n-1}A_v^\alpha f_v^\alpha\left|\Delta\rho_v\right|\right\}^k$$

elde edilir. Burada (1.10) şartından $A_n^\alpha = O(n^\alpha)$ olup

$$\sum_{n=2}^{m+1}n^{-k}\left|\varphi_n R_{n,1}^\alpha\right|^k = O(1)\sum_{n=2}^{m+1}n^{-k}n^{-\alpha k}\left|\varphi_n\right|^k\left\{\sum_{v=1}^{n-1}v^{\alpha k}\left(f_v^\alpha\right)^k\left|\Delta\rho_v\right|\right\}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}\left|\Delta\rho_v\right|\right\}^{k-1}$$

elde edilir.

$$\sum_{n=2}^{m+1}n^{-k}\left|\varphi_n R_{n,1}^\alpha\right|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m}v^{\alpha k}\left(f_v^\alpha\right)^k\left|\Delta\rho_v\right|\sum_{n=v+1}^{m+1}\frac{n^{-k}\left|\varphi_n\right|^k}{n^{\alpha k}}$$

bulunur.

Yukarıdaki ifade n^{ε} ile çarpılıp bölünürse

$$\sum_{n=2}^{m+1} n^{-k}\left|\varphi_n R_{n,1}^{\alpha}\right|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m} v^{\alpha k}\left(f_v^{\alpha}\right)^k \left|\Delta\rho_v\right| \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{n^{\varepsilon-k}\left|\varphi_n\right|^k}{n^{\alpha k+\varepsilon}}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m} v^{\alpha k}\left(f_n^{\alpha}\right)^k \left|\Delta\rho_v\right| v^{\varepsilon-k}\left|\varphi_v\right|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{1}{n^{\alpha k+\varepsilon}}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m} v^{\alpha k}\left(f_v^{\alpha}\right)^k \left|\Delta\rho_v\right| v^{\varepsilon-k}\left|\varphi_v\right|^k \int_{v}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha k+\varepsilon}}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m} v\left|\Delta\rho_v\right| v^{-k}\left(f_v^{\alpha}\left|\varphi_v\right|\right)^k$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m-1} \Delta\left(v\left|\Delta\rho_v\right|\right)\sum_{r=1}^{v} r^{-k}\left(f_r^{\alpha}\left|\varphi_r\right|\right)^k$$

$$+O(1)m\left|\Delta\rho_m\right|\sum_{v=1}^{m} v^{-k}\left(f_v^{\alpha}\left|\varphi_v\right|\right)^k$$

elde edilir.

(3.1) den dolayı $\sum_{n=1}^{m} n^{-k}\left(f_n^{\alpha}\left|\varphi_n\right|\right)^k = O(X_m)$ olduğu kullanılırsa

$$\sum_{n=2}^{m+1} n^{-k}\left|\varphi_n R_{n,1}^{\alpha}\right|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\left|\Delta\left(v\left|\Delta\rho_v\right|\right)\right| X_v + O(1)m\left|\Delta\rho_m\right| X_m$$

bulunur. Buradan

$$\sum_{n=2}^{m+1} n^{-k}\left|\varphi_n R_{n,1}^{\alpha}\right|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m-1} v\left|\Delta^2\rho_v\right| X_v + O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\left|\Delta\rho_v\right| X_v + O(1)m\left|\Delta\rho_m\right| X_m$$

elde edilir. (1.23), (1.32) ve (1.33) şartları kullanılırsa

$$\sum_{n=2}^{m+1} n^{-k}\left|\varphi_n R_{n,1}^{\alpha}\right|^k = O(1),\ m\to\infty$$

bulunur. Ayrıca $\left|\rho_n\right| = O\left(\frac{1}{X_n}\right) = O(1)$ olduğu kullanılırsa

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-k}\left|\varphi_n R_{n,2}^{\alpha}\right|^k = \sum_{n=1}^{m}\left|\rho_n\right|^{k-1}\left|\rho_n\right| n^{-k}\left(f_n^{\alpha}\left|\varphi_n\right|\right)^k$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{m}\left|\rho_n\right| n^{-k}\left(f_n^{\alpha}\left|\varphi_n\right|\right)^k$$

elde edilir.

