T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

B TİPİ İKİNCİ TÜR (p,q) STİRLİNG SAYILARININ İNŞAASI

Hazırlayan
Mariam ZAAROUR

Danışman
Prof. Dr. Hüseyin ALTINDİŞ

İkinci Danışman
Doç. Dr. Hasan ARSLAN

Doktora Tezi

Haziran 2026
KAYSERİ

T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

B TİPİ İKİNCİ TÜR (p,q) STİRLİNG SAYILARININ İNŞAASI

(Doktora Tezi)

Hazırlayan
Mariam ZAAROUR

Danışman
Prof. Dr. Hüseyin ALTINDİŞ

İkinci Danışman
Doç. Dr. Hasan ARSLAN

Haziran 2026
KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Mariam ZAAROUR

“B Tipi İkinci Tür (p,q) Stirling Sayılarının İnşaası” adlı Doktora Tezi, Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak hazırlanmıştır.

Hazırlayan

Mariam ZAAROUR

Danışman

Prof. Dr. Hüseyin ALTINDİŞ

Matematik ABD Başkanı

Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

TEŞEKKÜR

Doktora sürecim boyunca bana destek olan herkese en içten teşekkürlerimi sunmak isterim.

Danışman hocam Sayın Prof. Dr. Hüseyin ALTINDİŞ'e ve eş danışman hocam Sayın Doç. Dr. Hasan ARSLAN'a, doktora sürecim boyunca bana sundukları değerli rehberlik, sabır ve sürekli teşvikleri için en içten teşekkürlerimi sunarım. Kıymetli görüşleri ve çalışmamı titizlikle değerlendirmeleri, bu tezin gelişiminde önemli bir rol oynamıştır.

Ayrıca, tez izleme komite üyelerim Sayın Prof. Dr. Ali DELİCEOĞLU'na ve Sayın Doç. Dr. Nazmiye ALEMDAR'a, değerli zamanlarını ayırdıkları ve çalışmama katkı sağlayan kıymetli yorum ve önerileri için içtenlikle teşekkür ederim.

Destekleyici bir akademik ortam sundukları için Erciyes Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine de teşekkür ederim.

Bu uzun süreç boyunca desteklerini ve teşviklerini her zaman hissettiğim arkadaşlarıma, özellikle Osama Ealslman'a ve Malak Saleh'e içtenlikle teşekkür ederim.

Sevgileri, sabırları ve sarsılmaz destekleri için aileme en içten teşekkürlerimi sunarım. Bana olan inançları, bu süreç boyunca benim için sürekli bir güç kaynağı olmuştur.

Son olarak, doktora eğitimim süresince sağladığı destekten dolayı Yurtdışı Türkler ve Akraba Topluluklar Başkanlığı'na (YTB) teşekkürlerimi sunarım.

Mariam ZAAROUR

Haziran 2026, KAYSERİ

B TİPİ İKİNCİ TÜR (p,q) STİRLİNG SAYILARININ İNŞAASI

Mariam ZAAROUR

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Doktora Tezi, Haziran 2026
Danışman : Prof. Dr. Hüseyin ALTINDİŞ
İkinci Danışman: Doç. Dr. Hasan ARSLAN

ÖZET

Bu tezde, B tipinde ikinci tür (p,q)-Stirling sayıları ile D tipinde Bell sayıları, işaretli yapılar ve kale yerleştirmelerine dayanan kombinatoryal metodlar kullanılarak ele alınmaktadır.

Tezin ana kısmı B tipinde ikinci tür (p,q)-Stirling sayıları üzerinedir. Bu bölümde, Ferrers tahtalarının B tipine ait bir analogu tanıtıldı ve işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonları ile bu tahtalar üzerindeki kale yerleştirmeleri arasında birebir bir eşleme kurmak için bu tahta kullanıldı. Sonrasında, işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonları kümesi ve Ferrers tahtalarındaki kale yerleşimleri kümesi üzerinde bazı istatistikler tanımlandı. Daha sonra bu istatistiklerin eşdağılımlı olduğu gösterilerek, B tipinde (p,q)-Stirling polinomları için bir kombinatorik yorum elde edildi. Bu yaklaşımı kullanarak, sıfırın varlığına ve işaretlerin dağılımına bağlı durumları gözönüne alarak, bu polinomlar için yineleme bağıntıları ve üreteç fonksiyonları elde edildi. Bunun yanında, Laguerre tahtalarının B tipine ait bir analogu ele alındı ve sabitlenmiş kale yerleştirmelerinin bir sınıfı tanıtıldı. Bu yerleştirmelerin B tipinde Lah sayıları ile sayıldığı gösterildi ve Laguerre tahtaları ile Lah sayıları arasındaki klasik bağlantının işaretli bir analogu verildi.

Tezin son kısmında, D tipinde küme parçalanmalarını sayan D tipinde Bell sayıları incelendi. Bu tür parçalanmaların ayrışımına dayalı bir indirgeme bağıntısı türetildi ve bundan yararlanarak bu sayıların üstel üreteç fonksiyonu belirlendi. Son olarak, D tipi Bell sayıları için açık bir formül elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Bell sayıları, Stirling sayıları, (p,q)-Stirling sayıları, Lah sayıları, üreteç fonksiyonlar, işaretli küme parçalanmaları, kısıtlı büyüme fonksiyonları, kale yerleştirmeleri, Ferrers tahtaları, Laguerre tahtaları.

CONSTRUCTION OF THE SECOND KIND (p,q) STIRLING NUMBERS OF TYPE B

Mariam ZAAROUR

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
Ph.D. Thesis, June 2026
Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin ALTINDİŞ
Co-Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hasan ARSLAN

ABSTRACT

In this thesis, the second kind (p,q)-Stirling numbers of type B and Bell numbers of type D are studied by using combinatorial methods based on signed structures and rook theory.

The main part of the thesis focuses on the second kind (p,q)-Stirling numbers of type B. In this part, a type B analogue of Ferrers boards was introduced, and this board was used to establish a bijection between signed restricted growth functions and rook placements on these boards. Then, some statistics were defined on the set of signed restricted growth functions and on the set of rook placements on Ferrers boards. After that, these statistics were shown to be equidistributed, and a combinatorial interpretation of the (p,q)-Stirling polynomials of type B was obtained. Using this approach, recurrence relations and generating functions for these polynomials were derived by taking into account the cases depending on the presence of zero and the distribution of signs. In addition, a type B analogue of Laguerre boards was considered, and a class of anchored rook placements was introduced. It was shown that these placements are counted by the Lah numbers of type B, and a signed analogue of the classical connection between Laguerre boards and Lah numbers was given.

In the last part of the thesis, Bell numbers of type D, which count set partitions of type D, were studied. A recurrence relation based on a decomposition of such partitions was derived, and by using this relation, the exponential generating function of these numbers was determined. Finally, an explicit formula for the Bell numbers of type D was obtained.

Keywords: Bell numbers, Stirling numbers, (p,q)-Stirling numbers, Lah numbers, generating functions, signed set partitions, restricted growth functions, rook placements, Ferrers boards, Laguerre boards.

İÇİNDEKİLER

B TİPİ İKİNCİ TÜR (p,q) STİRLİNG SAYILARININ İNŞAASI

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK ..... **ii**

KILAVUZA UYGUNLUK ..... **iii**

KABUL VE ONAY ..... **iv**

TEŞEKKÜR ..... **v**

ÖZET ..... **vi**

ABSTRACT ..... **vii**

İÇİNDEKİLER ..... **viii**

KISALTMALAR ..... **xi**

TABLOLAR LİSTESİ ..... **xiii**

ŞEKİLLER LİSTESİ ..... **xiv**

GİRİŞ **1**

1. BÖLÜM
TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Küme Parçalanmaları ve İşaretli Küme Parçalanmaları **3**

1.1.1. Küme Parçalanmaları 3

1.1.2. B Tipinde İşaretli Küme Parçalanmaları 4

1.1.3. D Tipinde Küme Parçalanmaları 6

1.2. Stirling Sayıları ve Bell Sayıları **7**

1.2.1. İkinci Tür Stirling Sayıları 7

1.2.2. Bell Sayıları 9

1.2.3. B Tipi Stirling Sayıları 10

1.2.4. B Tipi Bell Sayıları 11

1.2.5. D Tipi Stirling Sayıları 12

1.2.6. Stirling Permütasyonları ve Düzleştirilmiş Stirling Permütasyonları 13

1.2.7. (p, q)-Stirling Sayıları 14

1.3. Kısıtlı Büyüme Fonksiyonları ve İşaretli Kısıtlı Büyüme Fonksiyonları 15

1.4. Ferrers ve Laguerre Tahtaları Üzerinde Kale Teorisi 18

1.4.1. Ferrers Tahtaları ve Kale Yerleşimleri 18

1.4.2. Laguerre Tahtaları ve Lah Sayıları 22

2. BÖLÜM

İŞARETLİ KISITLI BÜYÜME FONKSİYONLARI VE KALE TEORİSİ ARACILIĞIYLA B TİPİ İKİNCİ TÜR (p, q)-STİRLİNG SAYILARININ İNŞAASI

2.1. B Tipi Ferrers Tahtaları ve Kale Yerleşimleri 24

2.1.1. B Tipi Ferrers Tahtası 25

2.1.2. Kale Yerleşimleri ve Silme Kuralları 27

2.1.3. İşaretli Kısıtlı Büyüme Fonksiyonları ile B Tipi Kale Yerleşimleri Arasında Bir Birebir Eşleme 28

2.1.4. B Tipi İşaretli Kısıtlı Büyüme Fonksiyonları Üzerinde Bazı İstatistikler 32

2.1.5. B Tipi Kale Yerleşimleri Üzerindeki İstatistikler 36

2.2. B Tipi (p, q)-Stirling Polinomları 42

2.2.1. B Tipi (p, q)-Stirling Polinomları İçin İndirgeme Bağıntıları 46

2.2.2. B Tipi (p, q)-Stirling Polinomları İçin Üreteç Fonksiyonları 56

2.3. B Tipi Laguerre Tahtası ve B Tipi Lah Sayıları 60

2.3.1. B Tipi Laguerre Tahtası ve Kale Yerleşimleri 60

2.3.2. Sabitlenmiş B Tipi Laguerre Kale Yerleşimleri 62

2.3.3. B Tipi Laguerre Kale Sayıları ve Lah Sayıları 65

3. BÖLÜM

D TİPİ BELL SAYILARI

3.1. D Tipi Bell Sayıları 69

3.1.1. $D(n)$ İçin Bir İndirgeme Bağıntısı 71

3.1.2. $D(n)$ Sayılarının Üstel Üreteç Fonksiyonu 73

3.1.3. $D(n)$ İçin Açık Bir Formül..... 74

3.1.4. Düzleştirilmiş Stirling Permütasyonları Yoluyla Kombinatoryal Bir Yorum... 76

KAYNAKÇA 78

DİZİN 81

ÖZGEÇMİŞ 83

KISALTMALAR

$[n]$	:	$\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesi
$\langle n \rangle$	:	$\{\overline{n}, \ldots, \overline{1}, 0, 1, \ldots, n\}$ kümesi
$\langle n \rangle'$	:	$\{\overline{n}, \ldots, \overline{1}, 1, \ldots, n\}$ kümesi
$\lvert x \rvert$	:	x in mutlak değeri
Π_n	:	$[n]$ kümesinin tüm küme parçalanmalarının kümesi
$\Pi_{n,k}$	:	$[n]$ kümesinin k bloklu küme parçalanmalarının kümesi
Π_n^B	:	B tipi tüm işaretli küme parçalanmalarının kümesi
Π_n^D	:	D tipi tüm küme parçalanmalarının kümesi
$\Pi_{n,k}^D$	:	$2k+1$ bloktan oluşan D tipi küme parçalanmalarının kümesi
$\vdash_B$	:	B tipi işaretli küme parçalanması gösterimi
R_n	:	Uzunluğu n olan tüm kısıtlı büyüme fonksiyonlarının kümesi
SRGF	:	İşaretli kısıtlı büyüme fonksiyonu
SRGF_n	:	n boyutundaki işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonlarının kümesi
$\mathrm{SRGF}_{n,k}^{(B,0)}$	:	Sıfır içermeyen B tipi işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonlarının kümesi
$\mathrm{SRGF}_{n,k}^{(B,1)}$	:	Sıfır içeren B tipi işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonlarının kümesi
Ω_n	:	n mertebesindeki Stirling permütasyonlarının kümesi
$\mathrm{flat}(\Omega_n)$	:	n mertebesindeki düzleştirilmiş Stirling permütasyonlarının kümesi
$S(n,k)$	:	İkinci tür Stirling sayıları
$A(n)$	:	Bell sayıları
$S_B(n,k)$	:	B tipi ikinci tür Stirling sayıları
$B(n)$	:	B tipi Bell sayıları
$S_D(n,k)$	:	D tipi ikinci tür Stirling sayıları
$D(n)$	:	D tipi Bell sayıları
$S_{p,q}(n,k)$	:	İkinci tür (p,q)-Stirling sayıları
$S_{p,q}^{(B,\varepsilon)}(n,k)$	:	B tipi rafine (p,q)-Stirling polinomları
$[k]_{p,q}$	:	(p,q)-tamsayısı
$L(n,k)$	:	Lah sayıları
$L_B(n,k)$	:	B tipi Lah sayıları
$r_k(B)$	:	B tahtası üzerindeki k-kale yerleşimlerinin sayısı
$B(b_1, \ldots, b_n)$	:	Sütun yükseklikleri $b_1, \ldots, b_n$ olan tahta
$\mathcal{L}_n$	:	Laguerre tahtası

$\mathcal{L}_n^{(B)}$	:	B tipi Laguerre tahtası
$\mathcal{F}_n^{(B)}$	:	B tipi Ferrers tahtası
$\mathcal{T}_n^{(B)}$	:	$\mathcal{F}_n^{(B)}$ üzerindeki n boyutlu B tipi kale yerleşimlerinin kümesi
$\mathcal{T}_{n,k}^{(B)}$	:	Maksimum mutlak satır değeri k olan B tipi kale yerleşimlerinin kümesi
$\mathcal{R}_{n-k}^{(B)}(\mathcal{L}_n^{(B)})$	:	(n,k) tipindeki sabitlenmiş B tipi Laguerre kale yerleşimlerinin kümesi
$r_{n-k}^{(B)}(\mathcal{L}_n^{(B)})$	:	B tipi Laguerre kale sayısı
$(x)_k$	:	Düşen faktöriyel
$[x]^k$	:	Yükselen faktöriyel
$(x)_k^B$	:	B tipi düşen faktöriyel
$[x]_n^B$	:	B tipi yükselen faktöriyel
$<_{\text{lev}}$	:	İşaretli tam sayılar üzerindeki seviye sıralaması
$L_B(w)$	:	Bir işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonu w nin soldan ilk mutlak değerler kümesi
$lb_i^B(w)$	:	i konumundaki B tipi sol-büyük istatistiği
$ls_i^B(w)$	:	i konumundaki B tipi sol-küçük istatistiği
$\text{levLB}_B(w)$	:	w nin seviye-ağırlıklı sol-büyük istatistiği
$\text{levLS}_B(w)$	:	w nin seviye-ağırlıklı sol-küçük istatistiği
$L_B(P)$	:	Bir B tipi kale yerleşimi P nin soldan ilk mutlak sütunlar kümesi
$\delta_i^{SE}(P)$	:	i sütunundaki kaleye isabet eden SE-silmelerinin sayısı
$\delta_i^{NE}(P)$	:	i sütunundaki kaleye isabet eden NE-silmelerinin sayısı
$\text{levSE}_B(P)$	:	P nin seviye-ağırlıklı SE istatistiği
$\text{levNE}_B(P)$	:	P nin seviye-ağırlıklı NE istatistiği
$D(x)$	:	D tipi Bell sayılarının üstel üreteç fonksiyonu

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 1.1. $0 \leq n \leq 7$ için Bell sayıları $A(n)$ ve ikinci tür Stirling sayıları $S(n,k)$. 8

Tablo 1.2. $0 \leq n \leq 7$ için B tipi Bell sayıları ve B tipi Stirling sayıları. 11

Tablo 2.1. $w = 0\,\overline{1}\,1\,0\,0\,\overline{2}\,2\,\overline{3}\,3\,3\,\overline{3}\,\overline{2}\,2\,1\,\overline{1}$ için $lb_i^B(w)$ ve $ls_i^B(w)$ değerleri. 35

Tablo 2.2. $P = \Phi(w)$ kale yerleşimi için SE ve NE kurallarına göre elde edilen $\delta_i^{SE}(P)$ ve $\delta_i^{NE}(P)$ silme istatistikleri..... 40

Tablo 2.3. $\mathrm{SRGF}_{3,2}^{(B)}$ kümesi üzerinde $\mathrm{levLB}_B(w)$ ve $\mathrm{levLS}_B(w)$ istatistiklerinin dağılımı. 44

Tablo 2.4. $1 \leq k \leq n \leq 5$ için B tipi (p,q)-Stirling polinomlarının terimleri. 45

Tablo 2.5. $n = 4$, $k = 3$ ve $P(w) = \{3\}$ koşulları altında, 0 harfinin bulunmadığı durumdaki diziler için $\mathrm{levLS}_B(w)$ ve $\mathrm{levLB}_B(w)$ değerleri. 55

Tablo 3.1. $0 \leq k \leq n \leq 7$ için D tipi Bell sayıları $D(n)$ ve ikinci tür D tipi Stirling sayıları $S_D(n,k)$ değerleri. 70

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. $B(1,3,4,5,5)$ Ferrers tahtası. 19

Şekil 1.2. $B(1,3,5,4,5)$ tahtası. 20

Şekil 1.3. $B(1,3,4)$ Ferrers tahtası üzerinde bir 3-kale yerleşimi. 20

Şekil 1.4. $\mathcal{L}_4 = B(3,3,3,3)$ Laguerre tahtası. 23

Şekil 2.1. $n = 3$ için, satırları seviye sıralamasına göre listelenmiş B tipi $\mathcal{F}_3^{(B)}$ Ferrers tahtası. 26

Şekil 2.2. $(0,\overline{1},2)$ dizisine karşılık gelen, $\mathcal{F}_3^{(B)}$ üzerindeki bir B tipi kale yerleşimi. .. 28

Şekil 2.3. $w = 0\,\overline{1}\,1\,0\,0\,\overline{2}\,2\,\overline{3}\,3\,3\,\overline{3}\,\overline{2}\,2\,1\,\overline{1}$ dizisi için $\mathcal{F}_7^{(B)}$ üzerinde elde edilen $\Phi(w)$ kale yerleşimi. 32

Şekil 2.4. $P = \Phi(w)$ kale yerleşimi için SE tipi silmeler. Gölgeli hücreler, $L_B(P) = \{1,2,3,4\}$ sütunlarında bulunan kaleler tarafından silinen hücreleri göstermektedir. 39

Şekil 2.5. B tipi Laguerre tahtası $\mathcal{L}_4^{(B)}$. 61

Şekil 2.6. $\mathcal{L}_4^{(B)}$ üzerinde bir B tipi kale yerleşimi: $P = \{(1,3),(2,\overline{1}),(4,4)\}$. 62

Şekil 2.7. $n = 4$ ve $k = 2$ için sabitlenmiş bir B tipi Laguerre kale yerleşimi. Gölgeli satırlar kesilmiş satırları, gölgeli sütun çiftleri ise lider sütunları göstermektedir. 63

Şekil 2.8. $(7,4)$ tipinde sabitlenmiş bir B tipi Laguerre kale yerleşimi. Gölgeli satırlar kesilmiş satırları, gölgeli sütun çiftleri ise lider sütunları göstermektedir. 65

GİRİŞ

İkinci tür Stirling sayıları, sonlu bir kümenin parçalanmalarını saymaktadır (bkz. [1]). Küme parçalanmalarının, kısıtlı büyüme fonksiyonları ile birebir eşleştiği iyi bilinmektedir (bkz. [2]). Bu sayılar aynı zamanda merdiven biçimli Ferrers tahtaları üzerindeki kale yerleşimlerinin sayısını da verir (bkz. [3]). Bunlarla yakından ilişkili olan Bell sayıları ise tüm bu parçalanmaların sayısını vermektedir.

Literatürde bu sayıların çeşitli genellemeleri de çalışılmıştır. B tipinde, küme parçalanmalarının yerini hiperoktahedral grupla ilişkili işaretli küme parçalanmaları alır. Bu kavram Reiner [4] tarafından tanıtılmış ve daha sonra Sagan ve Swanson [5] tarafından ayrıntılı olarak incelenmiştir. D tipinde ise bu işaretli küme parçalanmaları, sıfır blogunun ya hiç pozitif eleman içermemesi ya da en az iki pozitif eleman içermesi koşulu ile sınırlandırılır (bkz. [6]). D tipi kombinatoryal yapıların çeşitli yönleri, özellikle düzensizlik polinomları bağlamında incelenmiştir (bkz. [7]). Ayrıca, B tipi düzensizlik matrisi için kombinatoryal bir yaklaşım verilmiştir (bkz. [8]). Aynı zamanda klasik Weyl grupları üzerindeki düzensizlikler de güncel çalışmalarda detaylı olarak araştırılmıştır (bkz. [9]). İşaretlerin varlığı esasında, eşlenik bloklar ve sıfır blogu üzerindeki koşullar gibi yeni yapısal özelliklerin ortaya çıkmasına neden olmaktadır.

Wachs ve White [10], q-Stirling sayılarının, küme parçalanmaları üzerindeki istatistiklere ait üreteç fonksiyonları olarak ortaya çıktığını göstermiştir. Ayrıca, kısıtlı büyüme fonksiyonları üzerindeki belirli istatistiklerin ortak dağılımı aracılığıyla (p, q)-Stirling sayılarını tanımlamışlar ve bu istatistikleri kale yerleşimleri kullanarak açıklamışlardır. Bununla birlikte, B tipi (p, q)-Stirling sayıları için doğrudan bir kale kuramsal yorumu henüz geliştirilmemiştir.

B tipi küme parçalanışları için Acharyya [11], işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonlarını tanıtmış ve bunların işaretli küme parçalanışları ile birebir eşleştiğini göstermiştir. Ayrıca

Acharyya bu çalışmasında, ilk olarak Wachs ve White [10] tarafından tanıtılan ikinci tür (p, q)-Stirling sayılarının B tipi bir benzerinin var olup olmadığını ve bu yapılar üzerindeki ilgili istatistiklerin ortak dağılımları için üreteç fonksiyonlarının elde edilip edilemeyeceğini sormuştur.

Bu tezin esas kısmı aslında bu soruya cevap vermektedir. Bu bölümde, öncelikle yapısı işaretli sınırlı büyüme koşulunu yansıtan B tipi bir Ferrers tahtası tanıtılmıştır. Daha sonra işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonları ile bu tahta üzerindeki kale yerleşimleri arasında birebir bir eşleşme kurulmaktadır. Bu eşleşme, her iki nesne üzerinde istatistikler tanımlamamıza ve B tipi (p, q)-Stirling polinomlarını kombinatoryal olarak yorumlamamıza olanak sağlamaktadır. Bunun sonucunda, bu polinomlar için yineleme bağıntıları ve üreteç fonksiyonları elde edilmektedir.

Ayrıca, tezde Laguerre tahtalarının B tipi bir benzeri de incelenmiştir. Klasik durumda, Laguerre tahtaları üzerindeki kale yerleşimlerinin sayısı Lah sayılarını vermektedir (bkz. [12–14]). B tipinde ise sabitlenmiş yerleşimleri tanıttıktan sonra, B tipi Laguerre tahtaları üzerindeki kale yerleşimlerinin sayısının [15] de verilen B tipi Lah sayıları ile sayıldığı gösterilmiştir.

Tezin son kısmında D tipi Bell sayıları incelenmiştir. Klasik Bell sayıları, sonlu bir kümenin tüm parçalanmalarını saymakta ve ikinci tür Stirling sayıları ile yakından ilişkilidir. D tipinde ise bu sayılar, işaretli küme parçalanmalarının sınırlandırılmış bir sınıfını saymaktadır. Bu sayılar için bir yineleme bağıntısı türetildikten sonra bu sayılara ait üstel üreteç fonksiyonu belirlenmiştir. İndirgeme bağıntısı ve üstel üreteç fonksiyonları yardımıyla D tipi Bell sayıları için açık bir formül elde edilmiştir. Ayrıca, düzleştirilmiş Stirling permütasyonlarının sınırlı bir sınıfı aracılığıyla D tipi Bell sayıları için kombinatoryal bir yorum verilmiştir (bkz. [16]).

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tez boyunca kullanılacak temel kavramlar ve tanımlar hatırlatılmıştır. İkinci bölümde, işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonları ve kale yerleşimleri kullanılarak B tipi (p, q)-Stirling sayıları incelenmiş, bunlarla ilişkili istatistikler ve üreteç fonksiyonları geliştirilmiştir. Ayrıca B tipi Laguerre tahtası tanıtılmıştır. Üçüncü ve son bölümde ise D tipi Bell sayıları incelenmiş ve bu sayıların temel özellikleri elde edilmiştir.

1. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Küme parçalanmaları, kombinatorikte temel argümanlardan biridir. Küme parçalanmalarının çeşitli kısıtlar altında sayılması; Bell sayıları, ikinci tür Stirling sayıları ve Lah sayıları gibi birçok klasik sayı dizisine götürür [1]. Bu kavramların doğal bir genellemesi, işaretli elemanlara izin verilmesi veya belirli simetri koşullarının uygulanmasıyla elde edilir. Bu şekilde, işaretli küme parçalanmalarına ve klasik tiplerdeki küme parçalanmalarına, özellikle B ve D tiplerindeki analoglarına ulaşılır [17, 18]. Bu yapılara karşılık gelen sayma dizileri; Bell, Stirling ve Lah sayılarının tipe bağlı analogları olarak görülebilir ve bu tezde geliştirilen sonuçların kombinatoryal temelini oluşturur.

Tez boyunca kullanılacak bazı gösterimleri vererek başlayalım. n pozitif bir tamsayı olmak üzere $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ olsun. Ayrıca $\langle n \rangle := \{\overline{n}, \ldots, \overline{1}, 0, 1, \ldots, n\}$ ve $\langle n \rangle' := \{\overline{n}, \ldots, \overline{1}, 1, \ldots, n\}$ olarak tanımlansın. $j \in [n]$ için, $-j$ negatif tam sayısını göstermek üzere $\bar{j}$ yazacağız. Herhangi bir $x \in \langle n \rangle$ tamsayısının mutlak değeri $|x|$ ile gösterilir.

1.1. Küme Parçalanmaları ve İşaretli Küme Parçalanmaları

Küme parçalanmasının tanımını hatırlatarak başlayalım.