Yukarıdaki toplam için Abel dönüşümü kullanılırsa

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-k} \left|\varphi_n R_{n,2}^{\alpha}\right|^k = O(1)\sum_{n=1}^{m-1} \Delta\left|\rho_n\right| \sum_{v=1}^{n} v^{-k} \left(f_v^{\alpha} \left|\varphi_v\right|\right)^k + O(1)\left|\rho_m\right| \sum_{n=1}^{m} n^{-k} \left(f_n^{\alpha} \left|\varphi_n\right|\right)^k$$

elde edilir. (3.1) den dolayı $\sum_{n=1}^{m} n^{-k} \left(f_n^{\alpha} \left|\varphi_n\right|\right)^k = O(X_m)$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-k} \left|\varphi_n R_{n,2}^{\alpha}\right|^k = O(1)\sum_{n=1}^{m-1} \left|\Delta\rho_n\right| X_n + O(1)\left|\rho_m\right| X_m$$

dir. Burada (1.22) ve (1.32) şartları kullanılarak

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-k} \left|\varphi_n R_{n,2}^{\alpha}\right|^k = O(1),\ m \to \infty$$

bulunur. Bu durumda r=1, 2 için

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-k} \left|\varphi_n R_{n,r}^{\alpha}\right|^k = O(1),\ m \to \infty$$

elde edilir ki bu da Teorem 3.1.1 in ispatını tamamlar.

Teorem 3.1.2. k≥1, 0<∝≤ 1 ve $k\alpha + \varepsilon > 1$ olmak üzere $\left(X_n\right)$ hemen hemen artan bir dizi olsun. $\left(\zeta_n\right)$, $\left(\rho_n\right)$ dizileri Teorem 1.1.4 ün (1.25)-(1.28) şartlarını sağlasın. $\varepsilon > 0$ için $\left(n^{\varepsilon - k}\left|\varphi_n\right|^k\right)$ artmayan bir dizi ve $\left(f_n^{\alpha}\right)$ dizisi de (1.29) daki gibi tanımlansın. Eğer

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-k} \left(\left|\varphi_n\right| f_n^{\alpha}\right)^k = O(X_m),\ m \to \infty \tag{3.2}$$

şartı sağlanıyor ise $\sum a_n\rho_n$ serisi $\varphi - \left|C,\alpha\right|_k$ toplanabilirdir [25].

Teorem 3.1.2. in ispatı:

$0<\alpha \le 1$ olmak üzere $\left(H_n^{\alpha}\right)$ dizisi $\left(na_n\rho_n\right)$ dizisinin n. mertebeden $\left(C,\alpha\right)$ ortalaması olsun. (1.9) şartı kullanılarak

$$H_n^{\alpha} = \frac{1}{A_n^{\alpha}} \sum_{v=1}^{n} A_{n-v}^{\alpha-1} v a_v \rho_v$$

elde edilir.

Bu toplama Abel dönüşümü uygulanırsa

$$H_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{v=1}^{n-1}\Delta\rho_v\sum_{p=1}^{v}A_{n-p}^{\alpha-1}pa_p + \frac{\rho_n}{A_n^\alpha}\sum_{v=1}^{n}A_{n-v}^{\alpha-1}va_v$$

bulunur. Burada Lemma 1.1.1. kullanılarak

$$\left|H_n^\alpha\right| \le \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{v=1}^{n-1}\left|\Delta\rho_v\right|\left|\sum_{p=1}^{v}A_{n-p}^{\alpha-1}pa_p\right| + \frac{\left|\rho_n\right|}{A_n^\alpha}\left|\sum_{v=1}^{n}A_{n-v}^{\alpha-1}va_v\right|$$

$$\le \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{v=1}^{n-1}A_v^\alpha f_v^\alpha\left|\Delta\rho_v\right| + \left|\rho_n\right| f_n^\alpha$$

$$= H_{n,1}^\alpha + H_{n,2}^\alpha$$

elde edilir. Teorem 3.1.2 yi ispatlamak için r=1, 2 olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}\left|\varphi_n H_{n,r}^\alpha\right|^k < \infty$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

Hölder eşitsizliğinden

$$\sum_{n=2}^{m+1} n^{-k}\left|\varphi_n H_{n,1}^\alpha\right|^k \le \sum_{n=2}^{m+1} n^{-k}\left(A_n^\alpha\right)^{-k}\left|\varphi_n\right|^k\left\{\sum_{v=1}^{n-1}A_v^\alpha f_v^\alpha\zeta_v\right\}^k$$

elde edilir. $A_n^\alpha = O(n^\alpha)$ şartı kullanılırsa

$$\sum_{n=2}^{m+1} n^{-k}\left|\varphi_n H_{n,1}^\alpha\right|^k \le \sum_{n=2}^{m+1} n^{-k}n^{-\alpha k}\left|\varphi_n\right|^k\left\{\sum_{v=1}^{n-1}v^{\alpha k}\left(f_v^\alpha\right)^k\zeta_v\right\}x\left\{\sum_{v=1}^{n-1}\zeta_v\right\}^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m}v^{\alpha k}\left(f_v^\alpha\right)^k\zeta_v\sum_{n=v+1}^{m+1}\frac{n^{-k}\left|\varphi_n\right|^k}{n^{\alpha k}}$$

dır. İfade n^ε ile çarpıp bölünürse

$$\sum_{n=2}^{m+1} n^{-k}\left|\varphi_n H_{n,1}^\alpha\right|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m}v^{\alpha k}\left(f_v^\alpha\right)^k\zeta_v\sum_{n=v+1}^{m+1}\frac{n^{\varepsilon-k}\left|\varphi_n\right|^k}{n^{\alpha k+\varepsilon}}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m}v^{\alpha k}\left(f_n^\alpha\right)^k\zeta_v v^{\varepsilon-k}\left|\varphi_v\right|^k\sum_{n=v+1}^{m+1}\frac{1}{n^{\alpha k+\varepsilon}}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m}v^{\alpha k}\left(f_v^\alpha\right)^k\zeta_v v^{\varepsilon-k}\left|\varphi_v\right|^k\int_v^{\infty}\frac{d_x}{x^{\alpha k+\varepsilon}}$$

elde edilir.

Buradan

$$\sum_{n=2}^{m+1} n^{-k} \left|\varphi_n H_{n,1}^{\alpha}\right|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m} v\zeta_v v^{-k} \left(f_v^{\alpha} \left|\varphi_v\right|\right)^k$$

olup, Abel dönüşümü kullanılırsa

$$\sum_{n=2}^{m+1} n^{-k} \left|\varphi_n H_{n,1}^{\alpha}\right|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m-1} \Delta\left(v\zeta_v\right)\sum_{r=1}^{v} r^{-k} \left(f_r^{\alpha} \left|\varphi_r\right|\right)^k + O(1)m\zeta_m \sum_{v=1}^{m} v^{-k} \left(f_v^{\alpha} \left|\varphi_v\right|\right)^k$$

elde edilir. $\sum_{n=1}^{m} n^{-k} \left(\left|\varphi_n\right| f_n^{\alpha}\right)^k = O(X_m)$ olduğundan

$$\sum_{n=2}^{m+1} n^{-k} \left|\varphi_n H_{n,1}^{\alpha}\right|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m-1} \left|\Delta\left(v\zeta_v\right)\right| X_v + O(1)m\zeta_m X_m$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m-1} v\left|\Delta\zeta_v\right| X_v + O(1)\sum_{v=1}^{m-1} \left|\zeta_v\right| X_v + O(1)m\zeta_m X_m$$

elde edilir. Burada (1.27) , (1.34) ve (1.35) şartları kullanılırsa

$$\sum_{n=2}^{m+1} n^{-k} \left|\varphi_n H_{n,1}^{\alpha}\right|^k = O(1)\,,\ m \to \infty$$

bulunur. Tekrar $H_{n,1}^{\alpha}$ de yaptığımız benzer işlemler yapılırsa

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-k} \left|\varphi_n H_{n,2}^{\alpha}\right|^k = \sum_{n=1}^{m} \left|\rho_n\right|^{k-1} \left|\rho_n\right| n^{-k} \left(f_n^{\alpha} \left|\varphi_n\right|\right)^k$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{m} \left|\rho_n\right| n^{-k} \left(f_n^{\alpha} \left|\varphi_n\right|\right)^k$$

bulunur.