1.1.1. Küme Parçalanmaları

Tanım 1.1. $n \geq 1$ olsun. $[n]$ kümesinin k bloklu bir *küme parçalanması*; birleşimleri $[n]$ olan, boş olmayan ve ikişer ikişer ayrık alt kümelerden oluşan bir $\sigma = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ koleksiyonudur. $B_1, \ldots, B_k$ alt kümelerine σ nın *blokları* denir [1]. σ parçalanmasını $\sigma = \{B_1\}\{B_2\}\ldots\{B_k\}$ ile veya $\sigma = B_1 \mid B_2 \mid \cdots \mid B_k$ şeklinde göstereceğiz. σ küme parçalanmasının bloklarındaki kümeleri yazarken çoğu zaman parantez ve bu kümelerin elemanları arasında karışıklık olmadığı sürece virgül de kullanılmayacaktır.

Örnek 1.1. $n = 3$ için $[3] = \{1, 2, 3\}$ kümesi aşağıdaki şekillerde parçalanabilir:

$$\{1\}\,\{2\}\,\{3\}, \quad \{1, 2\}\,\{3\}, \quad \{1, 3\}\,\{2\}, \quad \{2, 3\}\,\{1\}, \quad \{1, 2, 3\}.$$

Dolayısıyla, $[3]$ kümesinin 5 tane küme parçalanması vardır. Bu küme parçalanmaları aynı zamanda

$$1 \mid 2 \mid 3, \quad 12 \mid 3, \quad 13 \mid 2, \quad 23 \mid 1, \quad 123$$

şeklinde de gösterilir.

Not 1.1. *$[n]$ kümesinin bir $\sigma = B_1 \mid \cdots \mid B_k$ parçalanması eğer*

$$\min B_1 < \cdots < \min B_k$$

koşulu sağlanıyorsa σ ya standart formda denir. Özellikle, $\min B_1 = 1$ olur. Bu tez boyunca, $[n]$ kümesinin tüm küme parçalanmalarının standart formda yazıldığı kabul edilecektir. $[n]$ kümesinin tüm parçalanmalarının kümesini Π_n ile ve $[n]$ kümesinin tam olarak k bloklu parçalanmalarının kümesini $\Pi_{n,k}$ ile göstereceğiz (bkz. [19]).

Örnek 1.2. $\sigma = \{1, 4\} \mid \{2, 5, 6\} \mid \{3\}$ parçalanması $\Pi_{6,3}$ kümesine aittir ve standart formda yazılmıştır, çünkü

$$\min\{1, 4\} < \min\{2, 5, 6\} < \min\{3\}$$

dür. Diğer taraftan, $\tau = \{2, 5, 6\} \mid \{1, 4\} \mid \{3\}$ parçalanması $[6]$ kümesinin aynı küme parçalanmasını temsil eder, ancak standart formda yazılmamıştır, çünkü

$$\min\{2, 5, 6\} > \min\{1, 4\}$$

dür. Aslında, τ parçalanmasının blokları yeniden sıralandığında standart form σ elde edilir.

1.1.2. B Tipinde İşaretli Küme Parçalanmaları

Bu kısımda, işaretli elemanlara izin vererek küme parçalanması kavramını [5] çalışmasını referans alarak B tipinde işaretli küme parçalanmasına genişletiyoruz.

Tanım 1.2. $\langle n \rangle$ kümesinin $2k + 1$ bloklu bir *işaretli küme parçalanması*; $\langle n \rangle$ kümesinin

$$\tau = P_0 \mid P_1/P_2 \mid P_3/P_4 \mid \cdots \mid P_{2k-1}/P_{2k}$$

biçiminde yazılan ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir parçalanmasıdır:

1. $0 \in P_0$ ve eğer $i \in P_0$ ise $\overline{i} \in P_0$ olur;

2. $1 \leq i \leq k$ koşulunu sağlayan her i için $P_{2i-1} = \overline{P_{2i}}$ eşitliği sağlanır; burada $\overline{P_{2i}} := \{\overline{s} : s \in P_{2i}\}$ olarak tanımlanır.

P_{2i-1} ve P_{2i} bloklarına *eşlenmiş bloklar*, P_0 bloguna ise *sıfır blogu* denir [5].

$\langle n \rangle$ kümesinin bir işaretli küme parçalanmasını $\tau \vdash_B \langle n \rangle$ ile gösteririz.

Örnek 1.3. $n = 2$ için, $\langle 2 \rangle = \{\overline{2}, \overline{1}, 0, 1, 2\}$ olsun. Aşağıdaki parçalanmayı göz önüne alalım:

$$\tau = \{0, 1, \overline{1}\} \mid \{2\}/\{\overline{2}\}.$$

Burada, $P_0 = \{0, 1, \overline{1}\}$ sıfır blogudur ve $\{2\}$ ile $\{\overline{2}\}$ blokları bir blok çifti oluşturur.

Not 1.2. *Her bir blok içindeki elemanlar herhangi bir sırayla yazılabilir, eşlenmiş blokların sırası ters çevrilebilir ve blok çiftleri kendi aralarında yeniden sıralanabilir. Bu işlemler işaretli küme parçalanmasını değiştirmez (bkz. [5]).*

Not 1.3. *$i = 0, 1, \ldots, 2k$ için*

$$m_i := \min\{\, |x| : x \in P_i \,\}$$

olsun. Özellikle, tüm $i = 1, \ldots, k$ için $|P_{2i-1}| = |P_{2i}|$ eşitliği sağlanır. Bir işaretli küme parçalanması verildiğinde eğer

1. *tüm $i = 1, \ldots, k$ için $m_{2i} \in P_{2i}$ ve*

2. $0 = m_0 < m_2 < m_4 < \cdots < m_{2k}$

şartları sağlanıyorsa bu durumda bu işaretli küme parçalanmasına standart formdadır denir. Bu tez boyunca, tüm işaretli küme parçalanmalarının standart formda olduğu kabul edilecektir.

Not 1.4. *$\langle n \rangle$ kümesinin tüm işaretli küme parçalanmalarının ailesini Π_n^B ile gösterelim. $k \geq 0$ için, tam olarak $2k + 1$ bloktan oluşan işaretli küme parçalanmalarını içeren Π_n^B nin alt ailesini $\Pi_{n,k}^B$ ile gösterelim.*

Örnek 1.4. Aşağıdaki işaretli küme parçalanmasını göz önüne alalım:

$$\tau = 0 \mid \bar{1}, 2/1, \bar{2} \mid \bar{3}, \bar{5}/3, 5 \mid \bar{4}, \bar{6}, 7/4, 6, \bar{7}$$

Bu parçalanma standart formdadır. Gerçekten,

$$m_0 = 0, \qquad m_1 = m_2 = 1, \qquad m_3 = m_4 = 3, \qquad m_5 = m_6 = 4$$

dür. Dolayısıyla,

$$0 = m_0 < m_2 < m_4 < m_6$$

olup her bir m_{2i} minimum tamsayısı P_{2i} blogunda yer alır.

1.1.3. D Tipinde Küme Parçalanmaları

Şimdi, işaretli küme parçalanmalarının bir kısıtlaması olan D tipinde küme parçalanmalarını ele alacağız.

Tanım 1.3. *D tipinde bir küme parçalanması*; sıfır blogu $[n]$ kümesinin ya hiçbir elemanını içermeyecek ya da en az iki elemanını içerecek şekilde olan $\langle n \rangle$ kümesinin işaretli bir küme parçalanmasıdır. Böyle bir parçalanma aynı zamanda *D tipi küme parçalanması* olarak da adlandırılır [6].

Not 1.5. *$\langle n \rangle$ kümesinin tüm D tipindeki küme parçalanmalarının kümesini Π_n^D ile gösterelim. $k \geq 0$ için, tam olarak $2k+1$ bloktan oluşan D tipi küme parçalanmalarını içeren Π_n^D nin alt kümesini de $\Pi_{n,k}^D$ ile gösterelim.*

Örnek 1.5. Aşağıdaki işaretli parçalanmalar

$$\rho = \{0, \bar{2}, 2, \bar{3}, 3, \bar{5}, 5\} \mid \{\bar{1}\}/\{1\} \mid \{\bar{4}\}/\{4\}$$
$$\tau = \{0\} \mid \{\bar{1}, 2\}/\{1, \bar{2}\} \mid \{\bar{3}, \bar{5}\}/\{3, 5\} \mid \{\bar{4}\}/\{4\}$$

$\langle 5 \rangle$ kümesinin D tipinde küme parçalanmalarıdır. Çünkü her iki durumda da sıfır blogu, $[5]$ kümesinin ya hiçbir pozitif elemanını içermez ya da en az iki pozitif elemanını içerir. Diğer taraftan,

$$\gamma = \{0, \bar{5}, 5\} \mid \{\bar{1}, \bar{3}, 4\}/\{1, 3, \bar{4}\} \mid \{\bar{2}\}/\{2\}$$

işaretli küme parçalanması D tipinde bir küme parçalanması değildir, çünkü sıfır blogu sadece bir pozitif eleman içerir.

1.2. Stirling Sayıları ve Bell Sayıları

Şimdi ikinci tür Stirling sayılarını ve Bell sayılarını hatırlayalım. İkinci tür Stirling sayıları, $[n]$ kümesinin sabit sayıda bloga sahip parçalanmalarını sayarken, Bell sayıları bu türdeki tüm parçalanmaları sayar. Bu sayılar tez boyunca kullanılacak olup, ilerleyen kısımlarda ele alınacak genelleştirmeler için temel oluşturacaktır. Stirling sayılarının Coxeter grupları ve daha genel olarak kompleks yansıma grupları bağlamındaki analogları da literatürde incelenmiştir (bkz. [5, 20]).

1.2.1. İkinci Tür Stirling Sayıları

Tanım 1.4. $n \geq 0$ ve $0 \leq k \leq n$ tam sayıları için, $S(n,k)$ ile gösterilen *ikinci tür Stirling sayıları*, $[n]$ kümesinin tam olarak k tane boş olmayan bloka sahip küme parçalanmalarının sayısını verir [1]. Dolayısıyla, $S(n,k) = \mid \Pi_{n,k} \mid$ dır.

İkinci tür Stirling sayısı $S(n,k)$ nın kombinatoryal yorumu aşağıdaki gibidir: n tane farklı nesnenin k tane özdeş kutuya hiç bir kutu boşta kalmayacak biçimde yerleştirilebilme sayısı $S(n,k)$ dır.

Örnek 1.6. $n = 3$ için $[3] = \{1,2,3\}$ kümesinin aşağıdaki parçalanmaları vardır:

$$\{1,2,3\}, \qquad \{1\} \mid \{2,3\}, \qquad \{2\} \mid \{1,3\}, \qquad \{3\} \mid \{1,2\}, \qquad \{1\} \mid \{2\} \mid \{3\}$$

Parçalanmaları blok sayılarına göre saydığımızda,

$$S(3,1) = 1, \qquad S(3,2) = 3, \qquad S(3,3) = 1$$

olduğu elde edilir.

Not 1.6. *İkinci tür Stirling sayıları* $S(0,k) = \delta_{0,k}$ *başlangıç koşulları ile birlikte aşağıdaki indirgeme bağıntısını sağlar: her* $n \geq 1$ *için*

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$$

olup burada $\delta_{i,j}$ *Kronecker deltasını göstermektedir [1].*

Çevrimiçi tamsayı dizileri ansiklopedisi (OEIS), Neil James Alexander Sloane tarafından kurulmuştur. Sloane, 1964 yılında öğrenciyken dizileri indeks kartlarıyla toplayıp

koleksiyonunu oluşturmaya başlamış, 1996 yılında on bin civarında tamsayı dizisi içeren koleksiyonunu internet ortamına taşımış ve çevrimiçi tamsayı dizileri ansiklopedisini kurmuştur. İkinci tür Stirling sayıları çevrimiçi tamsayı dizileri ansiklopedisinde A008277 kodu ile yer almaktadır (bkz. https://oeis.org/A008277).

Tablo 1.1. $0 \leq n \leq 7$ için Bell sayıları $A(n)$ ve ikinci tür Stirling sayıları $S(n,k)$.

n	$A(n)$	$S(n,0)$	$S(n,1)$	$S(n,2)$	$S(n,3)$	$S(n,4)$	$S(n,5)$	$S(n,6)$	$S(n,7)$
0	1	1							
1	1	0	1						
2	2	0	1	1					
3	5	0	1	3	1				
4	15	0	1	7	6	1			
5	52	0	1	15	25	10	1		
6	203	0	1	31	90	65	15	1	
7	877	0	1	63	301	350	140	21	1

Not 1.7. *İkinci tür Stirling sayıları sabir bir k doğal sayısı için aşağıdaki üstel üreteç fonksiyonuna sahiptir:*

$$\sum_{n\geq 0} S(n,k)\frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x-1)^k}{k!}$$

[1].

Örnek 1.7. $k=2$ için üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n\geq 0} S(n,2)\frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x-1)^2}{2}$$

şeklini alır. Sağ tarafı sıfır noktası civarında Taylor serisine açarsak,

$$\frac{(e^x-1)^2}{2} = \frac{x^2}{2!} + \frac{3x^3}{3!} + \frac{7x^4}{4!} + \cdots$$

elde ederiz. $\frac{x^n}{n!}$ terimlerinin katsayılarını karşılaştırdığımızda

$$S(2,2)=1, \quad S(3,2)=3, \quad S(4,2)=7$$

sonuçlarına ulaşırız. Bu değerler Tablo 1.1 de verilen değerlerle uyumludur.

1.2.2. Bell Sayıları

Şimdi, ikinci tür Stirling sayılarının tüm olası blok sayıları üzerinden toplanmasıyla elde edilen Bell sayılarını ele alalım.

Tanım 1.5. $A(n)$ ile gösterilen *Bell sayısı*, $[n]$ kümesinin küme parçalanmalarının sayısıdır [1]. Bu sayı

$$A(n) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$$

ile verilir.

Örnek 1.8. $n = 3$ için

$$A(3) = S(3,1) + S(3,2) + S(3,3) = 1 + 3 + 1 = 5$$

elde edilir. Bu değer Tablo 1.1 de verilen değerle örtüşmektedir.

Not 1.8. *Bell sayıları aşağıdaki indirgeme bağıntısını sağlamaktadır: Her n doğal sayısı için*

$$A(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A(k)$$

dır (bkz. [1]).

Örnek 1.9. Yukarıdaki indirgeme bağıntısını kullanarak ilk birkaç Bell sayısını hesaplayalım:

$$A(1) = A(0) = 1,$$
$$A(2) = \binom{1}{0}A(0) + \binom{1}{1}A(1) = 1 + 1 = 2,$$
$$A(3) = \binom{2}{0}A(0) + \binom{2}{1}A(1) + \binom{2}{2}A(2) = 1 + 2 + 2 = 5.$$

Not 1.9. *Bell sayıları aşağıdaki üstel üreteç fonksiyonuna sahiptir:*

$$\sum_{n\geq 0} A(n)\frac{x^n}{n!} = e^{e^x - 1}$$

(bkz. [1]).

Örnek 1.10. Bell sayılarının üstel üreteç fonksiyonunu sıfır noktası civarında Taylor serisine açarsak,

$$e^{e^x-1} = 1 + x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{5x^3}{3!} + \cdots$$

elde ederiz. Dolayısıyla, $\frac{x^n}{n!}$ terimlerinin katsayılarını karşılaştırdığımızda

$$A(0) = 1, \quad A(1) = 1, \quad A(2) = 2, \quad A(3) = 5$$

sonucuna ulaşırız. Bu değerler Tablo 1.1 de verilen değerlerle uyumludur.

Dobiński [21], her n doğal sayısı için Bell sayısı $A(n)$ nin aşağıdaki seri toplamı ile de ifade edilebileceğini göstermiştir:

$$A(n) = e^{-1} \sum_{r \geq 0} \frac{r^n}{r!}. \tag{1.1}$$

Bell sayıları, düzensizlik sayıları ile ilişkili çeşitli özdeşliklerde de ortaya çıkmaktadır (bkz. [22]).

1.2.3. B Tipi Stirling Sayıları

Şimdi, işaretli küme parçalanmaları kullanılarak tanımlanan ikinci tür Stirling sayılarının bir B tipi analogunu tanıtalım.

Tanım 1.6. $n \geq 0$ ve $0 \leq k \leq n$ tam sayıları için, $S_B(n,k)$ ile gösterilen B tipi Stirling sayıları, $\langle n \rangle$ kümesinin tam olarak k tane sıfır olmayan blok çiftine sahip işaretli küme parçalanmalarının sayısıdır [4]. Dolayısıyla, $S_B(n,k) = \mid \Pi_{n,k}^B \mid$ yazarız.

Örnek 1.11. $n = 2$ için $\langle 2 \rangle = \{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$ kümesinin tam olarak bir tane sıfır olmayan blok çiftine sahip işaretli küme parçalanmaları

$$\{0, 2, \bar{2}\} \mid \{\bar{1}\}/\{1\}, \qquad \{0, 1, \bar{1}\} \mid \{\bar{2}\}/\{2\},$$

$$\{0\} \mid \{\bar{1}, 2\}/\{1, \bar{2}\}, \qquad \{0\} \mid \{\bar{1}, \bar{2}\}/\{1, 2\}$$

şeklindedir. Dolayısıyla,

$$S_B(2,1) = 4$$

olup bu değer Tablo 1.2 de verilen değerle örtüşmektedir.

B tipi ikinci tür Stirling sayıları çevrimiçi tamsayı dizileri ansiklopedisinde A039755 etiketi ile yer almaktadır (bkz. www.oeis.org/A039755).

Tablo 1.2. $0 \leq n \leq 7$ için B tipi Bell sayıları ve B tipi Stirling sayıları.

n	$B(n)$	$S_B(n,0)$	$S_B(n,1)$	$S_B(n,2)$	$S_B(n,3)$	$S_B(n,4)$	$S_B(n,5)$	$S_B(n,6)$	$S_B(n,7)$
0	1	1							
1	2	1	1						
2	6	1	4	1					
3	24	1	13	9	1				
4	116	1	40	58	16	1			
5	648	1	121	330	170	25	1		
6	4088	1	364	1771	1520	395	36	1	
7	28640	1	1093	9219	12411	5075	791	49	1

Not 1.10. *B tipi Stirling sayıları $S_B(0,k) = \delta_{0,k}$ başlangıç koşulu ile beraber aşağıdaki indirgeme bağıntısını sağlar [4]: her $n, k \geq 1$ için*

$$S_B(n,k) = S_B(n-1,k-1) + (2k+1)S_B(n-1,k)$$

dır.

1.2.4. B Tipi Bell Sayıları

Şimdi, $\langle n \rangle$ kümesinin tüm işaretli küme parçalanmalarını sayan B tipi Bell sayılarını ele alacağız.

Tanım 1.7. $B(n)$ ile gösterilen *B tipi Bell sayıları*, $\langle n \rangle$ kümesinin işaretli küme parçalanmalarının sayısını verir. Bu sayılar

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n} S_B(n,k)$$

ile verilir. Ayrıca bu sayılar Dowling sayıları olarak da bilinir [23].

Örnek 1.12. $n = 2$ için

$$B(2) = S_B(2,0) + S_B(2,1) + S_B(2,2) = 1 + 4 + 1 = 6$$

elde edilir. Bu değer Tablo 1.2 de verilen değerle örtüşmektedir.

Not 1.11. *B tipi Bell sayıları aşağıdaki indirgeme bağıntısını sağlar: her $n \geq 0$ için*

$$B(n+1) = B(n) + \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} B(n-k) \tag{1.2}$$

dir [24].

Örnek 1.13. (1.2) de verilen indirgeme bağıntısını kullanarak ilk birkaç B tipi Bell sayısını hesaplayalım:

$$B(1) = B(0) + \binom{0}{0}2^0 B(0) = 1 + 1 = 2,$$

$$B(2) = B(1) + \binom{1}{0}2^0 B(1) + \binom{1}{1}2^1 B(0) = 2 + 2 + 2 = 6,$$

$$B(3) = B(2) + \binom{2}{0}2^0 B(2) + \binom{2}{1}2^1 B(1) + \binom{2}{2}2^2 B(0) = 6 + 6 + 8 + 4 = 24.$$

B tipi Bell sayılarının ilerleyen bölümlerde kullanacağımız iki önemli kombinatoryal özelliğini vereceğiz. Bunlardan ilki, (1.1) de verilen Dobiński formülünün B tipi bir analogudur.

Not 1.12. *$n \geq 0$ için B tipi Bell sayıları aşağıdaki açık formülle verilir [24]:*

$$B(n) = e^{-1/2} \sum_{r \geq 0} \frac{(2r+1)^n}{2^r r!}. \tag{1.3}$$

Not 1.13. *B tipi Bell sayılarının üstel üreteç fonksiyonu [5] aşağıdaki şekilde verilir:*

$$B(x) = e^{\frac{e^{2x}}{2} + x - \frac{1}{2}}. \tag{1.4}$$

1.2.5. D Tipi Stirling Sayıları

Şimdi, D tipi küme parçalanmaları kullanılarak tanımlanan ikinci tür Stirling sayılarının bir D tipi analogunu tanıtalım.

Tanım 1.8. $n \geq 0$ ve $0 \leq k \leq n$ tam sayıları için, $S_D(n,k)$ ile gösterilen *D tipi Stirling sayıları*, $\langle n \rangle$ kümesinin tam olarak k tane sıfır olmayan blok çiftine sahip D tipi küme parçalanmalarının sayısını verir [4]. Böylece, $S_D(n,k) = \mid \Pi_{n,k}^D \mid$ yazabiliriz.

Örnek 1.14. $n = 2$ için $\langle 2 \rangle = \{\overline{2}, \overline{1}, 0, 1, 2\}$ kümesinin tam olarak sıfır olmayan bir tane blok çiftine sahip D tipi küme parçalanmaları

$$\{0\} \mid \{\overline{1}, 2\}/\{1, \overline{2}\}, \qquad \{0\} \mid \{\overline{1}, \overline{2}\}/\{1, 2\}.$$

şeklinde olup $S_D(2,1) = 2$ dir.

İkinci tür Stirling sayılarının klasik biçimi ile B ve D tipi analogları arasında aşağıdaki iyi bilinen bağıntılar vardır (bkz. [25, Corollary 12] ve [26, Proposition 3]):

$$S_B(n,k) = \sum_{i=k}^{n} 2^{i-k} \binom{n}{i} S(i,k) \tag{1.5}$$

ve

$$S_D(n,k) = S_B(n,k) - n\, 2^{n-1-k} S(n-1,k). \tag{1.6}$$

Dolayısıyla, sıfır blogunda yalnızca bir pozitif eleman bulunan küme parçalanmalarının sayısını

$$n \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-1-k} S(n-1,k) \tag{1.7}$$

şeklinde elde ederiz.

1.2.6. Stirling Permütasyonları ve Düzleştirilmiş Stirling Permütasyonları

Bu kısımda, ilerleyen bölümlerde D tipi Bell sayılarıyla ilişkili olarak kullanılacak olan Stirling permütasyonlarını ve düzleştirilmiş Stirling permütasyonlarından bahsedeceğiz.

Stirling permütasyonları ilk olarak Gessel ve Stanley [16] tarafından tanıtılmıştır. Bu tanımı vermek için

$$[n]_2 := \{1,1,2,2,\ldots,n,n\}$$

çoklu kümesini ele alalım.

Tanım 1.9. n mertebesindeki bir *Stirling permütasyonu* , $[n]_2$ çoklu kümesi üzerinde bir permütasyon olup, permütasyonda görünen her i değeri için i nin iki kopyası arasında yer alan tüm değerlerin i den büyük olması koşulunu sağlar. $[n]_2$ üzerindeki n mertebesindeki tüm Stirling permütasyonlarının kümesini $\mathcal{Q}_n$ ile göstereceğiz.

Örnek 1.15. 1122773663455884 permütasyonu $\mathcal{Q}_8$ kümesine aittir. Çünkü bu permütasyonda her i değerinin iki kopyası arasında yer alan tüm değerler i den büyüktür.

Buna karşılık, 1122847748355636 permütasyonu $\mathcal{Q}_8$ kümesine ait değildir. Çünkü bu permütasyonda 8 değerinin iki kopyası arasında $4,7,7,4$ değerleri bulunmaktadır. Bu değerler arasında 8 den küçük olan 4 ve 7 değerleri bulunduğundan, Stirling permütasyonu koşulu sağlanmaz.

[16] çalışmasından, $\mathcal{Q}_n$ kümesinin eleman sayısının $|\mathcal{Q}_n| = (2n-1)!!$ olduğu bilinmektedir. Burada $(2n-1)!! := \prod_{i=1}^{n}(2i-1)$ şeklinde tanımlanır.

Şimdi düzleştirilmiş Stirling permütasyonlarını tanımlamak için önce *koşu* (run) kavramını hatırlayalım. $w \in \mathcal{Q}_n$ olsun. w nin bir *koşusu*, w içinde maksimal zayıf artan bir alt dizi olarak tanımlanır [23].

Tanım 1.10. $w \in \mathcal{Q}_n$ olsun. Eğer w nin koşularının ilk terimlerinden oluşan dizi azalmayan ise, w ye n mertebesinde bir *düzleştirilmiş Stirling permütasyonu* denir. n mertebesindeki düzleştirilmiş Stirling permütasyonlarının kümesini $flat(\mathcal{Q}_n)$ ile göstereceğiz.

Örnek 1.16. 1334416622775588 permütasyonu $\mathcal{Q}_8$ kümesine aittir ve düzleştirilmiş bir Stirling permütasyonudur. Çünkü bu permütasyonun koşularının ilk terimleri soldan sağa doğru $1, 1, 2, 5$ şeklindedir ve bu dizi azalmayandır.

Buna karşılık, 1244233156657788 permütasyonu $\mathcal{Q}_8$ kümesine aittir; ancak düzleştirilmiş değildir. Çünkü bu permütasyonda koşularının ilk terimlerinden oluşan dizi $1, 2, 1, 5$ şeklindedir ve bu dizi azalmayan değildir.

$n+1$ mertebesine sahip düzleştirilmiş Stirling permütasyonlarının sayısının [23] çalışmasından her $n \geq 1$ için

$$| flat(\mathcal{Q}_{n+1}) | = B(n)$$

olduğu bilinmektedir.

1.2.7. (p, q)-Stirling Sayıları

Şimdi, klasik Stirling sayılarını iki parametre ekleyerek genelleştiren ve küme parçalanmaları üzerindeki belirli istatistiklerin ortak dağılımı için üreteç fonksiyonları olarak ortaya çıkan ikinci tür (p, q)-Stirling sayılarını [10] çalışmasını referans alarak tanıtacağız.