Abel dönüşümü kullanılırsa

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-k} \left|\varphi_n H_{n,2}^{\alpha}\right|^k = O(1)\sum_{n=1}^{m-1} \Delta\left|\rho_n\right| \sum_{v=1}^{n} v^{-k} \left(f_v^{\alpha} \left|\varphi_n\right|\right)^k + O(1)\left|\rho_m\right| \sum_{n=1}^{m} n^{-k} \left(f_n^{\alpha} \left|\varphi_n\right|\right)^k$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{m-1} \left|\Delta\rho_n\right| X_n + O(1)\left|\rho_m\right| X_m$$

elde edilir.

Burada $\left|\Delta\rho_n\right| \le \zeta_n$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-k} \left|\varphi_n H_{n,2}^{\alpha}\right|^k = O(1)\sum_{n=1}^{m-1} \zeta_n X_n + O(1)\left|\rho_m\right| X_m$$

olup, (1.28) ve (1.34) şartlarından

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-k} \left| \varphi_n H_{n,2}^{\alpha} \right|^k = O(1), \; m \to \infty$$

bulunur. Bu durumda r=1, 2 için

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-k} \left| \varphi_n H_{n,r}^{\alpha} \right|^k = O(1), \quad m \to \infty$$

elde edilir ki bu da Teorem 3.1.2 nin ispatını tamamlar.

4. BÖLÜM
SONSUZ SERİLERİN YARI β-KUVVETLİ ARTAN DİZİLER ÜZERİNE UYGULAMALARI

Bu bölümde, üçüncü bölümde verilen Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.2 de hemen hemen artan dizi yerine yarı β-kuvvetli artan dizi alınarak, daha zayıf şartlar altında $\varphi-|C,\alpha|_k$ toplanabilme ile ilgili teoremler ifade ve ispat edilecektir.

4.1. Yarı β-Kuvvetli Artan Diziler İle İlgili Teoremler

Teorem 4.1.1. k≥1, $0<\alpha\leq 1$ ve $\alpha k+\varepsilon>1$ olsun. $(\rho_n)\in BV_0$ ve $0<\beta<1$ için (X_n) yarı β-kuvvetli artan dizi olsun. Teorem 1.1.3 ün (1.22) ve (1.23) şartları ve Teorem 1.1.4 ün (1.29) şartı ile (3.1) şartları sağlanıyor ise $\sum a_n\rho_n$ serisi $\varphi-|C,\alpha|_k$ toplanabilirdir [27].

Teorem 4.1.1 in ispatı: $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere (R_n^α), dizisi $(na_n\rho_n)$ dizisinin n. mertebeden (C,α) ortalaması olsun. (1.9) dan

$$R_n^\alpha=\frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{v=1}^{n}A_{n-v}^{\alpha-1}va_v\rho_v \tag{4.1}$$

dür. Abel dönüşümü kullanılırsa

$$R_n^\alpha=\frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{v=1}^{n-1}\Delta\rho_v\sum_{p=1}^{v}A_{n-p}^{\alpha-1}pa_p+\frac{\rho_n}{A_n^\alpha}\sum_{v=1}^{n}A_{n-v}^{\alpha-1}va_v$$

elde edilir. Lemma 1.1.1 i kullanılırsa

$$\left|R_n^\alpha\right|\leq\frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{v=1}^{n-1}|\Delta\rho_v|\left|\sum_{p=1}^{v}A_{n-p}^{\alpha-1}pa_p\right|+\frac{|\rho_n|}{A_n^\alpha}\left|\sum_{v=1}^{n}A_{n-v}^{\alpha-1}va_v\right|$$

$$\leq \frac{1}{A_n^{\alpha}} \sum_{v=1}^{n-1} A_v^{\alpha} f_v^{\alpha} |\Delta\rho_v| + |\rho_n| f_n^{\alpha}$$

$$= R_{n,1}^{\alpha} + R_{n,2}^{\alpha}$$

bulunur. Teorem 4.1.1 i ispatlamak için k>1 olmak üzere

$$\left|R_{n,1}^{\alpha} + R_{n,2}^{\alpha}\right|^k \leq 2^k \left(\left|R_{n,1}^{\alpha}\right|^k + \left|R_{n,2}^{\alpha}\right|^k\right)$$

eşitsizliğinden r=1,2 için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k} \left|\varphi_n R_{n,r}^{\alpha}\right|^k < \infty$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