Tanım 1.11. $n \geq 0$ ve $0 \leq k \leq n$ tam sayıları için, $S_{p,q}(n, k)$ ile gösterilen *ikinci tür*

(p,q)-*Stirling sayıları*, aşağıdaki şekilde indirgemeli olarak tanımlanır [10]:

$$S_{p,q}(n,k) = \begin{cases} p^{k-1}S_{p,q}(n-1,k-1) + [k]_{p,q}\, S_{p,q}(n-1,k), & 0 < k < n, \\ 1, & n = k = 0, \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

burada

$$[k]_{p,q} = p^{k-1} + p^{k-2}q + \cdots + pq^{k-2} + q^{k-1}$$

dır. $p = q = 1$ durumunda $S_{1,1}(n,k) = S(n,k)$ klasik ikinci tür Stirling sayısını verir.

Örnek 1.17. $n = 2$ için indirgeme bağıntısını kullanarak

$$S_{p,q}(2,1) = p^0 S_{p,q}(1,0) + [1]_{p,q} S_{p,q}(1,1) = 1, \quad S_{p,q}(2,2) = 1$$

elde ederiz.

1.3. Kısıtlı Büyüme Fonksiyonları ve İşaretli Kısıtlı Büyüme Fonksiyonları

Bu bölümde, kısıtlı büyüme fonksiyonlarını hatırlayacak ve bunların B tipi analogu olan işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonlarını tanıtacağız. Ayrıca, kısıtlı büyüme fonksiyonları ile küme parçalanmaları arasındaki ve işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonları ile B tipi küme parçalanmaları arasındaki ilişkileri açıklayacağız [11].

Tanım 1.12. $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ pozitif tam sayılardan oluşan bir dizi olsun. Eğer w, $a_1 = 1$ koşulunu ve her $i \geq 2$ için

$$a_i \leq 1 + \max\{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, w dizisine *kısıtlı büyüme fonksiyonu* denir [2].

Uzunluğu n olan tüm kısıtlı büyüme fonksiyonlarının kümesini R_n ile gösteririz.

Örnek 1.18. $w = 1\,2\,3\,2\,3\,3\,1\,2$ dizisini ele alalım. Bu dizinin bir kısıtlı büyüme fonksiyonu olduğunu gösterelim: $a_1 = 1$ olduğundan ve $i \geq 2$ için

$$a_i \leq 1 + \max\{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$$

koşulu sağlanması gerektiğinden,

$$a_2 = 2 \leq 1 + 1, \quad a_3 = 3 \leq 1 + 2$$

olduğu görülür. Benzer şekilde, kalan terimler de gerekli koşulu sağlar. Dolayısıyla, w bir kısıtlı büyüme fonksiyonudur.

Şimdi, küme parçalanmaları ile kısıtlı büyüme fonksiyonları arasındaki eşlemeyi [2] referansını gözönüne alarak aşağıda verelim.

Standart formda yazılmış bir $\sigma = B_1 \mid \cdots \mid B_k \in \Pi_n$ küme parçalanması verilsin. σ parçalanmasına, aşağıdaki koşulla tanımlanan $w(\sigma) = a_1 a_2 \cdots a_n$ dizisini karşılık getirelim:

$$a_i = j \quad \text{ancak ve ancak } i \in B_j.$$

Burada $w(\sigma) \in R_n$ olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca, bu eşleme standart formda yazılmış Π_n küme parçalanmaları ile R_n kümesi arasında birebir bir eşleşmedir.

Örnek 1.19. $\sigma = 16 \mid 23478 \mid 5 \in \Pi_8$ olsun. Bu durumda

$$w(\sigma) = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 = 1\,2\,2\,2\,3\,1\,2\,2$$

elde edilir. Çünkü

$$a_1 = a_6 = 1, \quad a_2 = a_3 = a_4 = a_7 = a_8 = 2, \quad a_5 = 3$$

dür.

Şimdi, kısıtlı büyüme fonksiyonlarının işaretli analogu olan işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonlarını [11] çalışmasını gözönünde bulundurarak aşağıdaki gibi verelim:

Tanım 1.13. n boyutunda bir *işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonu* (SRGF) [11], terimleri $\langle n \rangle$ kümesinden alınan ve aşağıdaki koşulları sağlayan, uzunluğu $2n+1$ olan

$$w = a_0\, a_1 a_1^* \cdots a_n a_n^*$$

biçiminde bir dizidir:

1. $a_0 = 0$;

2. (İşaretli kısıtlı büyüme koşulu) $|a_1| \in \{0, 1\}$ ve $i \geq 2$ için

$$|a_i| \leq 1 + \max\{|a_1|, \ldots, |a_{i-1}|\}; \tag{1.8}$$

3. Her i için, eğer $a_i = j$ ise $a_i^* = \bar{j}$ ve eğer $a_i = \bar{j}$ ise $a_i^* = j$ olur; burada $j \in \{1, \ldots, n\}$;

4. (Negatifin pozitiften önce gelme kuralı) Eğer dizide hem $\bar{j}j$ hem de $j\bar{j}$ çiftleri yer alıyorsa, her $j \in \{1, \ldots, n\}$ için $\bar{j}j$ çifti $j\bar{j}$ çiftinden önce gelir.

n boyutundaki tüm işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonlarının kümesini SRGF_n ile gösteririz.

Örnek 1.20. $w = 0\,\bar{1}\,1\,\bar{2}\,2\,0\,0\,\bar{2}\,2\,\bar{3}\,3\,3\,\bar{3}\,1\,\bar{1}$ dizisini ele alalım. Bu durumda $w \in \mathrm{SRGF}_7$ olup, uzunluğu 15 olan bir işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonudur.

Şimdi, işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonları ile B tipi küme parçalanmaları arasındaki eşlemeyi açıklayalım [11].

$\sigma \vdash_B \langle n \rangle$ olsun. $w(\sigma) = a_0 a_1 a_1^* a_2 a_2^* \cdots a_n a_n^*$ dizisini aşağıdaki şekilde tanımlarız: $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ olmak üzere

- $a_0 = 0$, ve $a_i = a_i^* = 0$ dır ancak ve ancak $i, \bar{i} \in S_0$ ise,
- $a_i = \bar{j}$, ve $a_i^* = j$ ancak ve ancak $i \in S_{2j}$ ise,
- $a_i = j$, ve $a_i^* = \bar{j}$ ancak ve ancak $i \in S_{2j-1}$ ise.

Buradan $w(\sigma)$ dizisinin bir işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonu olduğu elde edilir. Dolayısıyla, bu yaklaşım bize $\langle n \rangle$ kümesinin standard formda B tipi küme parçalanmalarının kümesi ile SRGF_n kümesi arasında birebir bir eşleşme sunar [11].

Not 1.14. *Acharyya'nın tanımına [11] ek olarak olarak Tanım 1.13 ün dördüncü koşulu; n boyutundaki bir işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonunda $j\bar{j}$ çiftinin ilk olarak görünmesine ve yine $j\bar{j}$ çifti ile devam etmesine izin verir, ancak $j\bar{j}$ çiftinden sonra $\bar{j}j$ çifti ile devam etmesine izin vermez (Acharyya n boyutundaki bir işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonunda $j\bar{j}$ çiftinin ilk olarak görünemeyeceğini, eğer $j\bar{j}$ çifti varsa ondan önce mutlaka $\bar{j}j$ çiftinin olması gerektiğini belirtmiştir). Bölüm 2.2 deki $\mathrm{SRGF}_{n,k}$ kümesinin inşaası ve Tanım 2.9 daki $P(w)$ kümesinin tanımının anlamlı olması için bu özelliği kullanacağız. Böyle bir işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonuna standart formda almayan bir işaretli küme parçalanması (standart formun yeniden düzenlenmiş bir şekli) karşılık gelir. Örneğin*

$w = 01\bar{1}2\bar{2}2\bar{2} \in \mathrm{SRGF}_3$ *işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonuna karşılık gelen işaretli küme parçalanması* $\sigma = \{0\} \mid \{1\}/\{\bar{1}\} \mid \{2,3\}/\{\bar{2},\bar{3}\} \vdash_B \langle 3\rangle$ *şeklinde olup bu parçalanma standard formda değildir. Aynı zamanda,* $w' = 0\bar{1}1\bar{2}2\bar{2}2 \in \mathrm{SRGF}_3$ *işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonuna karşılık gelen işaretli küme parçalanması ise* $\sigma' = \{0\} \mid \{\bar{1}\}/\{1\} \mid \{\bar{2},\bar{3}\}/\{2,3\} \vdash_B \langle 3\rangle$ *şeklinde olup bu parçalanma ise standard formdadır. Dikkat edilecek olunursa,* σ *ile* σ' *işaretli küme parçalanmaları aslında aynı parçalanmalardır, fakat blokların dizilişleri farklıdır.*

Örnek 1.21. $\tau = \{0,5,\bar{5}\} \mid \{\bar{1},\bar{3},4\}/\{1,3,\bar{4}\} \mid \{\bar{2}\}/\{2\} \vdash_B \langle 5\rangle$ standard formdaki küme parçalanması verilsin. $w(\tau) = a_0a_1a_1^*\cdots a_5a_5^*$ dizisini aşağıdaki şekilde belirleyelim. $0,5,\bar{5} \in P_0$ olduğundan,

$$a_0 = 0, \quad a_5 = a_5^* = 0.$$

elde edilir. Ayrıca, $1,3 \in P_2$ olduğundan,

$$a_1 = a_3 = \bar{1}, \quad a_1^* = a_3^* = 1$$

dir. Benzer şekilde,

$$a_2 = \bar{2}, \quad a_2^* = 2, \qquad a_4 = 1, \quad a_4^* = \bar{1}$$

olup böylece τ işaretli parçalanmasına $w(\tau) = 0\,\bar{1}\,1\,\bar{2}\,2\,\bar{1}\,1\,1\,\bar{1}\,0\,0$ dizisi karşılık gelmektedir.

1.4. Ferrers ve Laguerre Tahtaları Üzerinde Kale Teorisi

Bu bölümde, Ferrers ve Laguerre tahtaları üzerinde kale teorisine ilişkin temel kavramları vereceğiz [12, 27]. Bu tahtalar bazı klasik sayı dizileri için kombinatoryal modeller sağlamaktadır. Özellikle, Ferrers tahtaları üzerindeki kale yerleşimleri ikinci tür Stirling sayıları ile, Laguerre tahtaları üzerindeki kale yerleşimleri ise Lah sayıları ile sayılmaktadır. Tezin ilerleyen kısımlarında bu fikirler B tipine genişletilmiştir.

1.4.1. Ferrers Tahtaları ve Kale Yerleşimleri

Bir *tahta*, satır ve sütunlar hâlinde düzenlenmiş sonlu sayıda birim kareden oluşur. Bir B tahtası üzerinde bir *kale yerleşimi*, aynı satırda veya aynı sütunda iki kale bulunmayacak şekilde seçilen karelerin bir alt kümesidir. Bu tür kalelerin *birbirini tehdit etmediği*

söylenir. $k \geq 0$ için, B tahtasına bir k-kale yerleşimi tam olarak k tane kalenin birbirini tehdit etmeyecek şekilde konumlandırılmasıdır. Bu tür yerleşimlerin sayısını $r_k(B)$ ile gösteririz ve bu sayı B tahtasının k *yıncı kale sayısı* olarak adlandırılır [1]. Tahtalar üzerine yerleştirilen kaleler genellikle R harfi ile gösterilecektir.

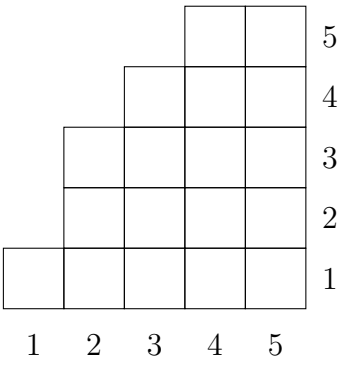
Tanım 1.14. $b_1, b_2, \ldots, b_n$ negatif olmayan tam sayılar olsun ve $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, hücreleri

$$\{(i,j) \mid 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq b_i\},$$

kümesinden oluşan bir tahta olsun; burada i satır numarasını ve j de sütun numarasını göstermektedir. Eğer $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ ise, $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ tahtasına *Ferrers tahtası* denir [27].

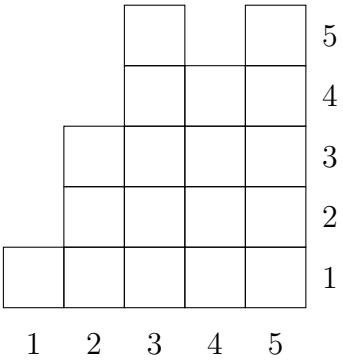
Yukarıdaki tanımı aşağıdaki örnekle açıklayalım.

Örnek 1.22. $B(1,3,4,5,5)$ bir tahta olsun. $1 \leq 3 \leq 4 \leq 5 \leq 5$ olduğundan, $B(1,3,4,5,5)$ tahtasının bir Ferrers tahtası olduğu sonucuna varılır. $B(1,3,4,5,5)$ Ferrers tahtası Şekil 1.1'de gösterilmiştir.



Şekil 1.1. $B(1,3,4,5,5)$ Ferrers tahtası.

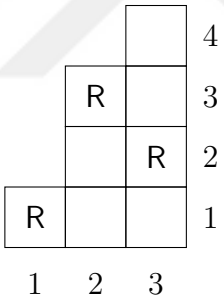
Örnek 1.23. $B(1,3,5,4,5)$ bir tahta olsun. $5 \not\leq 4$ olduğundan, $B(1,3,5,4,5)$ bir Ferrers tahtası değildir. Bu tahta Şekil 1.2 de gösterilmiştir.



Şekil 1.2. $B(1,3,5,4,5)$ tahtası.

Şimdi, bir Ferrers tahtası üzerindeki kale yerleşimine bir örnek verelim.

Örnek 1.24. $B(1,3,4)$ Ferrers tahtasını ele alalım. Bu tahta üzerindeki bir 3-kale yerleşimi, örneğin, kalelerin $(1,1)$, $(2,3)$ ve $(3,2)$ hücrelerine yerleştirilmesiyle elde edilebilir. Bu konumlar farklı satır ve sütunlarda bulunduğundan, hiçbir iki kale birbirini tehdit etmez. Bu kale yerleşimi Şekil 1.3 de gösterilmiştir.



Şekil 1.3. $B(1,3,4)$ Ferrers tahtası üzerinde bir 3-kale yerleşimi.

Şimdi düşen faktöriyel ve yükselen faktöriyel kavramlarını hatırlayalım [28, 29]. Her bir $k \geq 0$ tamsayısı için, *düşen faktöriyel*

$$(x)_k = x(x-1)\cdots(x-k+1),$$

şeklinde tanımlanır ve $(x)_0 := 1$ alınır. *Yükselen faktöriyel* ise

$$[x]^k = x(x+1)\cdots(x+k-1),$$

şeklinde tanımlanır ve $[x]^0 := 1$ alınır.

Goldman, Joichi ve White tarafından [12] çalışmasında verilen aşağıdaki teorem, Ferrers tahtaları üzerindeki kale sayıları ile düşen faktöriyeller arasındaki bağlantıyı vermektedir.

Teorem 1.1 (Goldman, Joichi, White, [12]). *$B = B(b_1, b_2, \dots, b_n)$ bir Ferrers tahtası olsun. Bu durumda*

$$\prod_{i=1}^{n}\big(x + b_i - (i-1)\big) = \sum_{k=0}^{n} r_{n-k}(B)\,(x)_k \tag{1.9}$$

eşitliği sağlanır.

Goldman–Joichi–White teoreminin bir uygulaması olarak bir Ferrers tahtası

$$B = B(1, 4, 7, \dots, 3n-2)$$

şeklinde olsun. Bu durumda her bir $i,\ 1 \le i \le n$ için $b_i = 3i-2$ olduğuna dikkat edelim. Eşitlik (1.9) u dikkate aldığımızda

$$\prod_{i=1}^{n}\big(x + b_i - (i-1)\big) = \prod_{i=1}^{n}(x + 2i - 1) = \sum_{k=0}^{n} r_{n-k}(B)(x)_k$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$[x]_n^B = \sum_{k=0}^{n} r_{n-k}(B)(x)_k \tag{1.10}$$

eşitliği sağlanır. Burada

$$[x]_n^B := (x+1)(x+3)\cdots(x+2n-1)$$

B tipi yükselen faktöriyel olarak adlandırılır [5].

Not 1.15. *Denklem (1.10) bir baz değişimi açısından aşağıdaki şekilde yorumlanabilir: $V = K[x]$, bir K cismi üzerinde x değişkenli polinomların vektör uzayı olsun. $\{1, (x)_1, (x)_2, \dots\}$ ve $\{1, [x]_1^B, [x]_2^B, \dots\}$ kümelerinin her ikisi de V uzayının birer bazı olduğundan, denklem (1.10) aslında $r_{n-k}(B)$ katsayılarının $(x)_k$ bazı ile $[x]_n^B$ bazı arasındaki geçiş matrisini verdiğini göstermektedir.*

$B(0, 1, \dots, n-1)$ şeklinde verilen tahtaya *merdiven tahtası* denir ve $J_{n,1}$ ile gösterilir. Bu durumda $b_i = i-1$ olduğundan, Denklem (1.9) un sol tarafı x^n ifadesine indirgenir. Dolayısıyla,

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} r_{n-k}(J_{n,1})(x)_k$$

dir [3]. Bu ifadeyi

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k$$

özdeşliği [29] ile birlikte değerlendirdiğimizde her $k,\ 0 \leq k \leq n$ için

$$r_{n-k}(J_{n,1}) = S(n,k)$$

bağıntısını elde ederiz ki, burada $S(n,k)$ ikinci tür Stirling sayısını göstermektedir [3].

1.4.2. Laguerre Tahtaları ve Lah Sayıları

Bu alt kesimde, Laguerre tahtalarını ve bu tahtalarla ilişkili kale yerleşimlerini tanıtacağız. Bu tahtalar, sıralı küme parçalanmalarını sayan Lah sayıları için kombinatoryal bir yorum sağlar. Bu durum, Ferrers tahtaları ile ikinci tür Stirling sayıları arasındaki ilişkiye paralel olup tezin ilerleyen kısımlarında B tipi Laguerre tahtalarına ve B tipi Lah sayılarına genişletilecektir.

Tanım 1.15. $L(n,k)$ ile gösterilen *Lah sayıları* [13], n elemanlı bir kümenin k tane boş olmayan doğrusal sıralı bloklara parçalanma sayısını verir. Her bir $k,\ 1 \leq k \leq n$ için bu sayılar

$$L(n,k) = \binom{n-1}{k-1}\frac{n!}{k!}$$

formülü ile verilir.

Lah sayıları çevrimiçi tamsayı dizileri ansiklopedisinde A271703 kodu ile yer almaktadır (bkz. https://oeis.org/A271703)

Örnek 1.25. $n = 3$ ve $k = 2$ için $L(3,2)$ Lah sayısı, $\{1,2,3\}$ kümesinin 2 tane boş olmayan doğrusal sıralı bloklara parçalanmalarının sayısı olup bu parçalanmalar

$$(1,2)\,|\,(3), \quad (2,1)\,|\,(3), \quad (1,3)\,|\,(2), \quad (3,1)\,|\,(2), \quad (2,3)\,|\,(1), \quad (3,2)\,|\,(1).$$

şeklindedir. Dolayısıyla, $L(3,2) = 6$ dır.

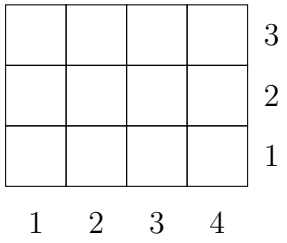
Şimdi, Lah sayılarının kale yerleşimi açısından bir kombinatoryal yorumunu [12] çalışması temelinde vereceğiz.

Tanım 1.16. $n \geq 1$ için *Laguerre tahtası* $\mathcal{L}_n$, her biri $n-1$ yüksekliğine sahip n sütundan oluşan dikdörtgensel bir tahta olup

$$\mathcal{L}_n = B(n-1, n-1, \ldots, n-1)$$

formunda gösterilir (bkz. [12]).

Örnek olarak, $\mathcal{L}_4$ Laguerre tahtası Şekil 1.4 de görsel olarak verilmiştir.



Şekil 1.4. $\mathcal{L}_4 = B(3,3,3,3)$ Laguerre tahtası.

Şimdi, Laguerre tahtası $\mathcal{L}_n = B(n-1, n-1, \ldots, n-1)$ üzerine birbirini tehdit etmeyecek şekilde yerleştirilen kale sayıları ile Lah sayıları arasındaki ilişkiyi verelim. Her bir $i,\ 1 \leq i \leq n$ için $b_i = n-1$ olduğundan, denklem (1.9) un sol tarafı

$$\prod_{i=1}^{n}\big(x + b_i - (i-1)\big) = \prod_{i=1}^{n}(x+n-i) = x(x+1)\cdots(x+n-1)$$

şeklini alır. Dolayısıyla, [12] den

$$[x]^n = \sum_{k=0}^{n} r_{n-k}(\mathcal{L}_n)(x)_k \tag{1.11}$$

olup, bu eşitliği [14] deki

$$[x]^n = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)(x)_k \tag{1.12}$$

eşitliği ile karşılaştırarak

$$r_{n-k}(\mathcal{L}_n) = L(n,k), \qquad 0 \leq k \leq n \tag{1.13}$$

bağıntısını elde ederiz.

Tanım 1.17. $L_B(n,k)$ ile gösterilen B *tipi Lah sayıları* [15], aşağıdaki formülle verilir:

$$L_B(n,k) = \binom{n}{k}^2 2^{n-k}(n-k)!.$$

B tipi Lah sayıları dizisine çevrimiçi tamsayı dizileri ansiklopedisinde A025167 kodu ile rastlanmaktadır (bkz. https://oeis.org/A025167). Aynı zamanda, B tipi Lah sayıları, tezin ilerleyen kısımlarında B tipi Laguerre tahtaları üzerindeki kale yerleşimleri kullanılarak (1.13) deki formüle analog olarak yorumlanacaktır.

2. BÖLÜM

İŞARETLİ KISITLI BÜYÜME FONKSİYONLARI VE KALE TEORİSİ ARACILIĞIYLA B TİPİ İKİNCİ TÜR (p,q)-STİRLİNG SAYILARININ İNŞAASI

Bu bölümde, tezin ana sonuçları sunulmaktadır. B tipi ikinci tür (p,q)-Stirling sayıları, işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonları ve kale teorisi birlikte kullanılarak incelenmiştir. Bu yaklaşım sayesinde, bu sayılar için yineleme bağıntıları ve üreteç fonksiyonları elde edilmiştir. Ayrıca, Laguerre tahtasının B tipi bir analogu tanıtılmış ve bu tahta üzerindeki kale yerleşimlerinin B tipi Lah sayıları ile sayıldığı gösterilmiştir.

2.1. B Tipi Ferrers Tahtaları ve Kale Yerleşimleri

Bu kısımda, B tipi bir Ferrers tahtası tanımlanmakta ve bu tahta üzerindeki kale yerleşimleri verilmektedir. Bu tahta, işaretli kısıtlı büyüme koşulunu yansıtacak şekilde seçilmiştir ve işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonlarını kale yerleşimleri olarak temsil etmek için kullanılmıştır.

Tanım 2.1. $\langle n\rangle$ işaretli kümesi üzerinde $<_{\text{lev}}$ ile gösterilen *seviye sıralaması* aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$r <_{\text{lev}} s \quad \Longleftrightarrow \quad |r| < |s| \text{ veya } \big(|r| = |s| \text{ ve } r < s\big).$$

Yani elemanlar artan mutlak değerlerine göre sıralanır; aynı mutlak değere sahip iki eleman söz konusu olduğunda ise negatif işaret pozitif işaretten önce gelir. Özellikle,

$$0 <_{\text{lev}} \overline{1} <_{\text{lev}} 1 <_{\text{lev}} \overline{2} <_{\text{lev}} 2 <_{\text{lev}} \cdots <_{\text{lev}} \overline{n} <_{\text{lev}} n. \tag{2.1}$$

Örnek 2.1. $n = 3$ olsun. Seviye sıralaması $<_{\text{lev}}$ altında işaretli tam sayılar aşağıdaki şekilde sıralanır:

$$0 <_{\text{lev}} \overline{1} <_{\text{lev}} 1 <_{\text{lev}} \overline{2} <_{\text{lev}} 2 <_{\text{lev}} \overline{3} <_{\text{lev}} 3$$

dir. Burada $\overline{2} <_{\text{lev}} 2$ olur, çünkü her ikisi de aynı mutlak değere sahiptir ve negatif işaret pozitif işaretten önce gelir. Ayrıca, $|1| < |3|$ olduğundan $1 <_{\text{lev}} \overline{3}$ ve $1 <_{\text{lev}} 3$ olur.

2.1.1. B Tipi Ferrers Tahtası

$n \geq 1$ için n sütundan oluşan ve her bir i-yinci sütunda maksimum $2i+1$ hücre bulunan bir tahta oluşturalım, ki bu tahta bir işaretli büyüme fonksiyonu ile uyumlu olacak şekilde aşağıdaki gibi verilsin.

Tanım 2.2. $n \geq 1$ olsun. $\mathcal{F}_n^{(B)}$ ile gösterilen B *tipi Ferrers tahtası* r satır ve i sütun belirtmek üzere, aşağıdaki hücreler kümesi olarak tanımlanır:

$$\mathcal{F}_n^{(B)} = \{(r,i) : i \in \{1,\ldots,n\},\ r \in \{0,\overline{1},1,\overline{2},2,\ldots,\overline{i},i\}\}.$$

Satırlar, seviye sıralaması $<_{\text{lev}}$ ile sıralanan $\{0,\overline{1},1,\overline{2},2,\ldots,\overline{n},n\}$, işaretli tam sayıları ile etiketlenir. Sütunlar ise soldan sağa doğru 1 den n ye kadar etiketlenir.

$\mathcal{F}_n^{(B)}$ Ferrers tahtasında i-yinci sütun $\{0,\overline{1},1,\overline{2},2,\ldots,\overline{i},i\}$ satırlarından oluştuğu için $\mathcal{F}_n^{(B)}$ tahtasının sütun yükseklikleri

$$3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ 2n+1$$

şeklindedir.

Dikkat edilecek olunursa, $\mathcal{F}_n^{(B)}$ Ferrers tahtasının i-yinci sütununda $|r| \leq i$ koşulunu sağlayan işaretli r tamsayısı bulunmaktadır.

Örnek 2.2. $n = 2$ olsun. B tipi Ferrers tahtası $\mathcal{F}_2^{(B)}$ iki sütundan oluşur. Birinci sütun $\{0,\overline{1},1\}$ kümesinin, ikinci sütun ise $\{0,\overline{1},1,\overline{2},2\}$ kümesinin elemalarından oluşmaktadır.

Bir işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonu $w = a_0\, a_1 a_1^* \cdots a_n a_n^*$ her $1 \leq i \leq n$ için $|a_i| \leq i$ koşulunu sağladığından dolayı, her i için a_i terimi yalnızca $|r| \leq i$ koşulunu sağlayan işaretli r değerlerini alabilir. Bu değerler, $\mathcal{F}_n^{(B)}$ tahtasının i sütununda yer alan satır etiketlerine karşılık gelmektedir. Dolayısıyla, $\mathcal{F}_n^{(B)}$ tahtası işaretli kısıtlı büyüme koşulu (1.8) yi yansıtır ve B tipi işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonları için doğal bir kale tahtası modeli perspektifi sağlar.

Not 2.1. *Satırlar seviye sıralaması* $<_{\text{lev}}$ *ye göre düzenlendiğinde,* i*-yinci sütun tam olarak* $2i+1$ *satır içerir. Bu şekilde* $\mathcal{F}_n^{(B)}$ *tahtası, Ferrers tipi bir şekle sahip olur. Bu durum*

klasik bir Ferrers diyagramına benzese de (bkz. [12]), işaretli satır etiketleri ve seviye sıralamasının kullanılması, $\mathcal{F}_n^{(B)}$ tahtasını klasik kale teorisinde ortaya çıkan Ferrers tahtalarından farklı kılar.

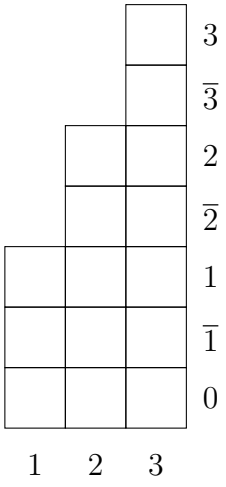
Dolayısıyla, $\mathcal{F}_n^{(B)}$ tahtası, işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonları için Ferrers tahtasının B tipi bir analoğu olarak görülebilir. Seviye kelimesi yalnızca işaretli satırların sıralanmasını ifade eder ve klasik kale teorisinde çalışılan m-seviyeli kale yerleşimleri ile ilişkili değildir (bkz. [30]).

Örnek 2.3. $n = 3$ olsun. Bu durumda B tipi Ferrers tahtası $\mathcal{F}_3^{(B)}$ üç sütundan oluşur. Birinci sütun $\{0, \overline{1}, 1\}$ satırlarını, ikinci sütun $\{0, \overline{1}, 1, \overline{2}, 2\}$ satırlarını ve üçüncü sütun ise $\{0, \overline{1}, 1, \overline{2}, 2, \overline{3}, 3\}$ satırlarını içerir.

Satırlar seviye sıralamasına göre

$$0 <_{\text{lev}} \overline{1} <_{\text{lev}} 1 <_{\text{lev}} \overline{2} <_{\text{lev}} 2 <_{\text{lev}} \overline{3} <_{\text{lev}} 3$$

şeklinde sıralandığında, tahta sütun yükseklikleri 3, 5 ve 7 olan Ferrers tipi bir şekle sahip olur. Bu durum Şekil 2.1 te gösterilmiştir.



Şekil 2.1. $n = 3$ için, satırları seviye sıralamasına göre listelenmiş B tipi $\mathcal{F}_3^{(B)}$ Ferrers tahtası.

Şimdi, $\mathcal{F}_n^{(B)}$ üzerinde B tipi kale yerleşimlerini tanıtacak ve bunlar ile işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonları arasında bir birebir eşleme kuracağız.

2.1.2. Kale Yerleşimleri ve Silme Kuralları

Tanım 2.3. $\mathcal{T}_n^{(B)}$ ile B tipi Ferrers tahtası $\mathcal{F}_n^{(B)}$ üzerindeki n boyutlu B *tipi kale yerleşimleri* kümesini gösterelim. $\mathcal{T}_n^{(B)}$ içindeki bir yerleşim

$$P = \{(r_i, i) : 1 \leq i \leq n\}$$

biçiminde olup burada $r_1, \ldots, r_n$ terimleri aşağıdaki koşulları sağlar:

- Her i sütunu ile $r_i \in \{0, \overline{1}, 1, \overline{2}, 2, \ldots, \overline{i}, i\}$ satırının kesişimine sadece bir kale yerleştirilir. Satırlar üzerinde herhangi bir kısıtlama yoktur; dolayısıyla aynı satırda birden fazla kale bulunabilir.
- $(r_1, \ldots, r_n)$ dizisi B tipi işaretli kısıtlı büyüme koşulunu sağlar; yani

  $$|r_1| \in \{0, 1\} \quad \text{ve} \quad \text{her } i \geq 2 \text{ için} \qquad |r_i| \leq 1 + \max\{|r_1|, \ldots, |r_{i-1}|\}$$

  dir.
- *(Negatifin pozitiften önce gelme kuralı)* Her $j \in \{1, \ldots, n\}$ için, eğer hem $\overline{j}$ hem de j elemanları $r_1, \ldots, r_n$ arasında yer alıyorsa, $\overline{j}$ elemanının ilk ortaya çıkışı j elemanının ilk ortaya çıkışından önce gelmelidir.

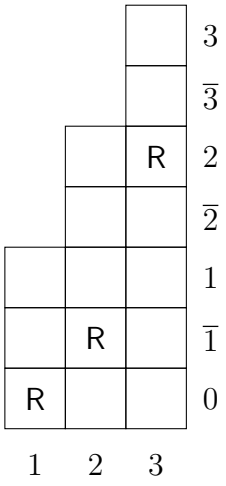
Örnek 2.4. $n = 3$ olsun. $\mathcal{F}_3^{(B)}$ tahtası üzerinde

$$P = \{(0, 1), (\overline{1}, 2), (2, 3)\}$$

kale yerleşimini ele alalım. Bu durumda her sütunda tam olarak bir kale bulunur ve buna karşılık gelen satır etiketleri

$$r_1 = 0, \qquad r_2 = \overline{1}, \qquad r_3 = 2,$$

şeklindedir. Dolayısıyla, ilişkili dizi $(r_1, r_2, r_3) = (0, \overline{1}, 2)$ olur. Bu dizi, B tipi işaretli kısıtlı büyüme koşulunu sağlar, ayrıca negatifin pozitiften önce gelme kuralı da sağlanmaktadır.



Şekil 2.2. $(0, \overline{1}, 2)$ dizisine karşılık gelen, $\mathcal{F}_3^{(B)}$ üzerindeki bir B tipi kale yerleşimi.

Şimdi, tanımlayıcı koşulları sağlamayan bir örnek verelim.

Örnek 2.5. $n = 3$ olsun.

$$P = \{(0,1), (1,2), (\overline{1}, 3)\}$$

yerleşimini ele alalım. Buna karşılık gelen dizi $(0, 1, \overline{1})$ şeklindedir. Her sütunda tam olarak bir kale bulunmasına ve büyüme koşulu sağlanmasına rağmen, bu dizi negatifin pozitiften önce gelme kuralını sağlamaz; çünkü 1, $\overline{1}$ den önce yer alır. Dolayısıyla, $P \notin \mathcal{T}_3^{(B)}$ olur.

Şimdi, bir başka örnek verelim.

Örnek 2.6. $n = 3$ olsun.

$$P = \{(0,1), (1,2), (\overline{2}, 3)\}$$

yerleşimini ele alalım. İlişkili dizi $(0, 1, \overline{2})$ şeklindedir. Bu dizi işaretli kısıtlı büyüme koşulunu sağlar ve negatifin pozitiften önce gelme kuralı da sağlanır. Dolayısıyla, $P \in \mathcal{T}_3^{(B)}$ olur.

2.1.3. İşaretli Kısıtlı Büyüme Fonksiyonları ile B Tipi Kale Yerleşimleri Arasında Bir Birebir Eşleme

Şimdi, işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonları ile B tipi kale yerleşimleri arasında birebir bir eşleşme kuracağız. Aşağıdaki sonuç, bir B tipi kale yerleşimini tanımlayan

koşulların tam olarak bir işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonunun koşullarına denk olduğunu göstermektedir.

Önerme 2.1. $w = a_0\, a_1\, a_1^* \cdots a_n\, a_n^* \in \mathrm{SRGF}_n$ *ve* $(a_1, \ldots, a_n)$, w *nin yıldızsız terimlerinden oluşan temel işaretli kısıtlı büyüme dizisi olsun.*

$$\Phi : \mathrm{SRGF}_n \longrightarrow \mathfrak{T}_n^{(B)}, \qquad \Phi(w) = \{(a_i, i) : 1 \leq i \leq n\} \tag{2.2}$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlayalım. Bu durumda Φ *birebir ve örtendir.*

İspat. $w = a_0\, a_1\, a_1^* \cdots a_n\, a_n^* \in \mathrm{SRGF}_n$ olsun. İşaretli kısıtlı büyüme koşulundan, her $1 \leq i \leq n$ için $|a_i| \leq i$ olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla,

$$a_i \in \{0, \overline{1}, 1, \ldots, \overline{i}, i\}$$

olup her i için (a_i, i) hücresi $\mathcal{F}_n^{(B)}$ tahtasının i sütununda yer alır. Bu nedenle, $\Phi(w)$ her sütuna tam olarak bir kale yerleştirir. Ayrıca, $(a_1, \ldots, a_n)$ dizisi hem işaretli kısıtlı büyüme koşulunu hem de negatifin pozitiften önce gelme kuralını sağladığından dolayı $\Phi(w)$, $\mathfrak{T}_n^{(B)}$ kümesini tanımlayan koşulları sağlar ve böylece $\Phi(w) \in \mathfrak{T}_n^{(B)}$ olur.

Şimdi, Φ dönüşümünün birebir olduğunu gösterelim. Yıldızlı terimler, yıldızsız dizi $(a_1, \ldots, a_n)$ tarafından tek türlü belirlenir, dolayısıyla w tamamen bu dizi tarafından belirlenir. Eğer $\Phi(w) = \Phi(w')$ ise, her i için $a_i = a_i'$ olur ve buradan $w = w'$ elde edilir. Bu nedenle, Φ birebirdir.

Φ dönüşümünün örten olduğunu göstermek için, $P = \{(r_i, i)\}_{i=1}^n \in \mathfrak{T}_n^{(B)}$ olsun. $a_0 = 0$, her $1 \leq i \leq n$ için $a_i = r_i$ alınarak ve

$$a_i^* = \begin{cases} 0, & a_i = 0, \\ \overline{a_i}, & a_i \neq 0. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanarak bir w dizisi oluşturalım.

$P \in \mathfrak{T}_n^{(B)}$ olduğundan, $(r_1, \ldots, r_n)$ dizisi hem işaretli kısıtlı büyüme koşulunu ve hem de negatifin pozitiften önce gelme kuralını sağlar. Buradan $w \in \mathrm{SRGF}_n$ olduğu sonucuna varılır. Tanım gereği, $\Phi(w) = P$ olduğu elde edilir. Bu da Φ dönüşümünün örten olduğunu gösterir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur. □

Ters dönüşüm Φ^{-1} aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\Phi^{-1} : \mathcal{T}_n^{(B)} \to \mathrm{SRGF}_n$$

olup burada

$$\Phi^{-1}(\{(r_i, i)\}_{i=1}^n) = a_0\, a_1\, a_1^*\, a_2\, a_2^*\, \cdots\, a_n\, a_n^*$$

olmak üzere, $a_0 = 0$, her $1 \leq i \leq n$ için $a_i = r_i$ ve

$$a_i^* = \begin{cases} 0, & a_i = 0 \\ \overline{a_i}, & a_i \neq 0 \end{cases}$$

şeklindedir. Böylece elde edilen işaretli kısıtlı büyüme dizisi SRGF_n kümesine ait olur ve dolayısıyla Φ^{-1} iyi tanımlıdır.

Örnek 2.7. $P = \{(\overline{1}, 1), (0, 2), (1, 3)\} \in \mathcal{T}_3^{(B)}$ olsun. Bu durumda,

$$a_1 = \overline{1}, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = 1,$$

olur. Dolayısıyla,

$$\Phi^{-1}(P) = 0\,\overline{1}\,1\,0\,0\,1\,\overline{1} \in \mathrm{SRGF}_3$$

elde edilir.

Not 2.2. *B tipi Ferrers tahtası, işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonlarının kale yerleşimleri olarak temsil edilmesine olanak tanır. Bu tekabüliyet oldukça basit olsa da, tahta temsili işaretli büyüme fonksiyonlarının yapısının daha kolay anlaşılabilmesini sağlar. Ayrıca bu tekabüliyet, B tipi ikinci tür (p, q)-Stirling polinomlarının ve bunlara karşılık gelen yineleme bağıntıları ile üreteç fonksiyonlarının elde edilmesine yardımcı olan istatistiklerin tanımlanmasında da kolaylık sağlamaktadır.*

Örnek 2.8. $n = 3$ olmak üzere aşağıdaki işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonunu gözönüne alalım:

$$w = a_0\, a_1\, a_1^*\, a_2\, a_2^*\, a_3\, a_3^* = 0\,\overline{1}\,1\,0\,0\,\overline{2}\,2 \in \mathrm{SRGF}_3$$

olsun. Yıldızsız dizi

$$(a_1, a_2, a_3) = (\overline{1}, 0, \overline{2})$$

şeklinde olduğundan dolayı Φ dönüşümünü uygulayarak aşağıdaki kale yerleşimini elde ederiz:

$$\Phi(w) = \{(\overline{1}, 1), (0, 2), (\overline{2}, 3)\} \in \mathcal{T}_3^{(B)}.$$

Tersine, bu yerleşimden başlanarak yıldızsız

$$(a_1, a_2, a_3) = (\overline{1}, 0, \overline{2})$$

dizisi elde edilir ve yıldızlı terimler yukarıda tanımlandığı şekilde belirlenerek w işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonu elde edilir.

Şimdi, bu kısmın geri kalanında kullanılacak daha kapsamlı bir örnek sunuyoruz.

Örnek 2.9. Aşağıdaki işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonunu gözönüne alalım:

$$w = a_0\, a_1 a_1^* \cdots a_7 a_7^* = 0\,\overline{1}\,1\,0\,0\,\overline{2}\,2\,\overline{3}\,3\,3\,\overline{3}\,\overline{2}\,2\,1\,\overline{1} \in \mathrm{SRGF}_7$$

olsun. Buna karşılık gelen yıldızsız dizi

$$(a_1, \ldots, a_7) = (\overline{1}, 0, \overline{2}, \overline{3}, 3, \overline{2}, 1)$$

şeklinde olup Φ dönüşümü uygulandığında aşağıdaki kale yerleşimi elde edilir:

$$\Phi(w) = \{(\overline{1}, 1), (0, 2), (\overline{2}, 3), (\overline{3}, 4), (3, 5), (\overline{2}, 6), (1, 7)\} \in \mathfrak{T}_7^{(B)}.$$

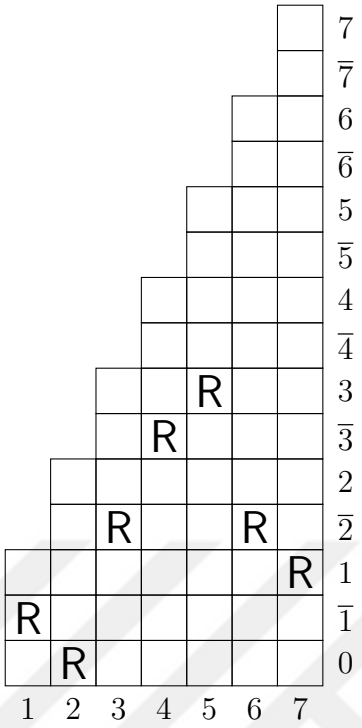
Bu yerleşim Şekil 2.3 de gösterilmiştir. Bu kale yerleşiminden başlanarak

$$P = \{(r_i, i) : 1 \leq i \leq 7\}$$

elde edilir. Her $1 \leq i \leq 7$ için $a_i = r_i$ alınarak $(a_1, \ldots, a_7)$ dizisine ulaşılır. Ardından, yıldızlı terimler, $a_i^* = \begin{cases} 0, & a_i = 0 \\ \overline{a_i}, & a_i \neq 0 \end{cases}$ kuralı gözönünde tutularak ilave edilip w işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonu

$$\Phi^{-1}(P) = 0\,\overline{1}\,1\,0\,0\,\overline{2}\,2\,\overline{3}\,3\,3\,\overline{3}\,\overline{2}\,2\,1\,\overline{1} = w$$

şeklinde oluşturulur.



Şekil 2.3. $w = 0\,\overline{1}\,1\,0\,0\,\overline{2}\,2\,\overline{3}\,3\,3\,\overline{3}\,\overline{2}\,2\,1\,\overline{1}$ dizisi için $\mathcal{F}_7^{(B)}$ üzerinde elde edilen $\Phi(w)$ kale yerleşimi.

2.1.4. B Tipi İşaretli Kısıtlı Büyüme Fonksiyonları Üzerinde Bazı İstatistikler

Şimdi, B tipi ikinci tür Stirling sayılarının bir (p, q)-formunu elde etmek amacıyla, B tipi işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonlarının kümesi üzerinde bazı işaretli istatistikler tanımlayacağız. Bu istatistikler, işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonundaki yıldızsız terimlerin mutlak değerlerinin ilk ortaya çıkış noktaları yardımıyla tanımlanır.

Tanım 2.4. $w = a_0\, a_1\, a_1^*\, a_2\, a_2^*\, \ldots\, a_n\, a_n^* \in \mathrm{SRGF}_n$ olsun. $(|a_1|, \ldots, |a_n|)$ dizisinde $|a_j|$ teriminin ilk kez göründüğü indis j olmak üzere

$$L_B(w) = \{j \in [n] : |a_j| \text{ değeri } |a_1|, \ldots, |a_{j-1}| \text{ arasında yer almaz}\}$$

kümesi w deki $|a_j|$ lerin ilk göründüğü indis kümesi olup $L_B(w)$ kümesine w için *en soldaki mutlak değer kümesi* denir.

Başka bir deyişle, $j \in L_B(w)$ olması, $|a_j|$ değerinin ilk kez j konumunda ortaya çıkmasına denktir. Yani, $L_B(w)$ içindeki indisler; $(|a_1|, \ldots, |a_n|)$ dizisindeki terimlerin ilk kez ortaya çıktığı konumları gösterir.

Örnek 2.10. Temel örneğimiz olan

$$w = 0\,\overline{1}\,1\,0\,0\,\overline{2}\,2\,\overline{3}\,3\,3\,\overline{3}\,\overline{2}\,2\,1\,\overline{1}$$

işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu durumda w nin yıldızsız dizisi

$$(a_1, \ldots, a_7) = (\overline{1}, 0, \overline{2}, \overline{3}, 3, \overline{2}, 1)$$

şeklinde olup sırasıyla mutlak değerleri alındığında

$$(|a_1|, \ldots, |a_7|) = (1, 0, 2, 3, 3, 2, 1)$$

dizisi elde edilir. Burada $1, 0, 2$ ve 3 değerleri ilk kez sırasıyla $1, 2, 3$ ve 4 konumlarında ortaya çıkar. Böylece,

$$L_B(w) = \{1, 2, 3, 4\}$$

olarak bulunur.

Şimdi, B tipi işaretli seviye istatistiklerini; $L_B(w)$ içindeki indislere ve $<_{\text{lev}}$ seviye sıralamasına göre tanımlayalım.

Tanım 2.5. $w \in \mathrm{SRGF}_n$ olsun. Her $i \in [n]$ için, *B tipi sol-büyük istatistiği*

$$lb_i^B(w) := \#\Big\{\, j \in L_B(w) \;:\; j < i,\; a_j >_{\text{lev}} a_i \Big\}$$

ile, ve *B tipi sol-küçük istatistiği* de

$$ls_i^B(w) := \#\Big\{\, j \in L_B(w) \;:\; j < i,\; a_j <_{\text{lev}} a_i \Big\}$$

şeklinde tanımlayalım, burada $\#$ notasyonu ilgili kümelerin kardinaliteleri gösterilmektedir. Böylece

$$\mathrm{levLB}_B(w) := \sum_{i=1}^{n} lb_i^B(w)\,|a_i| \qquad \text{ve} \qquad \mathrm{levLS}_B(w) := \sum_{i=1}^{n} ls_i^B(w)\,|a_i|$$

seviye-ağırlıklı istatistiklerine sırasıyla *seviye-ağırlıklı sol-büyük istatistik* ve *seviye-ağırlıklı sol-küçük istatistik* denir.

Örnek 2.11. $w = 0\,\overline{1}\,1\,0\,0\,\overline{2}\,2 \in \mathrm{SRGF}_3$ olsun. Bu durumda yıldızsız dizi

$$(a_1, a_2, a_3) = (\overline{1}, 0, \overline{2})$$

şeklinde olup w nin en soldaki mutlak değer kümesi

$$L_B(w) = \{1, 2, 3\}$$

dir. $i = 3$ durumunu ele alalım. $a_3 = \overline{2}$ olduğundan, bu terim $a_1 = \overline{1}$ ve $a_2 = 0$ ile karşılaştırılır. Seviye sıralaması

$$0 <_{\text{lev}} \overline{1} <_{\text{lev}} \overline{2}$$

olduğu için, hem $a_1 <_{\text{lev}} a_3$ hem de $a_2 <_{\text{lev}} a_3$ dür. Dolayısıyla,

$$lb_3^B(w) = 0 \qquad \text{ve} \qquad ls_3^B(w) = 2$$

dir.

Dikkat edilecek olunursa bu istatistikler, w dizisinin yıldızlı terimlerine değil, sadece $(a_1, \ldots, a_n)$ dizisine bağlıdır.

Bu istatistikler, Wachs ve White'ın inversiyon istatistikleriyle ilişkili [10] olup burada B tipi duruma uyarlanmıştır. Her i için, $lb_i^B(w)$ ve $ls_i^B(w)$ istatistikleri, a_i yıldızsız harfinin seviyesinin, seviye sırasına göre kendisinden önce gelen yıldızsız harflerin seviyeleriyle nasıl karşılaştırıldığını ölçer. Bu istatistiklerin seviye ağırlıklı toplamları olan $\mathrm{levLB}_B(w)$ ve $\mathrm{levLS}_B(w)$ istatistikleri ise her bir katkıyı ilgili yıldızsız harfin mutlak değeri olan $|a_i|$ ile ağırlıklandırır. Böylece, B tipi (p, q)-Stirling polinomları, B tipi Stirling sayılarının istatistiksel anlamda bir (p, q)-rafineleştirmesi olarak elde edilir.

Örnek 2.12. Yine, temel örneğimiz olan

$$w = 0\,\overline{1}\,1\,0\,0\,\overline{2}\,2\,\overline{3}\,3\,3\,\overline{3}\,\overline{2}\,2\,1\,\overline{1}$$

işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonunu ele alalım. Bu durumda yıldızsız terimler

$$(a_1, \ldots, a_7) = (\overline{1}, 0, \overline{2}, \overline{3}, 3, \overline{2}, 1)$$

formunda ve seviye sıralaması

$$0 <_{\text{lev}} \overline{1} <_{\text{lev}} 1 <_{\text{lev}} \overline{2} <_{\text{lev}} 2 <_{\text{lev}} \overline{3} <_{\text{lev}} 3$$

şeklindedir. Örnek 2.10 dan, w nin en soldaki mutlak değer kümesinin $L_B(w) = \{1, 2, 3, 4\}$ olduğu bilinmektedir. Her $i \in [7]$ için, $lb_i^B(w)$ ve $ls_i^B(w)$ değerleri, a_i teriminin

$j < i$ ve $j \in L_B(w)$ koşullarını sağlayan a_j terimleriyle karşılaştırılmasıyla elde edilir. $lb_i^B(w)$ ve $ls_i^B(w)$ değerleri Tablo 2.1 de verilmiştir. Bunu $i = 6$ durumu üzerinden açıklayalım. $i = 6$ için $a_6 = \overline{2}$ terimini $j \in L_B(w) = \{1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere a_j terimleriyle karşılaştıralım. Seviye sıralamasına göre

$$a_1 = \overline{1} <_{\text{lev}} \overline{2}, \quad a_2 = 0 <_{\text{lev}} \overline{2}, \quad a_3 = \overline{2}, \quad a_4 = \overline{3} >_{\text{lev}} \overline{2}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, a_4 terimi $lb_6^B(w)$ değerine katkı sağlar, a_1 ve a_2 terimleri ise $ls_6^B(w)$ değerine katkı sağlar. Öte yandan, $a_3 = \overline{2}$ terimi bu iki sayımdan hiçbirine katkı sağlamaz. Bu nedenle,

$$lb_6^B(w) = 1 \qquad \text{ve} \qquad ls_6^B(w) = 2$$

olup geriye kalan değerler de benzer şekilde hesaplanır.

Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} \text{levLB}_B(w) &= \sum_{i=1}^{7} lb_i^B(w)\,|a_i| \\ &= lb_6^B(w)\,|a_6| + lb_7^B(w)\,|a_7| \\ &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \text{levLS}_B(w) &= \sum_{i=1}^{7} ls_i^B(w)\,|a_i| \\ &= 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ &= 31 \end{aligned}$$

bulunur.

Tablo 2.1. $w = 0\,\overline{1}\,1\,0\,0\,\overline{2}\,2\,\overline{3}\,3\,3\,\overline{3}\,\overline{2}\,2\,1\,\overline{1}$ için $lb_i^B(w)$ ve $ls_i^B(w)$ değerleri.

$\mathbf{i}$	$\mathbf{a_i}$	$\mathbf{\lvert a_i \rvert}$	$\mathbf{lb_i^B(w)}$	$\mathbf{ls_i^B(w)}$
1	$\overline{1}$	1	0	0
2	0	0	1	0
3	$\overline{2}$	2	0	2
4	$\overline{3}$	3	0	3
5	3	3	0	4
6	$\overline{2}$	2	1	2
7	1	1	2	2

2.1.5. B Tipi Kale Yerleşimleri Üzerindeki İstatistikler

Şimdi, yukarıda tanımlanan işaretli istatistikleri B tipi Ferrers tahtası $\mathcal{F}_n^{(B)}$ üzerindeki kale yerleşimlerini kullanarak yorumlayacağız. Özellikle, zayıf silme işlemi yardımıyla B tipi kale istatistiklerini tanımlayacağız ve Önerme 2.1 de verilen Φ birebir eşlemesine dayanarak bu istatistiklerin işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonlarının kümesi üzerinde tanımlanan istatistiklerle örtüştüğünü göstereceğiz.

Tanım 2.6. $\mathcal{F}_n^{(B)}$ Ferrers tahtası üzerinde bir B tipi kale yerleşimi $P = \{(r_i, i) : 1 \leq i \leq n\} \in \mathcal{T}_n^{(B)}$ olsun.