Hölder eşitsizliğinden

$$\sum_{n=2}^{m+1} n^{-k} \left|\varphi_n R_{n,1}^{\alpha}\right|^k \leq \sum_{n=2}^{m+1} n^{-k} \left(A_n^{\alpha}\right)^{-k} |\varphi_n|^k \left\{\sum_{v=1}^{n-1} A_v^{\alpha} f_v^{\alpha} |\Delta\rho_v|\right\}^k$$

$$= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} n^{-k} n^{-\alpha k} |\varphi_n|^k \left\{\sum_{v=1}^{n-1} v^{\alpha k} \left(f_v^{\alpha}\right)^k |\Delta\rho_v|\right\} x \left\{\sum_{v=1}^{n-1} |\Delta\rho_v|\right\}^{k-1}$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{n=2}^{m+1} n^{-k} \left|\varphi_n R_{n,1}^{\alpha}\right|^k = O(1) \sum_{v=1}^{m} v^{\alpha k} \left(f_v^{\alpha}\right)^k |\Delta\rho_v| \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{n^{-k} |\varphi_n|^k}{n^{\alpha k}}$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^{m} v^{\alpha k} \left(f_v^{\alpha}\right)^k |\Delta\rho_v| \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{n^{\varepsilon-k} |\varphi_n|^k}{n^{\alpha k+\varepsilon}}$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^{m} v^{\alpha k} \left(f_n^{\alpha}\right)^k |\Delta\rho_v| v^{\varepsilon-k} |\varphi_v|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{1}{n^{\alpha k+\varepsilon}}$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^{m} v^{\alpha k} \left(f_v^{\alpha}\right)^k |\Delta\rho_v| v^{\varepsilon-k} |\varphi_v|^k \int_{v}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha k+\varepsilon}}$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^{m} v |\Delta\rho_v| v^{-k} \left(f_v^{\alpha} |\varphi_v|\right)^k$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \Delta\left(v |\Delta\rho_v|\right) \sum_{r=1}^{v} r^{-k} \left(f_r^{\alpha} |\varphi_r|\right)^k$$

$$+ O(1) m |\Delta\rho_m| \sum_{v=1}^{m} v^{-k} \left(f_v^{\alpha} |\varphi_v|\right)^k$$

elde edilir.

$\sum_{n=1}^{m} n^{-k}\left(f_n^{\alpha}|\varphi_n|\right)^k = O(X_m)$ olduğundan

$$\sum_{n=2}^{m+1} n^{-k}\left|\varphi_n R_{n,1}^{\alpha}\right|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\left|\Delta\left(v|\Delta\rho_v|\right)\right| X_v + O(1)m|\Delta\rho_m| X_m$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\left|(v+1)\left|\Delta^2\rho_v\right| - |\Delta\rho_v|\right| X_v + O(1)m|\Delta\rho_m| X_m$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m-1} v\left|\Delta^2\rho_v\right| X_v + O(1)\sum_{v=1}^{m-1}|\Delta\rho_v| X_v + O(1)m|\Delta\rho_m| X_m$$

$$= O(1),\ m\to\infty$$

elde edilir. Son olarak, $R_{n,1}^{\alpha}$ deki benzer işlemler yapılırsa

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-k}\left|\varphi_n R_{n,2}^{\alpha}\right|^k = O(1)\sum_{n=1}^{m}|\rho_n| n^{-k}\left(f_n^{\alpha}|\varphi_n|\right)^k$$

elde edilir. Abel dönüşümünü kullanılırsa

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-k}\left|\varphi_n R_{n,2}^{\alpha}\right|^k = O(1)\sum_{n=1}^{m-1}\Delta|\rho_n|\sum_{v=1}^{n} v^{-k}\left(f_v^{\alpha}|\varphi_v|\right)^k + O(1)|\rho_m|\sum_{n=1}^{m} n^{-k}\left(f_n^{\alpha}|\varphi_n|\right)^k$$

bulunur. $\sum_{n=1}^{m} n^{-k}\left(f_n^{\alpha}|\varphi_n|\right)^k = O(X_m)$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-k}\left|\varphi_n R_{n,2}^{\alpha}\right|^k = O(1)\sum_{n=1}^{m-1}|\Delta\rho_n| X_n + O(1)|\rho_m| X_m$$

$$= O(1),\ \ m\to\infty$$

bulunur.