En soldaki mutlak değer sütunları kümesini

$$L_B(P) := \big\{ j \in [n] : \text{her } i < j \text{ için } |r_i| \neq |r_j| \ \big\} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlayalım. Yani, $L_B(P)$ içindeki indisler; $(|r_1|, \ldots, |r_n|)$ dizisindeki terimlerin ilk kez ortaya çıktığı konumları gösterir. Aşağıdaki güneydoğu (SE tipi) silmeler ile kuzeydoğu (NE tipi) silmelerin tanımlarında görüleceği üzere, yalnızca $L_B(P)$ kümesindeki numaraların temsil ettiği sütunlarda bulunan kalelerin silme işlemi yapmasına izin verilicektir.

Güneydoğu (SE tipi) silmeler, her $j \in L_B(P)$ için, (r_j, j) kalesi, $\mathcal{F}_n^{(B)}$ tahtasında

$$k > j \quad \text{ve} \quad t <_{\text{lev}} r_j$$

koşullarını sağlayan tüm $(t, k) \in \mathcal{F}_n^{(B)}$ hücrelerini siler. Böylece silmeler, j sütununun sağındaki sütunlarda ve r_j seviyesinin altında gerçekleşir.

SE-silme sayıları, her $i \in [n]$ için,

$$\delta_i^{SE}(P) := \#\Big\{ j \in L_B(P) : j < i \text{ ve } r_i <_{\text{lev}} r_j \Big\} \tag{2.4}$$

olarak tanımlanır. Burada $\delta_i^{SE}(P)$, önceki sütunlardan gelen SE-silmelerin (r_i, i) hücresini kaç kez sildiğini sayar.

Seviye-ağırlıklı SE istatistiği

$$\mathrm{levSE}_B(P) := \sum_{i=1}^{n} \delta_i^{SE}(P)\,|r_i| \tag{2.5}$$

şekilde tanımlanır.

Kuzeydoğu (NE tipi) silmeler, benzer şekilde, her $j \in L_B(P)$ için, (r_j, j) kalesi, $\mathcal{F}_n^{(B)}$ tahtasında

$$k > j \quad \text{ve} \quad r_j <_{\mathrm{lev}} t$$

koşullarını sağlayan tüm $(t,k) \in \mathcal{F}_n^{(B)}$ hücrelerini siler. Böylece silmeler, j sütununun sağındaki sütunlarda ve r_j seviyesinin üstünde gerçekleşir.

NE-silme sayıları, her $i \in [n]$ için,

$$\delta_i^{NE}(P) := \#\Big\{ j \in L_B(P) : j < i,\ r_j <_{\mathrm{lev}} r_i \Big\} \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\delta_i^{NE}(P)$, önceki sütunlardan gelen NE-silmelerin (r_i, i) hücresini kaç kez sildiğini sayar.

Son olarak, **seviye-ağırlıklı NE istatistiği**

$$\mathrm{levNE}_B(P) := \sum_{i=1}^{n} \delta_i^{NE}(P)\,|r_i| \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır.

Not 2.3. *Bu silme işlemi, Wachs ve White'ın silme işlemiyle ilişkilidir [10], ancak burada tanımlanan istatistikler farklıdır. Silinmemiş hücreleri saymak yerine, her sütundaki kalenin önceki sütunlardan gelen silme bölgeleri tarafından kaç kez silindiği sayılmaktadır. Bu yaklaşım, seviye sıralamasının ve mutlak değerlerin ilk kez ortaya çıkışlarının kullanıldığı 2.1.4 alt kesmindeki B tipi yapı ile uyumludur.*

Silme işlemini önce basit bir örnek üzerinde, ardından temel örneğimiz üzerinde göstereceğiz.

Örnek 2.13. $P = \{(\overline{1}, 1), (0, 2), (\overline{2}, 3)\} \in \mathcal{T}_3^{(B)}$ olsun. Bu durumda, farklı mutlak değerler ilk kez sırasıyla 1, 2 ve 3 sütunlarında ortaya çıktığından

$$L_B(P) = \{1, 2, 3\}$$

elde edilir.

Önce 3-üncü sütundaki $(\overline{2}, 3)$ kalesini ele alalım. SE-silme için, $(\overline{1}, 1)$ kalesi yalnızca $\overline{1}$ seviyesinin altında kalan hücreleri siler. Ancak $\overline{2}$, seviye sıralamasında $\overline{1}$ den daha yukarıda bulunduğu için, $(\overline{1}, 1)$ kalesi $(\overline{2}, 3)$ hücresini silmez. Ayrıca, $(0, 2)$ kalesi SE-silme açısından hiçbir hücre silmez, çünkü 0 seviyesinin altında herhangi bir satır bulunmamaktadır. Dolayısıyla,

$$\delta_3^{SE}(P) = 0$$

olur. NE-silme için ise, $(\overline{1}, 1)$ kalesi $\overline{1}$ seviyesinin üstünde ve sağındaki sütunlarda bulunan tüm hücreleri siler. Bu nedenle, $(\overline{2}, 3)$ hücresini siler. Benzer şekilde, $(0, 2)$ kalesi de 0 seviyesinin üstünde bulunan hücreleri sildiğinden $(\overline{2}, 3)$ hücresini siler. Böylece,

$$\delta_3^{NE}(P) = 2$$

olur.

Örnek 2.14. Temel örneğimizle devam edelim:

$$w = 0\,\overline{1}\,1\,0\,0\,\overline{2}\,2\,\overline{3}\,3\,3\,\overline{3}\,\overline{2}\,2\,1\,\overline{1}$$

ve

$$\Phi(w) = P = \{(\overline{1}, 1), (0, 2), (\overline{2}, 3), (\overline{3}, 4), (3, 5), (\overline{2}, 6), (1, 7)\} \in \mathcal{T}_7^{(B)}$$

olsun. Burada P, $\mathcal{F}_7^{(B)}$ Ferrers tahtası üzerindeki B tipi kale yerleşimidir. Buna karşılık gelen satır etiketleri

$$(r_1, \ldots, r_7) = (\overline{1}, 0, \overline{2}, \overline{3}, 3, \overline{2}, 1)$$

şeklindedir. Bu satır etiketlerinin mutlak değerleri

$$(|r_1|, \ldots, |r_7|) = (1, 0, 2, 3, 3, 2, 1)$$

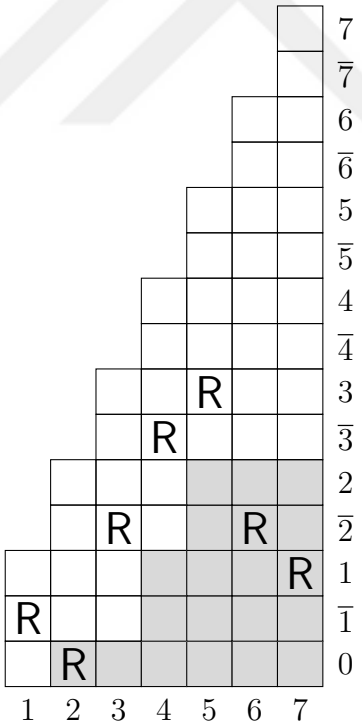
olup $1, 0, 2$ ve 3 mutlak değerleri ilk kez sırasıyla $1, 2, 3$ ve 4 sütunlarında ortaya çıkar. Dolayısıyla,

$$L_B(P) = \{1, 2, 3, 4\}$$

dir. Yalnızca bu sütunlarda bulunan kalelerin silme işlemi yapacağını unutmayalım. Şimdi SE tipi silme işlemini sütun sütun uygulayalım.

- $(\overline{1}, 1)$ kalesi, $k > 1$ ve $t <_{\text{lev}} \overline{1}$ koşullarını sağlayan tüm (t, k) hücrelerini siler. Başka bir deyişle, 2 den 7 ye kadar olan sütunlarda 0 satırında bulunan tüm hücreleri siler.
- $(0, 2)$ kalesi hiçbir hücre silmez; çünkü seviye sıralamasında 0 ın altında herhangi bir satır bulunmamaktadır.
- $(\overline{2}, 3)$ kalesi, 4 ten 7 ye kadar olan sütunlarda $\{0, \overline{1}, 1\}$ satırlarında bulunan tüm hücreleri siler.
- $(\overline{3}, 4)$ kalesi, 5 ten 7 ye kadar olan sütunlarda $\{0, \overline{1}, 1, \overline{2}, 2\}$ satırlarında bulunan tüm hücreleri siler.

SE-silmeler Şekil 2.4 de gösterilmiştir.



Şekil 2.4. $P = \Phi(w)$ kale yerleşimi için SE tipi silmeler. Gölgeli hücreler, $L_B(P) = \{1, 2, 3, 4\}$ sütunlarında bulunan kaleler tarafından silinen hücreleri göstermektedir.

Şimdi her $i \in [7]$ için $\delta_i^{SE}(P)$ ve $\delta_i^{NE}(P)$ değerlerini hesaplayalım. Bu değerler, sırasıyla SE ve NE kurallarına göre, (r_i, i) kale hücresinin $L_B(P)$ kümesine ait önceki sütunlardan

gelen silmeler tarafından kaç kez silindiğini sayar. Elde edilen değerler Tablo 2.2 de verilmiştir.

Tablo 2.2. $P = \Phi(w)$ kale yerleşimi için SE ve NE kurallarına göre elde edilen $\delta_i^{SE}(P)$ ve $\delta_i^{NE}(P)$ silme istatistikleri.

$\mathbf{i}$	$\mathbf{r_i}$	$\delta_{\mathbf{i}}^{\mathbf{SE}}(\mathbf{P})$	$\delta_{\mathbf{i}}^{\mathbf{NE}}(\mathbf{P})$
1	$\overline{1}$	0	0
2	0	1	0
3	$\overline{2}$	0	2
4	$\overline{3}$	0	3
5	3	0	4
6	$\overline{2}$	1	2
7	1	2	2

Tablo 2.2 den

$$(\delta_1^{SE}, \ldots, \delta_7^{SE}) = (0,1,0,0,0,1,2) \quad \text{ve} \quad (\delta_1^{NE}, \ldots, \delta_7^{NE}) = (0,0,2,3,4,2,2)$$

olduğu görülür. Şimdi seviye-ağırlıklı SE istatistiği $\mathrm{levSE}_B(P) = \sum_{i=1}^{7} \delta_i^{SE}(P)\,|r_i|$ nin alacağı değeri hesaplayalım: Yalnızca $i = 6, 7$ indislerine karşılık gelen

$$|r_6| = 2 \quad \text{ve} \quad |r_7| = 1$$

değerleri toplama katkı sağlayacağı için

$$\mathrm{levSE}_B(P) = (1 \cdot 2) + (2 \cdot 1) = 4$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\mathrm{levNE}_B(P) = \sum_{i=1}^{7} \delta_i^{NE}(P)\,|r_i| = (2 \cdot 2) + (3 \cdot 3) + (4 \cdot 3) + (2 \cdot 2) + (2 \cdot 1) = 31$$

olarak bulunur.

Lemma 2.1. *$w \in \mathrm{SRGF}_n$ ve $P = \Phi(w) \in \mathfrak{T}_n^{(B)}$ olsun. Bu durumda*

$$\mathrm{levLB}_B(w) = \mathrm{levSE}_B(P) \qquad \textit{ve} \qquad \mathrm{levLS}_B(w) = \mathrm{levNE}_B(P)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. $w = a_0 a_1 a_1^* \cdots a_n a_n^* \in \mathrm{SRGF}_n$ ve $P = \Phi(w) = \{(r_i, i) : 1 \leq i \leq n\}$ olsun. Φ dönüşümünün tanımından, her $i,\ 1 \leq i \leq n$ için $r_i = a_i$ elde edilir. Dolayısıyla, w ve P nin en soldaki mutlak değer indislerinden oluşan kümeleri aynıdır: Yani,

$$\begin{aligned} L_B(P) &= \{j \in [n] :\ \text{her } i < j \text{ için } |r_i| \neq |r_j|\} \\ &= \{j \in [n] :\ \text{her } i < j \text{ için } |a_i| \neq |a_j|\} \\ &= L_B(w) \end{aligned}$$

dir. Şimdi $i \in [n]$ elemanını sabitleyelim. Her $j \in L_B(P)$ için SE-silme işlemi, $k > j$ ve $t <_{\mathrm{lev}} r_j$ koşullarını sağlayan tüm (t, k) hücrelerini siler. Dolayısıyla, (r_i, i) kale hücresinin j sütunundan gelen SE-silme ile silinebilmesi için gerek ve yeter şart $j < i$ ve $r_i <_{\mathrm{lev}} r_j$ olmasıdır. Bu da eşdeğer olarak $r_j >_{\mathrm{lev}} r_i$ anlamına gelir. Bu nedenle,

$$\begin{aligned} \delta_i^{SE}(P) &= \#\{\, j \in L_B(P) : j < i,\ r_j >_{\mathrm{lev}} r_i \,\} \\ &= \#\{\, j \in L_B(w) : j < i,\ a_j >_{\mathrm{lev}} a_i \,\} \\ &= lb_i^B(w) \end{aligned}$$

elde ederiz. Her iki taraf $|r_i| = |a_i|$ ile çarpılıp $i,\ 1 \leq i \leq n$ üzerinden toplam aldığımızda,

$$\mathrm{levSE}_B(P) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^{SE}(P)\,|r_i| = \sum_{i=1}^{n} lb_i^B(w)\,|a_i| = \mathrm{levLB}_B(w)$$

eşitliğini buluruz. Her $j \in L_B(P)$ için NE-silme işlemi, $k > j$ ve $r_j <_{\mathrm{lev}} t$ koşullarını sağlayan tüm (t, k) hücrelerini siler. Dolayısıyla, (r_i, i) kale hücresinin j sütunundan gelen NE-silme ile silinebilmesi için gerek ve yeter şart $j < i$ ve $r_j <_{\mathrm{lev}} r_i$ olmasıdır. Buradan

$$\delta_i^{NE}(P) = \#\{\, j \in L_B(P) : j < i,\ r_j <_{\mathrm{lev}} r_i \,\} = ls_i^B(w)$$

olduğu elde edilir. Son olarak, her iki taraf $|r_i| = |a_i|$ ile çarpılıp $i,\ 1 \leq i \leq n$ üzerinden toplam alındığında

$$\mathrm{levNE}_B(P) = \mathrm{levLS}_B(w)$$

sonucuna ulaşılır. □

2.2. B Tipi (p,q)-Stirling Polinomları

Şimdi B tipi (p,q)-Stirling polinomlarını tanıtacağız. Her bir $k,\ 0 \leq k \leq n$ için $\mathrm{SRGF}_{n,k}$ kümesini,

$$\max_{1\leq i\leq n} |a_i| = k$$

olacak şekildeki B tipi

$$w = a_0\, a_1\, a_1^*\, a_2\, a_2^*\, \cdots\, a_n\, a_n^* \in \mathrm{SRGF}_n^{(B)}$$

işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonlarının kümesi olarak tanımlayalım. Daha sonra, 0 harfinin yıldızsız harfler arasında bulunup bulunmamasına göre iki alt küme tanımlayalım: Bunlar,

$$\mathrm{SRGF}_{n,k}^{(B,0)} = \{\, w \in \mathrm{SRGF}_{n,k} : 0 \notin \{a_1, \ldots, a_n\} \,\}$$

ve

$$\mathrm{SRGF}_{n,k}^{(B,1)} = \{\, w \in \mathrm{SRGF}_{n,k} : 0 \in \{a_1, \ldots, a_n\} \,\}$$

olsun. Benzer şekilde, $\mathfrak{T}_{n,k}^{(B)}$ kümesini,

$$\max_{1\leq i\leq n} |r_i| = k$$

olacak şekildeki B tipi

$$P = \{(r_i, i) : 1 \leq i \leq n\} \in \mathfrak{T}_n^{(B)}$$

kale yerleşimlerinin kümesi olarak tanımlayalım.

Tanım 2.7. $n \geq 1$ ve $0 \leq k \leq n$ tamsayıları verilsin. İkinci tür B tipi (p,q)-Stirling polinomları aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$S_{p,q}^{(B)}(n,k) = \sum_{w\in \mathrm{SRGF}_{n,k}} q^{\mathrm{levLB}_B(w)}\, p^{\mathrm{levLS}_B(w)}.$$

Not 2.4. *$S_{p,q}^{(B)}(n,k)$ polinomları, ikinci tür B tipi Stirling sayılarının bir nevi (p,q)-formudur. $p=q=1$ alındığında, bu polinomlar B tipi ikinci tür Stirling sayılarının bir türevine indirgenir; başka bir ifadeyle, $S_{1,1}^{(B)}(n,k)$ $(=\mid \mathrm{SRGF}_{n,k} \mid > S_B(n,k))$, k blok çiftine sahip sıralı işaretli küme parçalanmalarının bir alt sınıfını sayar. Bu alt sınıf; P_{2i-1} (veya P_{2i}) alt blogu aynı işaretli sayılardan oluşan (eğer varsa) P_{2i-1}/P_{2i} blok*

çiftlerinin sırasının P_{2i}/P_{2i-1} şeklinde değiştirilmesine izin verilen k blok çiftine sahip sıralı işaretli küme parçalanmalarından oluşur. p ve q parametreleri, levLS_B *ve* levLB_B *seviye ağırlıklı işaretli istatistiklerinin ortak dağılımını kaydeder. Burada p parametresi* levLS_B *istatistiğinin aldığı değerleri, q parametresi ise* levLB_B *istatistiğinin aldığı değerleri kodlar.*

Tanım 2.7 yi aşağıdaki örnek üzerinde gösterelim.

Örnek 2.15. $S_{p,q}^{(B)}(3,2)$ polinomunu hesaplayalım. Seviye sırası ve yukarıda tanımlanan istatistikler kullanılarak, $\mathrm{SRGF}_{3,2}^{(B)} = \{w = a_0\, a_1\, a_1^*\, a_2\, a_2^*\, a_3\, a_3^* : \max\{|a_1|,|a_2|,|a_3|\} = 2\}$ kümesinin elemanları ve bunlara karşılık gelen istatistikler Tablo 2.3 de listelenmiştir.

Örneğin, Tablo 2.3 deki $0\overline{1}11\overline{1}\overline{2}2$ işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonuna karşılık gelen işaretli küme parçalanması $\tau = 0 \mid \overline{1}, 2/1, \overline{2} \mid \overline{3}/3$ olup τ parçalanmasında aynı işarete sahip sayılardan oluşan blok çifti $\overline{3}/3$ olup aslında τ ile aynı parçalanma olan $\tau' = 0 \mid \overline{1}, 2/1, \overline{2} \mid 3/\overline{3}$ ye karşılık gelen işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonu $0\overline{1}11\overline{1}2\overline{2}$ dir. Bir başka örnek verecek olursak, Tablo 2.3 deki $0\overline{1}1\overline{1}\overline{2}2$, $0\overline{1}1\overline{1}2\overline{2}$, $01\overline{1}1\overline{1}\overline{2}2$ ve $01\overline{1}1\overline{1}2\overline{2}$ işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonunlarına karşılık gelen işaretli küme parçalanmaları sırasıyla $\tau_1 = 0 \mid \overline{1}, \overline{2}/1, 2 \mid \overline{3}/3$, $\tau_2 = 0 \mid \overline{1}, \overline{2}/1, 2 \mid 3/\overline{3}$, $\tau_3 = 0 \mid 1, 2/\overline{1}, \overline{2} \mid \overline{3}/3$ ve $\tau_4 = 0 \mid 1, 2/\overline{1}, \overline{2} \mid 3/\overline{3}$ tür. Dikkat edilecek olunursa, bu dört parçalanma da birbirlerinin aynısıdır, fakat blok sıralamaları farklıdır. Ayrıca, Tablo 2.3 de verilen değerlerden

$$S_{p,q}^{(B)}(3,2) = 8p^2 + 2p^3 + 8p^4 + 4p^5 + 2p^6 \;+\; q\,(4p^2 + 2p^3)$$

polinomu elde edilir. Böylece $S_{1,1}^{(B)}(3,2) = 30$ olduğu görülür.

Burada Acharyya'nın [11] deki işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonu tanımıma göre $S_{1,1}^{(B)}(n,k) = S_B(n,k)$ olduğuna dikkat edelim. Acharyya anlamında, Tablo 1.2 den $S_{1,1}^{(B)}(3,2) = S_B(3,2) = 9$ olduğu görülür.

Örnek 2.16. Örnek 2.12 de ele alınan

$$w = 0\,\overline{1}\,1\,0\,0\,\overline{2}\,2\,\overline{3}\,3\,3\,\overline{3}\,\overline{2}\,2\,1\,\overline{1}$$

işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonu için

$$\mathrm{levLB}_B(w) = 4 \quad \text{ve} \quad \mathrm{levLS}_B(w) = 31$$

Tablo 2.3. $\mathrm{SRGF}_{3,2}^{(B)}$ kümesi üzerinde $\mathrm{levLB}_B(w)$ ve $\mathrm{levLS}_B(w)$ istatistiklerinin dağılımı.

$\mathbf{w}$	$(\mathbf{lb_1^B}, \mathbf{lb_2^B}, \mathbf{lb_3^B})$	$(\mathbf{ls_1^B}, \mathbf{ls_2^B}, \mathbf{ls_3^B})$	$\mathrm{levLB}_{\mathbf{B}}(\mathbf{w})$	$\mathrm{levLS}_{\mathbf{B}}(\mathbf{w})$
$000\overline{1}1\overline{2}2$	$(0,0,0)$	$(0,1,2)$	0	5
$000\overline{1}12\overline{2}$	$(0,0,0)$	$(0,1,2)$	0	5
$0001\overline{12}2$	$(0,0,0)$	$(0,1,2)$	0	5
$0001\overline{1}2\overline{2}$	$(0,0,0)$	$(0,1,2)$	0	5
$0\overline{1}100\overline{2}2$	$(0,1,0)$	$(0,0,2)$	0	4
$0\overline{1}1002\overline{2}$	$(0,1,0)$	$(0,0,2)$	0	4
$0\overline{1}1\overline{1}1\overline{2}2$	$(0,0,0)$	$(0,0,1)$	0	2
$0\overline{1}1\overline{1}12\overline{2}$	$(0,0,0)$	$(0,0,1)$	0	2
$0\overline{1}11\overline{12}2$	$(0,0,0)$	$(0,1,1)$	0	3
$0\overline{1}11\overline{1}2\overline{2}$	$(0,0,0)$	$(0,1,1)$	0	3
$0\overline{1}1\overline{2}200$	$(0,0,2)$	$(0,1,0)$	0	2
$0\overline{1}1\overline{2}2\overline{1}1$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	1	2
$0\overline{1}1\overline{2}21\overline{1}$	$(0,0,1)$	$(0,1,1)$	1	3
$0\overline{1}1\overline{2}2\overline{2}2$	$(0,0,0)$	$(0,1,1)$	0	4
$0\overline{1}1\overline{2}22\overline{2}$	$(0,0,0)$	$(0,1,2)$	0	6
$0\overline{1}12\overline{2}00$	$(0,0,2)$	$(0,1,0)$	0	2
$0\overline{1}12\overline{2}\overline{1}1$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	1	2
$0\overline{1}12\overline{2}1\overline{1}$	$(0,0,1)$	$(0,1,1)$	1	3
$0\overline{1}12\overline{2}2\overline{2}$	$(0,0,0)$	$(0,1,1)$	0	4
$01\overline{1}00\overline{2}2$	$(0,1,0)$	$(0,0,2)$	0	4
$01\overline{1}002\overline{2}$	$(0,1,0)$	$(0,0,2)$	0	4
$01\overline{1}1\overline{12}2$	$(0,0,0)$	$(0,0,1)$	0	2
$01\overline{1}1\overline{1}2\overline{2}$	$(0,0,0)$	$(0,0,1)$	0	2
$01\overline{1}\overline{2}200$	$(0,0,2)$	$(0,1,0)$	0	2
$01\overline{1}\overline{2}21\overline{1}$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	1	2
$01\overline{1}\overline{2}2\overline{2}2$	$(0,0,0)$	$(0,1,1)$	0	4
$01\overline{1}\overline{2}22\overline{2}$	$(0,0,0)$	$(0,1,2)$	0	6
$01\overline{1}2\overline{2}00$	$(0,0,2)$	$(0,1,0)$	0	2
$01\overline{1}2\overline{2}1\overline{1}$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	1	2
$01\overline{1}2\overline{2}2\overline{2}$	$(0,0,0)$	$(0,1,1)$	0	4

değerlerini bulmuştuk. Dolayısıyla, w işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonuna $S_{p,q}^{(B)}(7,3)$ polinomu içinde karşılık gelen terim q^4p^{31} dir.

n ve k nin bazı küçük değerleri için, B tipi (p,q)-Stirling polinomları el yordamıyla ile hesaplanabilir. $1 \leq k \leq n \leq 5$ için karşılık gelen değerler Tablo 2.4 de verilmiştir.

Tablo 2.4. $1 \leq k \leq n \leq 5$ için B tipi (p,q)-Stirling polinomlarının terimleri.

n\k	1	2	3	4	5
1	2				
2	$4+3p$	$4p^2$			
3	$6+9p+4p^2+p^3$	$8p^2+2p^3+8p^4+4p^5$ $+2p^6+q(4p^2+2p^3)$	$8p^8$		
4	$8+18p+16p^2$ $+9p^3+3p^4+p^5$	$12p^2+6p^3+22p^4+20p^5$ $+18p^6+3p^7+10p^8+4p^9$ $+4p^{10}+2p^{11}$ $+q(8p^2+10p^3+12p^4+8p^5$ $+10p^6+4p^7)$ $+q^2(4p^2+4p^3+2p^4)$	$16p^8+4p^9+8p^{10}+8p^{11}$ $+4p^{12}+8p^{13}+16p^{14}+4p^{17}$ $+q(8p^8+4p^9)$ $+q^2(8p^8+4p^9+8p^{10}+4p^{12})$	$16p^{20}$	
5	$10+30p+40p^2+35p^3$ $+21p^4+11p^5+4p^6+p^7$	$16p^2+12p^3+44p^4+56p^5$ $+60p^6+25p^7+45p^8+27p^9$ $+32p^{10}+14p^{11}+19p^{12}+5p^{13}$ $+8p^{14}+4p^{15}+2p^{16}+2p^{17}$ $+q(12p^2+24p^3+32p^4+36p^5$ $+60p^6+42p^7+27p^8+21p^9$ $+20p^{10}+11p^{11}+6p^{12}+2p^{13})$ $+q^2(8p^2+14p^3+28p^4+20p^5$ $+18p^6+14p^7+9p^8+2p^9)$ $+q^3(4p^2+6p^3+6p^4+2p^5)$	$24p^8+12p^9+20p^{10}+28p^{11}$ $+20p^{12}+42p^{13}+68p^{14}+28p^{15}$ $+16p^{16}+28p^{17}+14p^{18}+8p^{19}$ $+24p^{20}+2p^{21}+8p^{22}+20p^{23}$ $+4p^{25}+8p^{26}$ $+q(16p^8+12p^9+20p^{10}+16p^{11}$ $+20p^{12}+8p^{13}+16p^{14}+16p^{15}$ $+4p^{16}+4p^{17}+2p^{18})$ $+q^2(24p^8+28p^9+36p^{10}+8p^{11}$ $+36p^{12}+8p^{13}+36p^{14}+28p^{15}$ $+24p^{16}+20p^{17}+20p^{18}$ $+12p^{19}+4p^{20}+4p^{21})$ $+q^3(8p^8+8p^9+12p^{10}+4p^{11}$ $+4p^{12}+2p^{13})$ $+q^4(8p^8+8p^9+20p^{10}+8p^{11}$ $+16p^{12}+4p^{13}+8p^{14}+4p^{16})$	$32p^{20}+8p^{21}+16p^{22}+24p^{24}$ $+16p^{26}+16p^{27}+24p^{29}+16p^{30}$ $+16p^{32}+8p^{36}$ $+q(16p^{20}+8p^{21})$ $+q^2(16p^{20}+8p^{21}+16p^{22}+8p^{24})$ $+q^3(16p^{20}+8p^{21}+16p^{26}+8p^{29})$ $+q^4(16p^{22}+8p^{24})$	$32p^{40}$

Şimdi, Tanım 2.5 ve Tanım 2.6 da verilen istatistikleri ve Önerme 2.1 de tanımlanan Φ fonksiyonunu gözönünde bulundurduğumuzda, ortak dağılımın korunduğunu göstereceğiz.

Teorem 2.1. *Her n ve k pozitif tamsayıları için*

$$S_{p,q}^{(B)}(n,k) = \sum_{w \in \mathrm{SRGF}_{n,k}} q^{\mathrm{levLB}_B(w)}\, p^{\mathrm{levLS}_B(w)} = \sum_{P \in \mathcal{T}_{n,k}^{(B)}} q^{\mathrm{levSE}_B(P)}\, p^{\mathrm{levNE}_B(P)}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Önerme 2.1 deki Φ dönüşümünün $\mathrm{SRGF}_{n,k}$ kümesine kısıtlaması $\mathrm{SRGF}_{n,k}$ ile $\mathcal{T}_{n,k}^{(B)}$ arasında birebir ve örten olup Lemma 2.1 gereğince, her $w \in \mathrm{SRGF}_{n,k}$ için

$$\mathrm{levLB}_B(w) = \mathrm{levSE}_B(P) \quad \text{ve} \quad \mathrm{levLS}_B(w) = \mathrm{levNE}_B(P)$$

olduğu görülür, burada $\Phi(w) = P \in \mathcal{T}_{n,k}^{(B)}$ dır. Böylece, Φ dönüşümünün $q^{\mathrm{levLB}_B(w)}\, p^{\mathrm{levLS}_B(w)}$ ağırlığını koruduğu sonucuna varılır. O halde, tüm $w \in \mathrm{SRGF}_{n,k}$ elemanları üzerinden toplam alındığında

$$\sum_{w\in \mathrm{SRGF}_{n,k}} q^{\mathrm{levLB}_B(w)}\, p^{\mathrm{levLS}_B(w)} = \sum_{P\in \mathcal{T}_{n,k}^{(B)}} q^{\mathrm{levSE}_B(P)}\, p^{\mathrm{levNE}_B(P)}$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Örnek 2.12 ve Örnek 2.14 den

$$w = 0\,\overline{1}\,1\,0\,0\,\overline{2}\,2\,\overline{3}\,3\,3\,\overline{3}\,\overline{2}\,2\,1\,\overline{1}$$

işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonu ve buna karşılık gelen $P = \Phi(w)$ kale yerleşimi için

$$(\mathrm{levLB}_B(w), \mathrm{levLS}_B(w)) = (4, 31)$$

ve

$$(\mathrm{levSE}_B(P), \mathrm{levNE}_B(P)) = (4, 31)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, hem w dizisi hem de P kale yerleşimi $S_{p,q}^{(B)}(7,3)$ Stirling polinomunda aynı q^4p^{31} ağırlığını vermektedir.

2.2.1. B Tipi (p,q)-Stirling Polinomları İçin İndirgeme Bağıntıları

Şimdi $S_{p,q}^{(B)}(n,k)$ polinomları için indirgeme bağıntılarını elde edeceğiz. Bunun için, bu polinomları $\mathrm{SRGF}_{n,k}$ deki w işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonunun yıldızsız harfleri arasında 0 harfinin bulunup bulunmamasına ve w dizisinde ilk görülen biçimi pozitif işaretli olan $j \in [k]$ indislerine göre daha ayrıntılı bir biçimde ele alacağız.

Tanım 2.8. $\varepsilon \in \{0,1\}$ için

$$S_{p,q}^{(B,\varepsilon)}(n,k) := \sum_{\substack{w\in \mathrm{SRGF}_{n,k} \\ 0\in\{a_1,\ldots,a_n\} \Longleftrightarrow \varepsilon=1}} q^{\mathrm{levLB}_B(w)}\, p^{\mathrm{levLS}_B(w)}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $S_{p,q}^{(B,0)}(n,k)$ polinomu, yıldızsız harfleri arasında 0 bulunmayan $\mathrm{SRGF}_{n,k}$ nin elemanlarını ağırlıklı olarak sayarken; $S_{p,q}^{(B,1)}(n,k)$ polinomu ise yıldızsız harfleri arasında 0 bulunan elemanları ağırlıklı olarak sayar. Özellikle,

$$S_{p,q}^{(B)}(n,k) = S_{p,q}^{(B,0)}(n,k) + S_{p,q}^{(B,1)}(n,k)$$

olduğuna dikkat edelim.

$k < 0$ veya $k > n$ olması durumunda $S_{p,q}^{(B,\varepsilon)}(n,k) = 0$ kabul edilir. Ayrıca,

$$S_{p,q}^{(B,0)}(0,0) = 1 \quad \text{ve} \quad S_{p,q}^{(B,1)}(0,0) = 0$$

ve $k \neq 0$ için $S_{p,q}^{(B,\varepsilon)}(0,k) = 0$ alınır.

Örnek 2.17. Örnek 2.15 de verilen işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonları tablosunu kullanarak, dizileri yıldızsız harfler arasında 0 harfinin bulunup bulunmamasına göre ayıralım. Yıldızsız harfleri arasında 0 bulunmayan diziler, $S_{p,q}^{(B,0)}(3,2)$ polinomunun oluşumuna katkı verir. Bu dizilerin ağırlıkları toplandığında

$$S_{p,q}^{(B,0)}(3,2) = 4p^2 + 2p^3 + 4p^4 + 2p^6 \ + \ q\,(4p^2 + 2p^3)$$

elde edilir. Benzer şekilde, yıldızsız harfleri arasında 0 bulunan diziler, $S_{p,q}^{(B,1)}(3,2)$ polinomunun oluşumuna katkı sağlar. Bu dizilerin ağırlıkları toplandığında

$$S_{p,q}^{(B,1)}(3,2) = 4p^2 + 4p^4 + 4p^5$$

elde edilir. Dolayısıyla, $n = 3$ ve $k = 2$ için

$$S_{p,q}^{(B)}(3,2) = S_{p,q}^{(B,0)}(3,2) + S_{p,q}^{(B,1)}(3,2) = 8p^2 + 2p^3 + 8p^4 + 4p^5 + 2p^6 \ + \ q\,(4p^2 + 2p^3)$$

dir.

Tanım 2.9. $w = a_0\, a_1\, a_1^* \cdots a_n\, a_n^* \in \mathrm{SRGF}_{n,k}$ olsun. $P(w)$ kümesini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$P(w) := \Big\{\, j \in [k] \ : \ w \text{ dizisinde } \{j, \overline{j}\} \text{ harflerinden ilk görünen } j \text{ harfidir} \Big\}$$

olsun. Başka bir ifadeyle, $P(w)$, w dizisinde ilk görülen biçimi pozitif işaretli olan $j \in [k]$ indislerinin kümesidir. Negatifin pozitiften önce gelme kuralı gereğince, eğer $j \in P(w)$ ise, $\overline{j}$ harfi w dizisinin yıldızsız harfleri arasında yer almaz. $P(w)$ kümesine w *nin pozitif-ilk kümesi* denir.

Örnek 2.18. $n = 4$ ve $k = 3$ için

$$w = 0\overline{1}11\overline{12}23\overline{3} \in \mathrm{SRGF}_{4,3}^{(B)}$$

işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonunu ele alalım. w dizisinde $\{1, \overline{1}\}$ ve $\{2, \overline{2}\}$ terimlerinden ilk görülenler sırasıyla $\overline{1}$ ve $\overline{2}$ olduğundan, $1, 2 \notin P(w)$ dir. Buna karşılık, $\{3, \overline{3}\}$ sayılarından w içinde ilk görüleni 3 olduğu için $3 \in P(w)$ dir.

Dolayısıyla,

$$P(w) = \{3\}$$

dür.

Tanım 2.10. $\varepsilon \in \{0,1\}$ ve $P \subseteq [k]$ olsun. $S_{p,q}^{(B,\varepsilon)}(n,k;P)$ polinomunu

$$S_{p,q}^{(B,\varepsilon)}(n,k;P) := \sum_{\substack{w \in \mathrm{SRGF}_{n,k}^{(B,\varepsilon)} \\ P(w)=P}} q^{\mathrm{levLB}_B(w)}\, p^{\mathrm{levLS}_B(w)}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece, $S_{p,q}^{(B,\varepsilon)}(n,k;P)$ polinomu, $\mathrm{SRGF}_{n,k}^{(B,\varepsilon)}$ kümesindeki pozitif-ilk kümesi tam olarak P olan tüm dizilerin ağırlıkları toplanarak elde edilir. Özellikle,

$$S_{p,q}^{(B,\varepsilon)}(n,k) = \sum_{P \subseteq [k]} S_{p,q}^{(B,\varepsilon)}(n,k;P)$$

olduğuna dikkat edelim.

Örnek 2.19. $n = 3$ ve $k = 2$ olsun. $P = \{2\} \subset [2]$ alt kümesini ele alalım. Tablo 2.3 kullanılarak, $\mathrm{SRGF}_{3,2}^{(B)}$ kümesindeki $P(w) = \{2\}$ koşulunu sağlayan diziler seçilir. Bunların içinde, yıldızsız harfleri arasında 0 bulunan dizilerin katkısı

$$S_{p,q}^{(B,1)}(3,2;\{2\}) = p^2 + p^4 + p^5$$

şeklinde olur. Benzer şekilde, yıldızsız harfleri arasında 0 bulunmayan dizilerin katkısı

$$S_{p,q}^{(B,0)}(3,2;\{2\}) = p^2 + p^3 + p^4 \; + \; q\,(p^2 + p^3)$$

şeklindedir. Bu örnek $P,\ P \subset [k]$ alt kümesinin seçimlerine bağlı olarak $S_{p,q}^{(B,\varepsilon)}(n,k)$ polinomlarının daha ayrıntılı bir biçimde rafine edildiğini göstermektedir.

İndirgeme bağıntısını kısa bir biçimde ifade etmek için, $P \subseteq [k]$ alt kümesiyle ilişkili aşağıdaki polinomları tanımlayalım.

Tanım 2.11. $P \subseteq [k]$ için $A_k(p,q;P)$ ve $B_k(p,q;P)$ polinomlarını aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$A_k(p,q;P) := \sum_{j=1}^{k} q^{(k-j)j} \left(p^{j(j-1)} + \mathbf{1}_{(j \notin P)}\, p^{j^2} \right) \tag{2.8}$$

$$B_k(p,q;P) := 1 + \sum_{j=1}^{k} q^{(k-j)j} \left(p^{j^2} + \mathbf{1}_{(j \notin P)}\, p^{j(j+1)} \right) \tag{2.9}$$

olsun.

Şimdi B tipi rafine edilmiş (p,q)-Stirling polinomları için indirgeme bağıntılarını elde edeceğiz.

Teorem 2.2. *$n \geq 1$, $1 \leq k \leq n$ ve $P \subseteq [k]$ olsun. B tipi rafine edilmiş (p,q)-Stirling polinomları aşağıdaki indirgeme bağıntılarını sağlar.*

0 ***harfinin bulunmadığı durum.*** *$\varepsilon = 0$ için*

$$S_{p,q}^{(B,0)}(n,k;P) = p^{k(k-1)}\, S_{p,q}^{(B,0)}\big(n-1,k-1;P\cap[k-1]\big) + A_k(p,q;P)\, S_{p,q}^{(B,0)}(n-1,k;P) \tag{2.10}$$

eşitliği sağlanır.

0 ***harfinin bulunduğu durum.*** *$\varepsilon = 1$ için*

$$\begin{aligned} S_{p,q}^{(B,1)}(n,k;P) = p^{k^2}\, S_{p,q}^{(B,1)}(n-1,k-1;P\cap[k-1]) + {} & B_k(p,q;P)\, S_{p,q}^{(B,1)}(n-1,k;P) \\ & + S_{p,q}^{(B,0)}(n-1,k;P) \end{aligned} \tag{2.11}$$

eşitliği sağlanır. Burada $A_k(p,q;P)$ ve $B_k(p,q;P)$ polinomları sırasıyla (2.8) *ve* (2.9) *eşitlikleriyle tanımlanmıştır.*

İspat. (1.8) eşitliğinde verilen işaretli kısıtlı büyüme koşulu gereğince, $w \in \mathrm{SRGF}_{n,k}$ dizisi, mutlak değeri k dan daha küçük tüm değerlere ulaşmadan en büyük mutlak değer olan k değerine ulaşamaz. Dolayısıyla, $1,2,\ldots,k$ tamsayılarının her biri w dizisinin yıldızsız harfleri arasında en az bir kez bulunur. Böylece, $L_B(w)$ kümesi $1,\ldots,k$ mutlak değerlerinin her biri için tam olarak bir temsilci indisi ve eğer mevcutsa 0 harfinin ilk görüldüğü yere ilişkin indisi içerir. Her iki indirgeme bağıntısını, 0 harfinin yıldızsız harfler arasında bulunup bulunmamasına göre iki durum altında ispatlayacağız. Şimdi

$$w = a_0\, a_1 a_1^* \cdots a_{n-1} a_{n-1}^*\, a_n a_n^* \in \mathrm{SRGF}_{n,k}$$

olsun ve w' dizisi, w dizisinden son çift (a_n, a_n^*) çıkarılarak elde edilen alt dizi olsun. $|a_n|$ mutlak değerinin yeni olup olmamasına, yani $|a_1|,|a_2|,\ldots,|a_{n-1}|$ mutlak değerleri arasında bulunup bulunmamasına göre durumları inceleyelim.

Durum 1: $|a_n| = k$ **değeri yenidir.** Bu durumda $w' \in \mathrm{SRGF}_{n-1,k-1}^{(B)}$ ve $n \in L_B(w)$ olur. w' deki tüm $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ terimlerinin mutlak değerlerinin referans değerleri en fazla

$k-1$ olduğundan, bu değerler B tipi seviye sırasında hem $\overline{k}$ hem de k harfinden önce gelir. Dolayısıyla,

$$lb_n^B(w) = 0 \qquad \text{ve} \qquad ls_n^B(w) = |L_B(w')|$$

olur. Buradan

$$\mathrm{levLB}_B(w) = \mathrm{levLB}_B(w') \qquad \text{ve} \qquad \mathrm{levLS}_B(w) = \mathrm{levLS}_B(w') + k\,|L_B(w')|$$

elde edilir. Eğer 0 harfi w' dizisinin $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ terimleri arasında bulunmuyorsa, w' dizisinin referans kümesi $1, 2, \ldots, k-1$ mutlak değerlerinin ilk görüldüğü yerlerden oluşur. Bu durumda $|L_B(w')| = k-1$ olur ve bu da $p^{k(k-1)}$ çarpanını verir. Eğer 0 harfi w' dizisinin $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ terimleri arasında bulunuyorsa, bu durumda $|L_B(w')| = k$ olur ve bu da p^{k^2} çarpanını verir.

$|a_n| = k$ değeri yeni olduğundan, a_n harfi mutlak değer k nin ilk görüldüğü yerdir. Dolayısıyla, $P(w) = P$ koşulu a_n harfinin işaretini belirler: eğer $k \in P$ ise $a_n = +k$, eğer $k \notin P$ ise $a_n = \overline{k}$ olur. Ayrıca, mutlak değer k değeri w' dizisinde bulunmadığından

$$P(w') = P \cap [k-1]$$

elde edilir. Bu durum, indirgeme bağıntılarındaki ilk terimleri verir.

Durum 2: Maksimum değer k, w' dizisinde zaten bulunmaktadır. Bu durumda $w' \in \mathrm{SRGF}_{n-1,k}^{(B)}$ olur. w ile w' dizilerinin referans kümeleri değişmediğinden $L_B(w) = L_B(w')$ elde edilir. Ayrıca w ve w' dizilerinin pozitif-ilk kümeleri de korunur, yani

$$P(w) = P(w') = P$$

dir. $w' \in \mathrm{SRGF}_{n-1,k}^{(B)}$ olduğundan, $1, \ldots, k$ mutlak değerlerinin her biri w' dizisinde bulunur. Dolayısıyla, $L_B(w')$ kümesi bu değerlerin her birinin tam olarak ilk görüldüğü yerlere ait indisleri içerir. Yani, $L_B(w') = \{1, \ldots, k\}$ dir. Şimdi, $j \in [k]$ sabit olsun ve $|a_n| = j$ olacak şekilde a_n seçilsin. j den büyük olan tam olarak $k-j$ referans mutlak değer bulunduğundan

$$lb_n^B(w) = k - j$$

elde edilir. Dolayısıyla, böyle her seçim, a_n harfinin işaretinden bağımsız olarak $q^{(k-j)j}$ çarpanını verir. Şimdi $ls_n^B(w)$ değerini belirleyelim. Eğer $j \in P$ ise, $P(w) = P(w') = P$

olduğu için ve negatifin pozitiften önce gelme kuralı gereğince w' dizisi $j\overline{j}$ ikilisini içerir ($\overline{j}j$ ikilisini içermez) ve bu durumda a_n için tek mümkün seçim $a_n = +j$ olur. Eğer $j \notin P$ ise, mutlak değer j nin ilk görülüşü $\overline{j}$ harfi ile gerçekleşir ve bu durumda $a_n = \overline{j}$ ile $a_n = +j$ seçimlerinin her ikisine de izin verilir.

İlk olarak 0 harfinin w' dizisinin $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ terimleri arasında bulunmadığını varsayalım. Bu durumda referans kümesi $1, \ldots, k$ değerlerin her birinin ilk görüldüğü yerlere ait indisleri içerir. Yani, $L_B(w') = \{1, \ldots, k\}$ dir. $a_n = \overline{j}$ seçildiğinde $ls_n^B(w) = j-1$ olur. Eğer $a_n = +j$ ise, daha küçük referans değerlerin sayısı $j \in P$ olup olmamasına bağlıdır ve

$$ls_n^B(w) = \begin{cases} j-1, & \text{eğer } j \in P, \\ j, & \text{eğer } j \notin P \end{cases}$$

elde edilir. Sabit bir j için toplam katkı

$$q^{(k-j)j}\left(p^{j(j-1)} + \mathbf{1}_{(j\notin P)}\, p^{j^2}\right)$$

şeklindedir. $j = 1, \ldots, k$ üzerinden toplama yapıldığında $A_k(p, q; P)$ çarpanı elde edilir.

Şimdi 0 harfinin w' dizisinde bulunduğunu varsayalım. Bu durumda 0 ek bir referans değer verdiğinden, yukarıda elde edilen $ls_n^B(w)$ değerlerinin her biri 1 artar. Dolayısıyla, a_n harfinin j veya $\overline{j}$ olarak seçilmesi

$$q^{(k-j)j}\left(p^{j^2} + \mathbf{1}_{(j\notin P)}\, p^{j(j+1)}\right)$$

katkısını verir. Ayrıca, $a_n = 0$ ek seçimi ağırlığa 1 katkısında bulunur. Böylece j, $j = 0, \cdots, k$ üzerinden toplam alındığında $B_k(p, q; P)$ çarpanı elde edilir.

Son olarak, eğer $w' \in \mathrm{SRGF}_{n-1,k}^{(B,0)}$ ise, $a_n = 0$ seçimi istatistikleri değiştirmeden $\mathrm{SRGF}_{n,k}^{(B,1)}$ kümesinin bir elemanını verir ($w = w'00 \in \mathrm{SRGF}_{n,k}^{(B,1)}$). Bu da geçiş terimi olarak

$$S_{p,q}^{(B,0)}(n-1, k; P)$$

ifadesini verir. O halde, bu durumların hepsi birleştirildiğinde ispat tamamlanır. □

Teorem 2.2 de verilen indirgeme bağıntılarını aşağıdaki örneklerle açıklayalım. Önce basit bir durumda sonucu doğrulayacağız. Daha sonra $\varepsilon = 1$ ve $\varepsilon = 0$ durumlarını ayrı ayrı ele alacağız.

Örnek 2.20. $n = 3$ ve $k = 2$ olsun. $P(w) = \{2\}$ koşulunu sağlayan $\mathrm{SRGF}_{3,2}^{(B,1)}$ elemanları için (2.11) eşitliğini doğrulayalım.

Adım 1: Sol tarafı hesaplayalım. Tablo 2.3 den, $P(w) = \{2\}$ koşulunu sağlayan $\mathrm{SRGF}_{3,2}^{(B,1)}$ elemanları

$$(0, \overline{1}, 2), \quad (\overline{1}, 0, 2), \quad (\overline{1}, 2, 0)$$

şeklindedir. Bu elemanlar için $\mathrm{levLS}_B(w)$ değerleri sırasıyla $5, 4, 2$ dir. Dolayısıyla,

$$S_{p,q}^{(B,1)}(3, 2; \{2\}) = p^5 + p^4 + p^2$$

elde edilir.

Adım 2: Sağ tarafı hesaplayalım. (2.11) eşitliği kullanılarak

$$S_{p,q}^{(B,1)}(3, 2; \{2\}) = p^4 S_{p,q}^{(B,1)}(2, 1; \varnothing) + S_{p,q}^{(B,0)}(2, 2; \{2\})$$

elde edilir, çünkü

$$S_{p,q}^{(B,1)}(2, 2; \{2\}) = 0$$

dır. Ayrıca,

$$S_{p,q}^{(B,1)}(2, 1; \varnothing) = p + 1 \qquad \text{ve} \qquad S_{p,q}^{(B,0)}(2, 2; \{2\}) = p^2$$

bulunur. Dolayısıyla, sağ taraf

$$p^4(p + 1) + p^2 = p^5 + p^4 + p^2$$

olur. Bu da sol taraf ile uyumludur.

Örnek 2.21. $n = 4$ ve $k = 3$ olsun. $P(w) = \{3\}$ koşulunu sağlayan $w \in \mathrm{SRGF}_{4,3}^{(B,1)}$ dizilerini ele alalım.

Sol taraf. $\varepsilon = 1$ olduğundan, ana harfler arasında 0 bulunur. Ayrıca $k = 3$ olduğu için, işaretli kısıtlı büyüme koşulu $1, 2, 3$ mutlak değerlerinin yıldızsız harfler arasında bulunmasını zorunlu kılar. Bunun yanında, $P(w) = \{3\}$ olması, mutlak değer 3 ün ilk görülüşünün $+3$ olduğunu gösterir. Bu nedenle, $\overline{3}$ harfi yıldızsız (ana) harf olarak bulunmaz. $j = 1, 2$ için $j \notin P(w)$ olduğundan, $|1|$ ve $|2|$ mutlak değerlerinin ilk görülüşleri sırasıyla $\overline{1}$ ve $\overline{2}$ olur. Dolayısıyla, w dizisindeki yıldızsız harfler

$$\{\overline{1}, \overline{2}, 0, 3\}$$

kümesinin elemanlarının (1.8) deki işaretli kısıtlı büyüme koşuluna göre bir düzenlenmesi olmak zorundadır. İşaretli kısıtlı büyüme koşulu, $\overline{1}$ harfinin $\overline{2}$ den önce, $\overline{2}$ harfinin ise 3 ten önce gelmesini gerektirir. Dolayısıyla, izin verilen yıldızsız harf dizileri tam olarak

$$(0,\overline{1},\overline{2},3), \qquad (\overline{1},0,\overline{2},3), \qquad (\overline{1},\overline{2},0,3), \qquad (\overline{1},\overline{2},3,0)$$

şeklindedir. Her durumda soldan ilk mutlak değerler kümesi $L_B(w) = \{1,2,3,4\}$ olur, yani ilk görülüşler sırasıyla $1,2,3$ ve 4 konumlarda ortaya çıkar. Burada görünen değerlerle sınırlandırılmış seviye sırası

$$0 <_{\text{lev}} \overline{1} <_{\text{lev}} \overline{2} <_{\text{lev}} 3$$

olduğundan, yukarıdaki dört dizinin her biri için $\mathrm{levLB}_B(w) = 0$ olduğu görülür. Buna karşılık, $\mathrm{levLS}_B(w)$ değerleri sırasıyla $14, 13, 11, 8$ olarak elde edilir. Dolayısıyla,

$$S_{p,q}^{(B,1)}(4,3;\{3\}) = p^{14} + p^{13} + p^{11} + p^{8}$$

elde edilir.

Sağ taraf. (2.11) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} S_{p,q}^{(B,1)}(4,3;\{3\}) = {} & p^{3^2} S_{p,q}^{(B,1)}(3,2;\{3\}\cap[2]) \\ & + B_3(p,q;\{3\}) S_{p,q}^{(B,1)}(3,3;\{3\}) \\ & + S_{p,q}^{(B,0)}(3,3;\{3\}) \end{aligned}$$

elde edilir. $\{3\}\cap[2] = \varnothing$ olduğundan, önce $S_{p,q}^{(B,1)}(3,2;\varnothing)$ polinomunu hesaplayalım. Burada $\varepsilon = 1$ olması 0 harfinin bulunmasını, $k-1 = 2$ olması ise 1 ve 2 mutlak değerlerinin bulunmasını zorunlu kılar. $P = \varnothing$ olduğundan, ilk görülüşler $\overline{1}$ ve $\overline{2}$ harfleridir. Dolayısıyla, izin verilen yıldızsız harf dizileri

$$(0,\overline{1},\overline{2}), \qquad (\overline{1},0,\overline{2}), \qquad (\overline{1},\overline{2},0)$$

şeklindedir ve bunların ağırlıkları sırasıyla p^5, p^4 ve p^2 dir. Dolayısıyla,

$$S_{p,q}^{(B,1)}(3,2;\varnothing) = p^5 + p^4 + p^2, \qquad p^9 S_{p,q}^{(B,1)}(3,2;\varnothing) = p^{14} + p^{13} + p^{11}$$

elde edilir. Ayrıca, $S_{p,q}^{(B,1)}(3,3;\{3\}) = 0$ olur, çünkü yıldızsız harfleri arasında 0 bulunan ve aynı zamanda $1,2,3$ mutlak değerlerinin tümünü içeren herhangi bir dizi yoktur.