Bu durumda r=1, 2 için

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-k}\left|\varphi_n R_{n,r}^{\alpha}\right|^k = O(1),\ m\to\infty$$

elde edilir ki bu da Teorem 4.1.1 in ispatını tamamlar.

Teorem 4.1.2. $k \geq 1$, $0 < \alpha \leq 1$ ve $k\alpha + \varepsilon > 1$ olsun. $0 < \beta < 1$ için (X_n) yarı $\beta-$ kuvvetli artan bir dizi olmak üzere (1.25) –(1.29) ve (3.2) şartları sağlansın. Bu durumda $\sum a_n \rho_n$ serisi $\varphi - |C, \alpha|_k$ toplanabilirdir [28].

Teorem 4.1.2. nin ispatı: $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere (H_n^α) dizisi $(na_n\rho_n)$ dizisinin n. mertebeden (C, α) ortalaması olsun. (1.9) şartı kullanılarak

$$H_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{v=1}^{n} A_{n-v}^{\alpha-1} v a_v \rho_v$$

elde edilir. Bu toplama Abel dönüşümü uygulanırsa

$$H_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{v=1}^{n-1} \Delta\rho_v \sum_{p=1}^{v} A_{n-p}^{\alpha-1} p a_p + \frac{\rho_n}{A_n^\alpha} \sum_{v=1}^{n} A_{n-v}^{\alpha-1} v a_v$$

bulunur. Burada Lemma 1.1.1 kullanıldığında

$$\begin{aligned} |H_n^\alpha| &\leq \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{v=1}^{n-1} |\Delta\rho_v| \left| \sum_{p=1}^{v} A_{n-p}^{\alpha-1} p a_p \right| + \frac{|\rho_n|}{A_n^\alpha} \left| \sum_{v=1}^{n} A_{n-v}^{\alpha-1} v a_v \right| \\ &\leq \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{v=1}^{n-1} A_v^\alpha f_v^\alpha |\Delta\rho_v| + |\rho_n| f_n^\alpha \\ &= H_{n,1}^\alpha + H_{n,2}^\alpha \end{aligned}$$

bulunur. Teorem 4.1.2 yi ispatlamak için

$$|H_{n,1}^\alpha + H_{n,2}^\alpha|^k \leq 2^k \left(|H_{n,1}^\alpha|^k + |H_{n,2}^\alpha|^k \right)$$

olduğundan r=1, 2 olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k} |\varphi_n H_{n,r}^\alpha|^k < \infty$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

k>1, $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$ olmak üzere Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} n^{-k} |\varphi_n H_{n,1}^\alpha|^k &\leq \sum_{n=2}^{m+1} n^{-k} \left(A_n^\alpha \right)^{-k} |\varphi_n|^k \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} A_v^\alpha f_v^\alpha |\Delta\rho_v| \right\}^k \\ &\leq \sum_{n=2}^{m+1} n^{-k} n^{-\alpha k} |\varphi_n|^k \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} v^{\alpha k} \left(f_v^\alpha \right)^k |\zeta_v| \right\} x \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} |\zeta_v| \right\}^{k-1} \end{aligned}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m} v^{\alpha k}\left(f_v^{\alpha}\right)^k |\zeta_v| \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{n^{-k}|\varphi_n|^k}{n^{\alpha k}}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m} v^{\alpha k}\left(f_v^{\alpha}\right)^k \zeta_v \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{n^{\varepsilon-k}|\varphi_n|^k}{n^{\alpha k+\varepsilon}}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m} v^{\alpha k}\left(f_n^{\alpha}\right)^k \zeta_v v^{\varepsilon-k}|\varphi_v|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{1}{n^{\alpha k+\varepsilon}}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m} v^{\alpha k}\left(f_v^{\alpha}\right)^k \zeta_v v^{\varepsilon-k}|\varphi_v|^k \int_v^{\infty} \frac{d_x}{x^{\alpha k+\varepsilon}}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m} v\zeta_v v^{-k}\left(f_v^{\alpha}|\varphi_v|\right)^k$$

elde edilir.

Bu toplama Abel dönüşümü uygulanırsa

$$\sum_{n=2}^{m+1} n^{-k}\left|\varphi_n H_{n,1}^{\alpha}\right|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\Delta(v\zeta_v)\sum_{r=1}^{v} r^{-k}\left(f_r^{\alpha}|\varphi_r|\right)^k + O(1)m\zeta_m\sum_{v=1}^{m} v^{-k}\left(f_v^{\alpha}|\varphi_v|\right)^k$$

elde edilir.