Son olarak, $S_{p,q}^{(B,0)}(3,3;\{3\})$ polinomunu hesaplayalım. 0 harfi bulunmadığından ve $k=3$ olduğundan, $1,2,3$ mutlak değerlerinin tümü yıldızsız harfler arasında bulunmalıdır. Ayrıca, $P=\{3\}$ koşulu, 3 mutlak değerinin ilk görülüşünün $+3$ olmasını gerektirir. İzin verilen tek ana harf dizisi

$$(\overline{1},\overline{2},3)$$

olup bu dizinin ağırlığı p^8 dir. Dolayısıyla,

$$S_{p,q}^{(B,0)}(3,3;\{3\})=p^8$$

elde edilir. Üç durum birleştirildiğinde

$$\mathrm{RHS}=(p^{14}+p^{13}+p^{11})+0+p^8=p^{14}+p^{13}+p^{11}+p^8$$

elde edilir. Bu da sol taraf ile uyumludur.

Örnek 2.22. $n=4$ ve $k=3$ olsun.

$$w\in \mathrm{SRGF}_{4,3}^{(B,0)} \quad \text{ve} \quad P(w)=\{3\}$$

koşullarını sağlayan dizileri ele alalım. $\varepsilon=0$ olduğundan, w dizisinin yıldızsız harfleri arasında 0 bulunmaz. Ayrıca $k=3$ olduğu için, işaretli kısıtlı büyüme koşulu $1,2,3$ mutlak değerlerinin yıldızsız harfler arasında bulunmasını gerektirir. $P(w)=\{3\}$ koşulu, mutlak değer 3 ün ilk görülüşünün 3 olduğunu gösterir. Bu nedenle, $\overline{3}$ harfi w dizisinde yıldızsız ana harf olarak bulunmaz. $j=1,2$ için $j\notin P(w)$ olduğundan, 1 ve 2 mutlak değerlerinin ilk görülüşleri sırasıyla $\overline{1}$ ve $\overline{2}$ olur. Dolayısıyla, gerekli mutlak değerlerin ilk görülüşleri bu sırayla $\overline{1}$, $\overline{2}$ ve 3 şeklinde olmalıdır. O halde, bu koşulları sağlayan uzunluğu 4 olan uygun yıldızsız ana harf dizileri şunlardır:

$$(\overline{1},\overline{1},\overline{2},3),\ (\overline{1},1,\overline{2},3),\ (\overline{1},\overline{2},\overline{1},3),\ (\overline{1},\overline{2},1,3),$$
$$(\overline{1},\overline{2},\overline{2},3),\ (\overline{1},\overline{2},2,3),\ (\overline{1},\overline{2},3,\overline{1}),\ (\overline{1},\overline{2},3,1),$$
$$(\overline{1},\overline{2},3,\overline{2}),\ (\overline{1},\overline{2},3,2),\ (\overline{1},\overline{2},3,3).$$

Bu diziler için $\mathrm{levLS}_B(w)$ ve $\mathrm{levLB}_B(w)$ değerleri Tablo 2.5 de verilmiştir.

Tablo 2.5. $n = 4$, $k = 3$ ve $P(w) = \{3\}$ koşulları altında, 0 harfinin bulunmadığı durumdaki diziler için $\mathrm{levLS}_B(w)$ ve $\mathrm{levLB}_B(w)$ değerleri.

w	$\mathrm{levLS}_B(w)$	$\mathrm{levLB}_B(w)$
$(\overline{1}, \overline{1}, \overline{2}, 3)$	8	0
$(\overline{1}, 1, \overline{2}, 3)$	9	0
$(\overline{1}, \overline{2}, \overline{1}, 3)$	8	1
$(\overline{1}, \overline{2}, 1, 3)$	9	1
$(\overline{1}, \overline{2}, \overline{2}, 3)$	10	0
$(\overline{1}, \overline{2}, 2, 3)$	12	0
$(\overline{1}, \overline{2}, 3, \overline{1})$	8	2
$(\overline{1}, \overline{2}, 3, 1)$	9	2
$(\overline{1}, \overline{2}, 3, \overline{2})$	10	2
$(\overline{1}, \overline{2}, 3, 2)$	12	2
$(\overline{1}, \overline{2}, 3, 3)$	14	0

Sol taraf. Tüm uygun diziler üzerinden $q^{\mathrm{levLB}_B(w)} p^{\mathrm{levLS}_B(w)}$ ağırlıkları toplandığında

$$S_{p,q}^{(B,0)}(4, 3; \{3\}) = p^8 + p^9 + p^{10} + p^{12} + p^{14} + q\,(p^8 + p^9) + q^2\,(p^8 + p^9 + p^{10} + p^{12})$$

elde edilir.

Sağ taraf. 0 harfinin bulunmadığı durum için (2.10) indirgeme bağıntısı

$$S_{p,q}^{(B,0)}(4, 3; \{3\}) = p^{3(3-1)}\, S_{p,q}^{(B,0)}(3, 2; \varnothing) + A_3(p, q; \{3\})\, S_{p,q}^{(B,0)}(3, 3; \{3\})$$

eşitliği ile verir. Burada

$$S_{p,q}^{(B,0)}(3, 2; \varnothing) = p^2 + p^3 + p^2 q + p^3 q + p^4 + p^6,$$

$$A_3(p, q; \{3\}) = p^6 + q^2(1 + p + p^2 + p^4) \qquad \text{ve} \qquad S_{p,q}^{(B,0)}(3, 3; \{3\}) = p^8$$

olarak hesaplanır. Bu değerler yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \mathrm{RHS} &= p^6\big(p^2 + p^3 + p^2 q + p^3 q + p^4 + p^6\big) + \big(p^6 + q^2(1 + p + p^2 + p^4)\big)p^8 \\ &= p^8 + p^9 + p^{10} + p^{12} + p^{14} + q\,(p^8 + p^9) + q^2\,(p^8 + p^9 + p^{10} + p^{12}) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (2.10) eşitliğinin sol tarafı olan $S_{p,q}^{(B,0)}(4, 3; \{3\})$ polinomuna eşittir.

2.2.2. B Tipi (p,q)-Stirling Polinomları İçin Üreteç Fonksiyonları

Teorem 2.2 de verilen indirgeme bağıntıları yardımıyla $S_{p,q}^{(B,\varepsilon)}(n,k;P)$ polinomları için *üreteç fonksiyonlarını* elde edeceğiz. Üreteç fonksiyonlarının inşaası için yıldızsız ana harfler arasında 0 harfinin bulunup bulunmamasına göre iki durum ele alınacaktır.

0 harfinin bulunmadığı durum:

Ana harfler arasında 0 harfinin bulunmadığı $\varepsilon = 0$ durumunu ele alalım. Burada $S_{p,q}^{(B,0)}(n,k;P)$ polinomu, uzunluğu n olan, maksimum mutlak değeri k olan, pozitif-ilk kümesi P olan ve ana harfleri arasında 0 bulunmayan işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonlarını ağırlıklı olarak saymaktadır.

İşaretli kısıtlı büyüme koşulu, $1,2,\ldots,k$ mutlak değerlerinin her birinin en az bir kez ortaya çıkmasını gerektirdiği için bu tür diziler ancak $n \geq k$ olduğunda mevcuttur. Sabit k ve $P \subseteq [k]$ için adi üreteç fonksiyonunu

$$F_0(k,P;x) := \sum_{n\geq k} S_{p,q}^{(B,0)}(n,k;P)\, x^n$$

şeklinde tanımlayalım.

(2.10) eşitliği x^n ile çarpılıp tüm $n \geq k$ değerleri üzerinden toplam alındığında

$$\big(1 - A_k(p,q;P)\, x\big)\, F_0(k,P;x) = p^{k(k-1)}\, x\, F_0\big(k-1, P\cap[k-1]; x\big)$$

elde edilir. Başlangıç koşulu $F_0(0,\varnothing;x) = 1$ ve $\sum_{i=1}^{k} i(i-1) = \frac{k(k+1)(k-1)}{3}$ eşitliği gözönünde tutulup, bu bağıntı ardışık olarak uygulandığında 0 harfinin bulunmadığı durumdaki adi üreteç fonksiyonu $F_0(k,P;x)$ için kapalı bir çarpım formülü

$$F_0(k,P;x) = \frac{x^k\, p^{\sum_{i=1}^{k} i(i-1)}}{\prod_{i=1}^{k}\big(1 - A_i(p,q;P\cap[i])\, x\big)} = \frac{x^k\, p^{\frac{k(k+1)(k-1)}{3}}}{\prod_{i=1}^{k}\big(1 - A_i(p,q;P\cap[i])\, x\big)} \tag{2.12}$$

olarak elde edilir.

0 harfinin bulunduğu durum:

Şimdi, yıldızsız ana harfleri arasında 0 harfinin bulunduğu işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonlarına karşılık gelen $\varepsilon = 1$ durumunu ele alalım. Bu durumda kısıtlı büyüme koşulu; maksimum mutlak değeri k olan herhangi bir dizinin, 0 harfinin en az bir

görülüşünü ve bunun yanında $1, \ldots, k$ mutlak değerlerinin tümünü içermesini gerektirir. Dolayısıyla, bu tür diziler ancak $n \geq k+1$ olduğunda var olabilir. Sabit bir $k \geq 1$ ve $P \subseteq [k]$ için adi üreteç fonksiyonunu

$$F_1(k, P; x) := \sum_{n \geq k+1} S_{p,q}^{(B,1)}(n, k; P)\, x^n$$

şeklinde tanımlayalım. Her bir $i,\ 0 \leq i \leq k$ için

$$P_i := P \cap [i]$$

olsu. Ayrıca,

$$F_1(0, \varnothing; x) = 0$$

olarak kabul edelim. Teorem 2.2 deki $\varepsilon = 1$ durumuna karşılık gelen (2.11) eşitliğinin her iki tarafı x^n ile çarpılıp tüm $n \geq k+1$ değerleri üzerinden toplam alındığında

$$\big(1 - B_k(p, q; P)\, x\big)\, F_1(k, P; x) = p^{k^2}\, x\, F_1\big(k-1, P_{k-1}; x\big) + x\, F_0(k, P; x)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$F_1(k, P; x) = \alpha_k(P)\, F_1\big(k-1, P_{k-1}; x\big) + \beta_k(P) \tag{2.13}$$

olup burada

$$\alpha_k(P) := \frac{p^{k^2} x}{1 - B_k(p, q; P)\, x}, \qquad \text{ve} \qquad \beta_k(P) := \frac{x\, F_0(k, P; x)}{1 - B_k(p, q; P)\, x}$$

şeklinde tanımlanır. 0 harfinin bulunduğu durumda $k \geq 1$ kısıtı altında,

$$F_1(0, \varnothing; x) = 0$$

başlangıç koşulu kullanılarak (2.13) eşitliği ardışık olarak uygulanır. (2.13) eşitliği k değerinden 1 değerine doğru ardışık olarak uygulandığında, F_0 cinsinden aşağıdaki ifade elde edilir:

$$F_1(k, P; x) = \sum_{t=1}^{k} \left(\prod_{i=t+1}^{k} \alpha_i(P_i) \right) \beta_t(P_t) \tag{2.14}$$

burada boş çarpım 1 olarak kabul edilir. Dolayısıyla, $t = k$ için $\beta_k(P)$ elde edilir. Son olarak, $F_0(t, P_t; x)$ için elde edilen açık çarpım formunu (2.14) eşitliğinde yerine yazarak, $F_1(k, P; x)$ için istenen ifadeyi elde ederiz.

Örnek 2.23. 0 harfinin bulunmadığı durumda $k = 2$ durumunu ele alalım. Tanımdan,

$$F_0(2;x) = \sum_{n\geq 2} S_{p,q}^{(B,0)}(n,2)\, x^n$$

yazarız. Ayrıca,

$$S_{p,q}^{(B,0)}(n,2) = \sum_{P\subseteq[2]} S_{p,q}^{(B,0)}(n,2;P)$$

olduğundan,

$$F_0(2;x) = \sum_{P\subseteq[2]} F_0(2,P;x)$$

sonucunu elde ederiz. (2.12) eşitliğinden

$$F_0(2,P;x) = \frac{x^2\,p^2}{\big(1-A_1(p,q;P\cap[1])\,x\big)\big(1-A_2(p,q;P)\,x\big)}$$

elde ederiz. (2.8) eşitliğini kullanarak

$$A_1(p,q;P\cap[1]) = \begin{cases} 1+p, & 1\notin P \\ 1, & 1\in P \end{cases}$$

elde ederiz. Ayrıca,

$$A_2(p,q;P) = \begin{cases} q(1+p)+p^2+p^4, & P=\varnothing \\ q+p^2+p^4, & P=\{1\} \\ q(1+p)+p^2, & P=\{2\} \\ q+p^2, & P=\{1,2\} \end{cases}$$

sonucuna ulaşırız. Bu değerleri yerine yazıp tüm $P\subseteq[2]$ alt kümeleri üzerinden toplam aldığımızda

$$\begin{aligned} F_0(2;x) = x^2p^2\Bigg(& \frac{1}{(1-(1+p)x)(1-(q(1+p)+p^2+p^4)x)} \\ & + \frac{1}{(1-(1+p)x)(1-(q(1+p)+p^2)x)} \\ & + \frac{1}{(1-x)(1-(q+p^2+p^4)x)} + \frac{1}{(1-x)(1-(q+p^2)x)}\Bigg) \end{aligned}$$

elde ederiz.

Formülü doğrulamak için

$$F_0(2;x) = x^2p^2\Big(T_1(x) + T_2(x) + T_3(x) + T_4(x)\Big)$$

şeklinde yazalım. Burada

$$\begin{aligned}
T_1(x) &= \frac{1}{(1-(1+p)x)\big(1-(q(1+p)+p^2+p^4)x\big)} \\
T_2(x) &= \frac{1}{(1-x)\big(1-(q+p^2+p^4)x\big)} \\
T_3(x) &= \frac{1}{(1-(1+p)x)\big(1-(q(1+p)+p^2)x\big)} \\
T_4(x) &= \frac{1}{(1-x)\big(1-(q+p^2)x\big)}
\end{aligned}$$

diyelim. $F_0(2;x)$ ifadesi x^2 çarpanına sahip olduğundan, $F_0(2;x)$ içindeki x^3 teriminin katsayısını, $T_1(x) + T_2(x) + T_3(x) + T_4(x)$ ifadesindeki x teriminin katsayısını hesaplayarak elde ederiz. Bunun için temel açılım olarak

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)} = 1 + (a+b)x + O(x^2)$$

eşitliğini kullanırız. Dolayısıyla, $\frac{1}{(1-ax)(1-bx)}$ ifadesinin açılımındaki x teriminin katsayısı $a+b$ olur. Bunu her bir $T_i(x)$ ifadesine uygulayarak

$$\begin{aligned}
[x]\,T_1(x) &= (1+p) + \big(q(1+p)+p^2+p^4\big) \\
[x]\,T_2(x) &= 1 + \big(q+p^2+p^4\big) \\
[x]\,T_3(x) &= (1+p) + \big(q(1+p)+p^2\big) \\
[x]\,T_4(x) &= 1 + \big(q+p^2\big)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

$$[x]\,(T_1+T_2+T_3+T_4) = (4+2p+4p^2+2p^4) + q(4+2p)$$

olur.

$$F_0(2;x) = x^2p^2\big(T_1(x) + T_2(x) + T_3(x) + T_4(x)\big)$$

olduğundan, $F_0(2;x)$ içindeki x^3 teriminin katsayısı

$$[x^3]\,F_0(2;x) = p^2\,[x]\,(T_1+T_2+T_3+T_4) = 4p^2+2p^3+4p^4+2p^6+q\,(4p^2+2p^3)$$

olarak elde edilir.

Son olarak,

$$F_0(2;x) = \sum_{n\geq 2} S_{p,q}^{(B,0)}(n,2)\, x^n$$

olduğunu hatırlayarak,

$$[x^3]\, F_0(2;x) = S_{p,q}^{(B,0)}(3,2)$$

sonucuna varırız. Bu değer, Örnek 2.17 de daha önce elde edilen değer ile uyumludur.

2.3. B Tipi Laguerre Tahtası ve B Tipi Lah Sayıları

Önceki kesimde, B tipi Ferrers tahtalarını tanıttık ve bu tahtalar üzerindeki kale yerleşimlerinin B tipi (p,q)-Stirling sayıları için bir model oluşturduğunu gösterdik. Klasik işaretsiz durumda, Ferrers tahtaları küme parçalanmalarına, Laguerre tahtaları ise sıralı küme parçalanmalarına karşılık gelir ve dolayısıyla Lah sayıları ile ilişkilendirilirler.

Şimdi B *tipi Laguerre tahtasını* tanımlayacağız. Bu tahta, alışılmış B tipi simetriye sahip dikdörtgen biçimli işaretli bir tahtadır, ancak yerleşim kuralları Ferrers tahtasının yerleşim kurallarından farklıdır. Daha açık olarak, Lah tipi nesnelerin sıralı yapısını yansıtmak için belirli satırlar ve işaretli sütun indisleri tercih edilir. Böylece B tipi sabitlenmiş kale yerleşimleri elde edilir.

Bu yerleşimlerin sayısının, [15] çalışmasında tanıtılan B tipi Lah sayıları yardımıyla hesaplandığını gösteriyoruz. Böylece, B tipi Stirling sayılarına benzer şekilde, B tipi Lah sayıları da kale-kuramsal bir yoruma sahip olur.

2.3.1. B Tipi Laguerre Tahtası ve Kale Yerleşimleri

Tanım 2.12. $n \geq 1$ tamsayısı için boyutu n olan B *tipi Laguerre tahtasını* $\mathcal{L}_n^{(B)}$ ile gösterilen bir tahta olarak tanımlayalım. Bu tahta, satır kümesi

$$[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$$

ve sütun kümesi

$$\{\overline{1}, 1, \overline{2}, 2, \ldots, \overline{n}, n\}$$

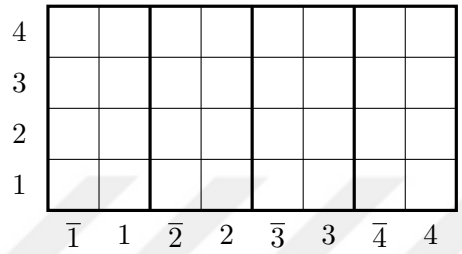
olan dikdörtgen biçimli işaretli bir tahtadır. Burada sütunlar, her $j \in [n]$ için $\{j, \overline{j}\}$ karşıt çiftleri halinde düzenlenmiştir.

Eşdeğer olarak, $\mathcal{L}_n^{(B)}$ tahtasının hücre kümesi

$$\mathcal{L}_n^{(B)} = \{(r, j) : r \in [n],\ j \in \langle n \rangle'\}$$

şeklindedir.

Şekil 2.5, B tipi Laguerre tahtası $\mathcal{L}_4^{(B)}$ ü göstermektedir.



Şekil 2.5. B tipi Laguerre tahtası $\mathcal{L}_4^{(B)}$.

Şimdi B tipi Laguerre tahtası üzerinde kale yerleşimlerini tanımlayalım.

Tanım 2.13. $\mathcal{L}_n^{(B)}$ üzerinde bir B tipi kale yerleşimi, aşağıdaki koşulları sağlayan ve $\mathcal{L}_n^{(B)}$ tahtasının hücrelerinden oluşan bir P kümesidir:

1. Aynı satırda iki kale bulunmaz.

2. Her $j \in [n]$ için, zıt işaretli sütun çifti $\{\overline{j}, j\}$ içinde en fazla bir kale bulunur.

Eşdeğer olarak, bir B tipi kale yerleşimi; her kalenin farklı bir satırı ve farklı bir mutlak sütun indisini işgal ettiği, birbirini tehdit etmeyen bir yerleşimdir. Seçilen her mutlak sütun indisi $j \in [n]$ için, kale $\overline{j}$ veya j sütunlarından birine yerleştirilebilir.

Örnek 2.24. $n = 4$ olsun ve B tipi Laguerre tahtası $\mathcal{L}_4^{(B)}$ ü ele alalım.

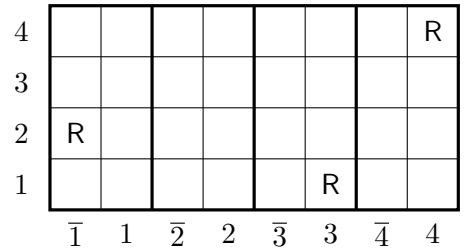
$$P = \{(1, 3), (2, \overline{1}), (4, 4)\}$$

kümesi, $\mathcal{L}_4^{(B)}$ üzerinde bir B tipi kale yerleşimidir. Gerçekten de, kaleler farklı satırlarda bulunur ve farklı mutlak sütun indislerini, yani 1, 3 ve 4 indislerini kullanır.

Öte yandan,

$$P' = \{(1, 3), (3, \overline{3})\}$$

kümesi bir B tipi kale yerleşimi değildir. Çünkü her iki kale de aynı karşıt sütun çifti $\{\overline{3}, 3\}$ içinde yer alır.



Şekil 2.6. $\mathcal{L}_4^{(B)}$ üzerinde bir B tipi kale yerleşimi: $P = \{(1,3), (2,\overline{1}), (4,4)\}$.

2.3.2. Sabitlenmiş B Tipi Laguerre Kale Yerleşimleri

B tipi Laguerre tahtası üzerindeki kale yerleşimlerinin aşağıda tanımlayacağımız özel bir sınıfını, B tipi Lah sayıları ile ilişkilendireceğiz.

Tanım 2.14. $n \geq 1$ ve $0 \leq k \leq n$ tamsayıları verilsin. Burada k, kale içermeyen satırların sayısını göstersin. $\mathcal{L}_n^{(B)}$ tahtası B tipi bir Laguerre tahtası olsun. (n,k) tipinde bir *sabitlenmiş B tipi Laguerre kale yerleşimi*, $\mathcal{L}_n^{(B)}$ üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan bir B tipi kale yerleşimi P olarak tanımlanır:

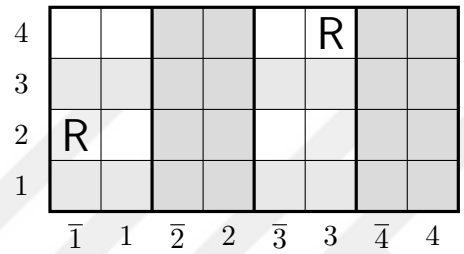
- **(Kesilmiş satırlar)** Tam olarak k satırda kale bulunmaz.
- **(Lider sütunlar)** Ne j_i ne de $\overline{j_i}$ sütununda kale bulunmayacak şekilde, birbirinden farklı k tane mutlak sütun indisi $\{j_1, \ldots, j_k\}$ vardır.

Kesilmemiş her satır tam olarak bir kale içerir. Eşdeğer olarak, sabitlenmiş bir yerleşim tam olarak $n-k$ kaleden oluşur, bu kalelerin her biri farklı bir kesilmemiş satırda ve liderler arasında bulunmayan farklı bir mutlak sütun indisinde yer alır. Ayrıca, her kale için ilgili mutlak sütun indisi j seçildiğinde, kalenin j veya $\overline{j}$ sütunlarından hangisine yerleştirileceği bağımsız olarak seçilir.

Not 2.5. *Boş satırların, yani kesilmiş satırların, blokların başlangıçlarını tanımlamak için kullanılması Lah sayıları için kale modellerinde standarttır. Sabitlenmiş terimi ise yerleşimin önceden seçilmiş kesilmiş satırlar ve lider sütun indisleri tarafından belirlendiğini ifade eder.*

Örnek 2.25. $n = 4$ ve $k = 2$ olsun. Kesilmiş satırlar $\{1, 3\}$ ve lider sütunlar $\{2, 4\}$ olarak seçilsin. Bu durumda kalan kesilmemiş satırlar $\{2, 4\}$ olur ve kullanılabilir mutlak sütun indisleri $\{1, 3\}$ şeklindedir.

Kaleleri $(2, \overline{1})$ ve $(4, 3)$ hücrelerine yerleştirdiğimizde, Şekil 2.7 de gösterildiği gibi, $(4, 2)$ tipinde sabitlenmiş bir B tipi Laguerre kale yerleşimi elde edilir. Bu durumda lider sütunlar $\{2, 4\}$, mutlak sütun indisleri 2 ve 4 ü kullanılabilir indisler arasından çıkarır; kesilmiş satırlar $\{1, 3\}$ ise boş kalır.



Şekil 2.7. $n = 4$ ve $k = 2$ için sabitlenmiş bir B tipi Laguerre kale yerleşimi. Gölgeli satırlar kesilmiş satırları, gölgeli sütun çiftleri ise lider sütunları göstermektedir.

Şimdi, bir B tipi işaretli küme parçalanmasının sıralı blok yapısından sabitlenmiş bir B tipi Laguerre kale yerleşiminin nasıl elde edileceğini açıklayalım:

π, sıfır olmayan k tane blok çiftine sahip bir B tipi işaretli küme parçalanması olsun. Sıfır blokunu ve sıfır olmayan her bir eşlenmiş blok çiftinden bir bloku, sıralarını koruyarak seçeriz. Seçilen her bloktaki elemanları mutlak değerleriyle değiştiririz. Sıfır blokundaki 0 elemanını çıkarıp bu bloktaki sıfırdan faklı her elemanın (eğer mevcutsa) mutlak değerini yalnızca bir kez yazarız. Bu şekilde elde edilen sıralı listeler

$$C_1, C_2, \ldots, C_k$$

olsun. Her bir C_i listesinin ilk elemanına bu listenin *lideri* denir. Bu ilk elemanlar, lider mutlak sütun indislerini belirler.

Daha sonra, listeleri aralarındaki ayraçları koruyarak birleştiririz. Elde edilen $C = C_1C_2 \ldots C_k$ dizisi, $[n]$ kümesinin her elemanını tam olarak bir kez içerir ve C dizisindeki konumlar $1, 2, \ldots, n$ ile numaralandırılır. $C = C_1C_2 \ldots C_k$ birleştirilmiş listenin her C_i alt listesindeki son elemanının C listesindeki bulunduğu konum, kesilmiş satır olarak

belirlenir. Dolayısıyla, tam olarak k tane kesilmiş satır elde edilir.