$\sum_{n=1}^{m} n^{-k}\left(|\varphi_n| f_n^{\alpha}\right)^k = O(X_m)$ olduğundan

$$\sum_{n=2}^{m+1} n^{-k}\left|\varphi_n H_{n,1}^{\alpha}\right|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\left|\Delta(v\zeta_v)\right| X_v + O(1)m\zeta_m X_m$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\left|(v+1)\Delta\zeta_v - \zeta_v\right| X_v + O(1)m\zeta_m X_m$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m-1} v|\Delta\zeta_v| X_v + O(1)\sum_{v=1}^{m-1}|\zeta_v| X_v + O(1)m\zeta_m X_m$$

$$= O(1),\ m\to\infty$$

bulunur. Ayrıca

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-k}\left|\varphi_n H_{n,2}^{\alpha}\right|^k = O(1)\sum_{n=1}^{m}|\rho_n| n^{-k}\left(f_n^{\alpha}|\varphi_n|\right)^k$$

bulunur.

Tekrar Abel dönüşümü kullanılırsa

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-k}\left|\varphi_n H_{n,2}^{\alpha}\right|^k = O(1)\sum_{n=1}^{m-1}\Delta|\rho_n|\sum_{v=1}^{n} v^{-k}\left(f_v^{\alpha}|\varphi_v|\right)^k$$

$$+ O(1)|\rho_m|\sum_{n=1}^{m} n^{-k}\left(f_n^{\alpha}|\varphi_n|\right)^k$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{m-1}\left|\Delta\rho_n\right| X_n + O(1)\left|\rho_m\right| X_m$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{m-1}\zeta_n X_n + O(1)\left|\rho_m\right| X_m$$

$$= O(1),\ m \to \infty$$

bulunur. Bu durumda r=1, 2 için

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-k}\left|\varphi_n H_{n,r}^{\alpha}\right|^k = O(1),\ m \to \infty$$

elde edilir ki bu da Teorem 4.1.2 nin ispatını tamamlar.

5. BÖLÜM
TARTIŞMA-SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde ikinci, üçüncü ve dördüncü bölümlerde ifade ve ispat edilen teoremlerle ilgili sonuçlar verilecektir.

5.1. Tartışma-Sonuç ve Öneriler

Sonuç 5.1.1. Teorem 2.1.1 de özel olarak $\varphi_n = n$ alınırsa, Teorem 1.1.2 elde edilir.

Sonuç 5.1.2. Teorem 2.2.1 de özel olarak $\alpha = 1$ alınırsa, Teorem 2.1.1 elde edilir.

Sonuç 5.1.3. Teorem 3.1.1 de (X_n) pozitif azalmayan dizi ve $\alpha = 1$ alınırsa, Teorem 1.1.3 elde edilir.

Sonuç 5.1.4. Teorem 3.1.2 de (X_n) pozitif azalmayan dizi, $0 \leq \delta < 1$ için $\varphi_n = n^{\delta+1-\frac{1}{k}}$ ve $\varepsilon = 1$ alınırsa, Teorem 1.1.4 elde edilir.

Sonuç 5.1.5. Teorem 4.1.1 de (X_n) pozitif azalmayan dizi ve $\alpha = 1$ alınırsa, Teorem 1.1.3 elde edilir.

Sonuç 5.1.6. Teorem 4.1.2 de (X_n) pozitif azalmayan dizi, $0 \leq \delta < 1$ için $\varphi_n = n^{\delta+1-\frac{1}{k}}$ ve $\varepsilon = 1$ alınırsa, Teorem 1.1.4 elde edilir.

Sonuç 5.1.7. Teorem 4.1.1 de (X_n) hemen hemen artan dizi olarak alınırsa Teorem 3.1.1 elde edilir.

Sonuç 5.1.8. Teorem 4.1.2 de (X_n) hemen hemen artan dizi olarak alınırsa Teorem 3.1.2 elde edilir.

KAYNAKLAR

1. Hardy, G.H., 1949. Divergent series, Oxford Universty Press, Oxford.

2. Flett, T.M., 1957. On an extension of absolute summability and some theorems of Littlewood and Paley, **Proceeding of the London Mathematical Society, 7:** 113-141.

3. Das, G., 1969. Tauberian theorems for absolute Nörlund summability, **Proceeding of the London Mathematical Society, (3) 19:** 357-384.

4. Kishore, N., Hotta, G.C., 1970. On $\left|\overline{N}, p_n\right|$ summability factors, **Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), 31:** 9-12.

5. Maddox, I.J., 1970. Elements of functional analysis, Cambridge University Press.

6. Fadden, L.M., 1942. Absolute Nörlund summability, **Duke Mathematical Journal, 9:** 168-207.

7. Petersen, G.M., 1966. Regular matrix transformations, Mc Graw Publishing Company Limited, London-New York-Toronto.

8. Fekete, M., 1911. Zur theorie der divergenten reihen, **Mathematical és Termezs Ertesitö (Budapest), 29:** 719-726.

9. Seyhan, H., 1995. Mutlak toplanabilme metotları, Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi.

10. Zygmund, A., 1959. Trigonometric series, Cambridge University Press.

11. Flett, T. M., 1958. Some more theorems concerning the absolute summability of Fourier series and power series, **Proceeding of the London Mathematical Society (3) 8:** 357–387.

12. Bari, N. K., Stečkin, S.B. 1956. Best approximations and differential properties of two conjugate functions, **Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva, 5:** 483-522.

13. Leindler, L., 2001. A new application of quasi power increasing sequences. **Publicationes Mathematicae Debrecen, 58:** 791-796.

14. Kogbetliantz, E., 1925. Sur les series absolument summables par la methode des moyannes arithmetiques, **Bulletin des Sciences Mathematiques, 49:**234-256

15. Mazhar, S.M., 1972. On $\left|C,1\right|_k$ summability factors of infinite series, **Indian Journal of Mathematics 14:** 45-48.

16. Bor, H., 1991. Absolute summability factors, **Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Università di Modena, 39:** 419-422.

17. Bor, H., 1997. Some theorems on absolute summability factors, **Journal of Analysis, 5:** 33-42**.**

18. Bosanquet, L.S., 1941. A mean value theorem, **Journal of the London Mathematical Society, 16:** 146-148

19. Mazhar, S.M., 1999. Absolute summability factors of infinite series, **Kyungpook Mathematical Journal, 39:** 67-73.

20. Mazhar, S.M., 1997. A note on absolute summability factors, **Bulletin of the Instute of Mathematics Academia Sinica, 25:** 233-242.

21. Bor, H., 2007. A study on weighted mean summability**, Rendiconti Del Circolo Matematico Di Palermo, 56:** 198-206.

22. Özarslan, H.S., 2007. On absolute Cesàro summability factors of infinite series, **Communications in Mathematical Analysis, 3:** 53-56.

23. Özarslan, H.S., 2010. A note on generalized absolute Cesàro summability, **Journal of Computational Analysis And Applications, 12(3):** 581-585.

24. Bor, H., 2003. A study on almost ıncreasing sequences, **Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 4:**1-5.

25. Bor, H., Seyhan, H., 1999. A note on almost increasing sequences, **Commentationes Mathematicae (Prace Matematyczne), 39:**37-42.

26. Balcı, M., 1982. On absolute φ-summability factors, **Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1: Mathematics and Statistics, 31:** 35–45.

27. Bor, H., 2008. A new note on power increasing sequences, **Advanced Studies in Contemporary Mathematics, 16:** 137-141.

28. Bor, H., Özarslan, H.S., 2008. A study on quasi power increasing sequences, **Rocky Mountain Journal of Mathematics, 38:** 801-807.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı : Nazlı ERTEN

Uyruğu : Türkiye (TC)

Doğum Tarihi ve Yeri : 22 Ağustos 1989, Melikgazi

Medeni Durumu : Bekâr

Tel : 0553 168 18 89

E-mail : nzlrtn@gmail.com

Yazışma Adresi : Esentepe mahallesi Emirdağ Geçidi Nu:12
Melikgazi / KAYSERİ

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	ERÜ Fen Bilimleri Enstitüsü	2017-Devam ediyor
Lisans	ERÜ F.E.F. Matematik Bölümü	2013
Lise	YDA Kayseri Lisesi, Kayseri	2008

YABANCI DİL

İngilizce