Kesilmemiş her r satırı için, aynı listede r konumunun hemen ardından gelen eleman j olsun. r satırına yerleştirilecek kalenin bulunacağı sütun, j veya $\overline{j}$ dir. Böylece j mutlak sütun indisi, $\{\overline{j}, j\}$ sütun çiftini, işaret seçimi ise bu iki sütundan hangisinin kullanılacağını belirler. $C_1, C_2, \ldots, C_k$ bloklarının başlangıç seçimleri arasında; $|j|$ nin ait olduğu karşıt blok çiftinden ilk blok varsa kaleyi $\overline{j}$ sütununa, ikinci blok varsa kaleyi j sütununa yerleştiririz.

Aşağıdaki örnekte, her kale için negatif işaretli sütun seçilir. Bu yöntem, bir B tipi işaretli küme parçalanmasının sıralı blok yapısının, sabitlenmiş bir B tipi Laguerre kale yerleşimi ile nasıl temsil edilebileceğini göstermektedir.

Örnek 2.26. $\pi = 0\,2\,\overline{2} \mid \overline{1}\,7 \;/\; 1\,\overline{7} \mid \overline{3}\,\overline{6} \;/\; 3\,6 \mid \overline{4}\,5 \;/\; 4\,\overline{5}$ bir işaretli küme parçalanması olsun. π içinde görünen mutlak değerlerin kümesi $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ olduğundan, $n = 7$ olur.

Laguerre yapısında ortaya çıkan sıralı yapıyı elde etmek için, sıfır blogunu ve sıfır olmayan her karşıt blok çiftinden ilk blogu, sıralarını koruyarak seçeriz. Böylece aşağıdaki dört sıralı blok elde edilir:

$$(0, 2, \overline{2}),\ (\overline{1}, 7),\ (\overline{3}, \overline{6}),\ (\overline{4}, 5)$$

dolayısıyla $k = 4$ olur. Sıfır blogunda 0 elemanını çıkarıp her mutlak değeri yalnızca bir kez yazdığımızda, aşağıdaki sıralı listeler elde edilir:

$$(2), \qquad (1, 7), \qquad (3, 6), \qquad (4, 5).$$

Bu listeleri aralarındaki ayraçları koruyarak birleştirdiğimizde

$$C = 2 \mid 1, 7 \mid 3, 6 \mid 4, 5$$

dizisi elde edilir. Bu listelerin ilk elemanları sırasıyla $2, 1, 3$ ve 4 olduğundan, lider mutlak sütun indisleri

$$\{1, 2, 3, 4\}$$

olur.

C dizisindeki dört alt listenin son elemanları sırasıyla $1, 3, 5$ ve 7 konumlarında bulunduğundan, kesilmiş satırlar $\{1, 3, 5, 7\}$ olur. Bu durumda kalan satırlar $\{2, 4, 6\}$ olur ve bu satırların her birinde tam olarak bir kale bulunur. Örneğin, her bir kale için negatif işaretli sütunu seçtiğimizde

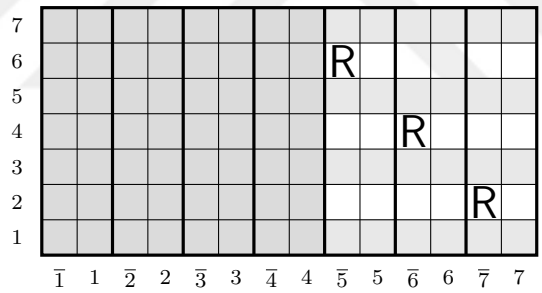
$$(2, \overline{7}),\ (4, \overline{6}),\ (6, \overline{5})$$

yerleşimi elde edilir. Kesilmemiş $2, 4$ ve 6 konumlarından sonra aynı listede gelen elemanlar sırasıyla $7, 6$ ve 5 olduğundan, kalelerin mutlak sütun indisleri sırasıyla $7, 6$ ve 5 olur.

Sıfır olmayan her karşıt blok çiftinden ilk blogu seçtiğimiz için, negatif işaretli sütunlar kullanılır. Böylece

$$(2, \overline{7}), \qquad (4, \overline{6}), \qquad (6, \overline{5})$$

yerleşimi elde edilir. Bu yerleşim, Şekil 2.8 te gösterildiği gibi, $(7, 4)$ tipinde sabitlenmiş bir B tipi Laguerre kale yerleşimidir.



Şekil 2.8. $(7, 4)$ tipinde sabitlenmiş bir B tipi Laguerre kale yerleşimi. Gölgeli satırlar kesilmiş satırları, gölgeli sütun çiftleri ise lider sütunları göstermektedir.

Not 2.6. *Kesilmiş satırlar ve lider sütunlar, B tipi durumdaki sıralı blok yapısını yansıtır. Bu şekilde, sabitlenmiş B tipi Laguerre kale yerleşimleri, B tipi Lah sayıları için bir kale modeli verir.*

2.3.3. B Tipi Laguerre Kale Sayıları ve Lah Sayıları

Şimdi, sabitlenmiş B tipi Laguerre kale yerleşimleriyle ilişkili kale sayılarını tanımlayacağız.

Tanım 2.15. $n \geq 1$ ve $0 \leq k \leq n$ olsun. $\mathcal{R}_{n-k}^{(B)}(\mathcal{L}_n^{(B)})$ kümesi, $\mathcal{L}_n^{(B)}$ üzerinde (n, k) tipindeki sabitlenmiş B tipi Laguerre kale yerleşimlerinin kümesini göstersin. B *tipi*

Laguerre kale sayısı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$r_{n-k}^{(B)}(\mathcal{L}_n^{(B)}) \;=\; \left|\mathcal{R}_{n-k}^{(B)}(\mathcal{L}_n^{(B)})\right|.$$

Şimdi, bu kale sayılarının [15] çalışmasında verilen B tipi Lah sayılarına eşit olduğunu göstereceğiz. Ayrıca bu sayılar, (1.13) de verilen klasik bağıntının B tipi bir analogunu da sağlar.

Teorem 2.3. *$n \geq 1$ ve $0 \leq k \leq n$ olsun. B tipi Laguerre kale sayısı*

$$r_{n-k}^{(B)}(\mathcal{L}_n^{(B)}) = L_B(n,k) = \binom{n}{k}^2 2^{n-k}(n-k)! \tag{2.15}$$

şeklindedir. Burada $L_B(n,k)$, B tipi Lah sayılarını göstermektedir.

İspat. (n,k) tipinde sabitlenmiş bir yerleşim aşağıdaki seçimlerle belirlenir. İlk olarak, k kesilmiş satır $\binom{n}{k}$ farklı şekilde seçilir. Bundan bağımsız olarak, k lider mutlak sütun indisi de $\binom{n}{k}$ farklı şekilde seçilir. Kalan $n-k$ satırın her biri bir kale içerir ve bu kaleler, kalan $n-k$ mutlak sütun indisine bire bir biçimde atanır. Bu seçim $(n-k)!$ farklı şekilde yapılır. Ayrıca, her kale için bağımsız bir işaret seçimi vardır, çünkü kale kendi mutlak indisine karşılık gelen iki işaretli sütundan biri olan j veya $\overline{j}$ sütununa yerleştirilebilir. Bu da 2^{n-k} çarpanını verir. Bu seçimleri birleştirdiğimizde

$$\binom{n}{k}^2 2^{n-k}(n-k)!$$

sonucunu elde ederiz. Böylece istenen eşitlik ispatlanmış olur. □

Sonuç olarak, 2.3.2 alt kesimi ve Teorem 2.3 birlikte değerlendirildiğinde; sabitlenmiş B tipi Laguerre kale yerleşimleri ile B tipi işaretli küme parçalanmalarının sıralı blok yapıları arasında birebir ve örten bir eşleşme olduğu görülür.

Örnek 2.27. $n = 4$ ve $k = 2$ için Teorem 2.3 ü doğrulayalım. Bunun için Örnek 2.25 de verilen sabitlenmiş B tipi Laguerre kale yerleşimlerini kullanalım.

İlk olarak, 2 kesilmiş satırı $\binom{4}{2} = 6$ farklı şekilde seçeriz. Bundan bağımsız olarak, 2 lider mutlak sütun indisini yine $\binom{4}{2} = 6$ farklı şekilde seçeriz. Kalan 2 satırın her biri bir kale içerir ve bu kaleler, kalan 2 mutlak sütun indisine bire bir biçimde atanır. Bu da

$2! = 2$ farklı olasılık verir. Ayrıca, her kale kendi mutlak indisine karşılık gelen iki işaretli sütundan birine yerleştirilebilir. Bu nedenle ek olarak $2^2 = 4$ çarpanı elde edilir.

Bu seçimleri birleştirdiğimizde, $(4, 2)$ tipindeki sabitlenmiş B tipi Laguerre kale yerleşimlerinin sayısı

$$\binom{4}{2}^2 2^2\, 2! \;=\; 288$$

olur. Bu değer, Teorem 2.3 de verilen $L_B(4, 2)$ değeriyle uyumludur.

[15] çalışmasındaki Lemma 3.3.1 in birinci kısmından, tüm $n \geq 0$ için

$$[x]_n^B = \sum_{k=0}^{n} L_B(n, k)\,(x)_k^B \tag{2.16}$$

eşitliğini elde ederiz. Teorem 2.3 ile (2.16) eşitliğini birlikte kullanarak, (1.11) eşitliğinin aşağıdaki B tipi benzerini elde ederiz.

Sonuç 2.1. *Tüm $n \geq 0$ için*

$$[x]_n^B = \sum_{k=0}^{n} r_{n-k}^{(B)}(\mathcal{L}_n^{(B)})\,(x)_k^B$$

eşitliği sağlanır.

Bu özdeşlik, B tipi yükselen faktöriyelin Laguerre kale sayıları cinsinden ifade edilebileceğini gösterir. Şimdi, B tipi Lah sayılarının tüm $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$L_B(n, k) = L_B(n-1, k-1) + 2(n+k)L_B(n-1, k)$$

indirgeme bağıntısını sağladığını hatırlayalım [15]. Başlangıç koşulları

$$L_B(n, 0) = 2^n n! \qquad \text{ve} \qquad L_B(n, n) = 1$$

şeklindedir ve $k < 0$ olduğunda $L_B(n, k) = 0$ kabul edilir (bkz. [15]). Teorem 2.3 kullanılarak, $r_{n-k}^{(B)}(\mathcal{L}_n^{(B)})$ için aşağıdaki indirgeme bağıntısı elde edilir:

$$r_{n-k}^{(B)}(\mathcal{L}_n^{(B)}) = r_{n-k}^{(B)}(\mathcal{L}_{n-1}^{(B)}) + 2(n+k)\, r_{n-k-1}^{(B)}(\mathcal{L}_{n-1}^{(B)}).$$

Ayrıca, [15] çalışmasında sabit bir negatif olmayan k tamsayısı için $L_B(n, k)$ sayılarının üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n \geq 0} L_B(n, k)\,\frac{x^n}{n!} = \frac{x^k}{(1-2x)^{k+1}k!}$$

formunda verildiğinden, B tipi Laguerre kale sayılarına ait üstel üreteç fonksiyonu da

$$\sum_{n\geq 0} r_{n-k}^{(B)}(\mathcal{L}_n^{(B)})\,\frac{x^n}{n!} = \frac{x^k}{(1-2x)^{k+1}k!}$$

şeklindedir.

3. BÖLÜM

D TİPİ BELL SAYILARI

3.1. D Tipi Bell Sayıları

Bu bölümde, ilk olarak D tipi Bell sayılarını tanıtacağız ve bu sayıların indirgeme bağıntısı ve üstel üreteç fonksiyonu gibi bazı kombinatoryal özelliklerini inceleyeceğiz. Daha sonra, bu sayıların n ye bağlı açık bir formülünü Dobiński anlamında vereceğiz. Son olarak, D tipi Bell sayıları ile düzleştirilmiş Stirling permütasyonları arasındaki ilişkiyi ele alacağız.

Tanım 3.1. $D(n)$ ile gösterilen D *tipi Bell sayıları*, $\langle n \rangle$ kümesinin D tipi küme parçalanmalarının sayısı olarak tanımlanır. Dolayısıyla,

$$D(n) = \sum_{k=0}^{n} S_D(n,k) = |\Pi_n^D|$$

yazarız.

Örnek 3.1. Tanım 3.1 i daha iyi açıklamak için $n = 2$ durumunu ele alalım. Tablo 3.1 den

$$S_D(2,0) = 1, \qquad S_D(2,1) = 2, \qquad S_D(2,2) = 1$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla,

$$D(2) = \sum_{k=0}^{2} S_D(2,k) = 1 + 2 + 1 = 4$$

olduğunu görürüz. Böylece, $\langle 2 \rangle$ kümesinin dört tane D tipi küme parçalanması olduğu sonucuna varırız.

D tipi Bell sayılarının ve D tipi Stirling sayılarının bazı değerleri Tablo 3.1 de verilmiştir. D tipi Bell sayıları çevrimiçi tamsayı dizileri ansiklopedisinde A039764 kodu ile yer almaktadır (https://oeis.org/A039764).

Tablo 3.1. $0 \leq k \leq n \leq 7$ için D tipi Bell sayıları $D(n)$ ve ikinci tür D tipi Stirling sayıları $S_D(n,k)$ değerleri.

n	$D(n)$	$S_D(n,0)$	$S_D(n,1)$	$S_D(n,2)$	$S_D(n,3)$	$S_D(n,4)$	$S_D(n,5)$	$S_D(n,6)$	$S_D(n,7)$
0	1	1							
1	1	0	1						
2	4	1	2	1					
3	15	1	7	6	1				
4	72	1	24	34	12	1			
5	403	1	81	190	110	20	1		
6	2546	1	268	1051	920	275	30	1	
7	17867	1	869	5747	7371	3255	581	42	1

Örnek 3.2. Şimdi $n = 2$ için D tipi küme parçalanmalarını elde edelim. $\langle 2 \rangle = \{\overline{2}, \overline{1}, 0, 1, 2\}$ kümesini ele alalım. $\langle 2 \rangle$ kümesinin D tipi bir k küme parçalanması; $\langle 2 \rangle$ kümesinin bir tane sıfır blogu P_0 ile k tane eşlenmiş $\{B, -B\}$ blok çiftlerine parçalanmasıyla elde edilir. Burada sıfır blogu ya en az iki pozitif eleman içerir ya da hiç pozitif eleman içermez. Şimdi D tipi bu küme parçalanmalarını, eşlenmiş blokların sayısını gösteren k değerine göre bulalım.

$k = 0$ durumunda tüm elemanlar sıfır blogunda yer alır. Bu nedenle tek bir parçalanma vardır:

$$0, \overline{1}, 1, \overline{2}, 2.$$

$k = 1$ için, $B \cap (-B) = \varnothing$ koşulunu sağlayan bir $B \subseteq \langle 2 \rangle$ alt kümesi seçilir ve B ile $-B$ blok çifti oluşturulur. Kalan elemanlar ise sıfır blogu P_0 ı oluşturur. Böylece, bu türden tam olarak iki tane parçalanma vardır:

$$0 \mid 1, 2 \,/\, \overline{1}, \overline{2} \quad \text{ve} \quad 0 \mid 1, \overline{2} \,/\, \overline{1}, 2.$$

$k = 2$ için sıfır blogu yalnızca 0 elemanını içerir ve kalan elemanlar iki tane eşlenmiş sıfır olmayan blok çiftine ayrılır. Bu durumda tek bir parçalanma vardır:

$$0 \mid 1/\overline{1} \mid 2/\overline{2}.$$

Dolayısıyla, $\langle 2 \rangle$ kümesinin D tipi küme parçalanmalarının toplam sayısı

$$1 + 2 + 1 = 4$$

olup buradan $D(2) = 4$ elde edilir.

3.1.1. $D(n)$ İçin Bir İndirgeme Bağıntısı

Şimdi D tipi Bell sayıları için bir indirgeme bağıntısı elde edeceğiz.

Teorem 3.1. *D tipi Bell sayıları aşağıdaki indirgeme bağıntısını sağlar: Her $n \geq 0$ tamsayısı için*

$$D(n+1) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \sum_{k=0}^{n-i} 2^{n-i-k} S(n-i,k) + \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} D(n-k) \qquad (3.1)$$

dır. Burada $S(n,k)$ ikinci türden klasik Stirling sayısını göstermektedir.

İspat. $\langle n+1 \rangle$ kümesinin s tane eşlenmiş sıfır olmayan blok çiftine sahip işaretli D tipi bir küme parçalanması $\gamma = P_0 \mid P_1/P_2 \mid P_3/P_4 \mid \cdots \mid P_{2s-1}/P_{2s}$ olsun. Bu parçalanmaları $n+1$ elemanının konumuna göre iki durum altında sayacağız.

Durum 1. $n+1$ elemanının eşlenmiş sıfır olmayan bir bloğa ait olduğunu varsayalım. Genelliği bozmaksızın, $n+1 \in P_1$ ve $0 \leq k \leq n$ olacak şekildeki bir k için $|P_1| = k+1$ olduğunu kabul edelim. P_1/P_2 blok çifti çıkarıldığında, geriye kalan

$$P_0 \mid P_3/P_4 \mid \cdots \mid P_{2s-1}/P_{2s}$$

blokları $2(n-k)$ elemandan oluşan $\langle n+1 \rangle \setminus (P_1 \uplus P_2)$ kümesinin bir D tipi küme parçalanmasını oluşturur. Dolayısıyla, bu tür parçalanmaların sayısı $D(n-k)$ olur. Daha açık olarak, $D(n-k)$ aslında P_1/P_2 eşlenmiş blok çifti sabit tutulduğunda, $\langle n+1 \rangle$ kümesinin karşılık gelen D tipi küme parçalanmalarının sayısını verir.

P_1 blogunu oluşturmak için, $[n]$ kümesinden k tane eleman seçer ve daha sonra bu elemanların her birine keyfi bir işaret atarız. Buna karşılık, $n+1$ elemanı sabit tutulur ve pozitif işaretlidir. Dolayısıyla, $n+1$ elemanını içeren ve eleman sayısı $k+1$ olan

$$2^k \binom{n}{k}$$

tane işaretli küme vardır. Dolayısıyla, $n+1$ elemanı $k+1$ elemanlı bir işaretli kümeye ait olacak şekilde $\langle n+1 \rangle$ kümesinin tüm D tipi küme parçalanmalarının sayısı

$$2^k \binom{n}{k} D(n-k)$$

olur. Tüm $k,\ 0 \leq k \leq n$ değerleri üzerinden toplam aldığımızda, (3.1) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci toplamı elde ederiz.

Durum 2. $n+1 \in P_0$ olduğunu varsayalım. $n+1 \in P_0$ olacak şekilde D tipi bir küme parçalanması inşaa etmek için P_0 bloguna $[n]$ kümesinden en az bir eleman daha seçmemiz gerekmektedir. Çünkü D tipi bir küme parçalanmasının sıfır blogu ya hiç pozitif eleman içermez ya da en az iki tane pozitif eleman içerir. Böylece, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, $[n]$ kümesinden i tane eleman seçelim. Bu seçim $\binom{n}{i}$ farklı biçimde yapılabilir. Bu yaklaşımla, $n+1$ elemanını içeren olası bütün sıfır blokları P_0-lar belirlenmiş olur.

Geriye kalan $n-i$ tane eleman, k tane eşlenmiş sıfır olmayan blok çiftine dağıtılır. Bu elemanları k tane boş olmayan bloga parçalamanın sayısı $S(n-i,k)$ dir. Her eşlenmiş blok çiftinde en küçük eleman pozitif işaretli olacağından, geriye kalan $n-i-k$ elemana ise bağımsız olarak iki işaretten biri atanabilir. Bu da 2^{n-i-k} farklı olası durum verir. Dolayısıyla, tüm uygun i ve k değerleri üzerinden toplama yaptığımızda, elde edilen D tipi küme parçalanmalarının toplam sayısı

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \sum_{k=0}^{n-i} 2^{n-i-k} S(n-i,k)$$

olur. Bu ifade ise bize (3.1) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci toplamı verir. □

Örnek 3.3. (3.1) indirgeme bağıntısını açıklamak amacıyla, n nin bazı küçük değerleri için $D(n)$ değerlerini hesaplayalım.

- $n=2$ için (3.1) eşitliği uygulandığında

$$\begin{aligned} D(3) &= \binom{2}{1}\Big\{2S(1,0)+S(1,1)\Big\}+\binom{2}{2}S(0,0) \\ &\quad + \binom{2}{0}D(2)+2\binom{2}{1}D(1)+2^2\binom{2}{2}D(0) \\ &= 15 \end{aligned}$$

  elde edilir.

- $n=3$ için (3.1) eşitliği uygulandığında

$$\begin{aligned} D(4) &= \binom{3}{1}\Big\{2^2S(2,0)+2S(2,1)+S(2,2)\Big\}+\binom{3}{2}\Big\{2S(1,0)+S(1,1)\Big\} \\ &\quad + \binom{3}{3}S(0,0)+\binom{3}{0}D(3)+2\binom{3}{1}D(2)+2^2\binom{3}{2}D(1)+2^3\binom{3}{3}D(0) \\ &= 72 \end{aligned}$$

  elde edilir.

- $n = 4$ için

$$\begin{aligned} D(5) &= \binom{4}{1}\Big\{2^3 S(3,0) + 2^2 S(3,1) + 2S(3,2) + S(3,3)\Big\} \\ &\quad + \binom{4}{2}\Big\{2^2 S(2,0) + 2S(2,1) + S(2,2)\Big\} \\ &\quad + \binom{4}{3}\Big\{2S(1,0) + S(1,1)\Big\} + \binom{4}{4} S(0,0) \\ &\quad + \binom{4}{0} D(4) + 2\binom{4}{1} D(3) + 2^2\binom{4}{2} D(2) \\ &\quad + 2^3\binom{4}{3} D(1) + 2^4\binom{4}{4} D(0) \\ &= 403 \end{aligned}$$

elde edilir.

3.1.2. $D(n)$ Sayılarının Üstel Üreteç Fonksiyonu

Şimdi aşağıdaki teoremde D tipi Bell sayılarının üstel üreteç fonksiyonunu elde edeceğiz.

Teorem 3.2. *D tipi Bell sayılarının üstel üreteç fonksiyonu*

$$D(x) = e^{\frac{e^{2x}-1}{2}}(e^x - x)$$

şeklindedir.

İspat. D tipi Bell sayılarının üstel üreteç fonksiyonunu

$$D(x) = \sum_{n\geq 0} D(n)\frac{x^n}{n!}$$

şeklinde tanımlayalım. Her iki tarafın x e göre türevini aldığımızda

$$D'(x) = \sum_{n\geq 1} D(n)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n\geq 0} D(n+1)\frac{x^n}{n!}$$

elde ederiz. [23] çalışmasındaki Teorem 4.7 gereğince

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\sum_{k=0}^{n-i} 2^{n-i-k} S(n-i,k) = B(n) - \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} S(n,k)$$

eşitliğinin sağlandığı bilinmektedir. Ayrıca,

$$\sum_{n,k\geq 0} S(n,k)\, t^k \frac{x^n}{n!} = e^{t(e^x-1)}$$

özdeşliğini de kullandığımızda (bkz. [5], Kesim 4.1)

$$\begin{aligned}
D'(x) =& \sum_{n\geq 0} D(n+1)\frac{x^n}{n!} \\
=& \sum_{n\geq 0}\left(B(n) - \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}S(n,k)\right)\frac{x^n}{n!} + \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} D(n-k)\right)\frac{x^n}{n!} \\
=& B(x) - \left(\sum_{n,k\geq 0} 2^{n-k}S(n,k)\frac{x^n}{n!}\right) + \left(\sum_{n\geq 0} 2^n \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0} D(n)\frac{x^n}{n!}\right) \\
=& B(x) - e^{\frac{e^{2x}-1}{2}} + e^{2x}D(x) \\
=& e^{\frac{e^{2x}-1}{2}+x} - e^{\frac{e^{2x}-1}{2}} + e^{2x}D(x)
\end{aligned}$$

diferensiyel denklemini elde ederiz. Bu lineer diferansiyel denklemi $D(0) = 1$ başlangıç koşulunu gözönünde bulundurarak çözdüğümüzde

$$D(x) = e^{\frac{e^{2x}-1}{2}}(e^x - x)$$

sonucunu elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır. □

Örnek 3.4. $D(x)$ serisinin ilk birkaç teriminin katsayısını hesaplayarak Teorem 3.2 yi açıklayalım. $D(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ noktası civarında Taylor seri açılımını yazdığımızda

$$D(x) = 1 + x + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{15}{3!}x^3 + \frac{72}{4!}x^4 + \cdots$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

$$D(0) = 1, \quad D(1) = 1, \quad D(2) = 4, \quad D(3) = 15, \quad D(4) = 72$$

olduğu görülür. Bu değerler gerçekten Tablo 3.1 te verilen değerlerle aynıdır.

3.1.3. $D(n)$ İçin Açık Bir Formül

Şimdi Teorem 3.2 yi kullanarak $D(n)$ için açık bir formül elde edeceğiz. Bu formül, aslında (1.1) eşitliğinde verilen Dobiński formülünün D tipi Bell sayıları için analogudur.

Sonuç 3.1. *Negatif olmayan her bir n tamsayısı için*

$$D(n) = e^{\frac{-1}{2}} \sum_{r\geq 0} \frac{1}{2^r r!}\left[(2r+1)^n - n(2r)^{n-1}\right] \tag{3.2}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Teorem 3.2 gereğince

$$D(x) = e^{\frac{e^{2x}-1}{2}}(e^x - x)$$

eşitliğinin sağlandığını biliyoruz. Ayrıca, (1.3) ve (1.4) eşitliklerini kullanırsak

$$\begin{aligned}
D(x) &= \sum_{n\geq 0} D(n)\frac{x^n}{n!} = e^{\frac{e^{2x}-1}{2}}(e^x - x) \\
&= B(x) - e^{-\frac{1}{2}} x e^{\frac{e^{2x}}{2}} \\
&= e^{-\frac{1}{2}} \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{r\geq 0} \frac{(2r+1)^n}{2^r r!} \right) \frac{x^n}{n!} - e^{-\frac{1}{2}} \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{r\geq 0} \frac{(2r)^n}{2^r r!} \right) \frac{x^{n+1}}{n!} \\
&= e^{-\frac{1}{2}} \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{r\geq 0} \frac{(2r+1)^n}{2^r r!} \right) \frac{x^n}{n!} - e^{-\frac{1}{2}} \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{r\geq 0} \frac{n(2r)^{n-1}}{2^r r!} \right) \frac{x^n}{n!} \\
&= e^{\frac{-1}{2}} \sum_{r\geq 0} \frac{1}{2^r r!} [(2r+1)^n - n(2r)^{n-1}] \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Her bir $n \geq 0$ için $\frac{x^n}{n!}$ terimlerinin katsayılarını karşılaştırdığımızda istenilen eşitliği buluruz. □

Örnek 3.5. $n = 3$ için Sonuç 3.1 deki açık formülü doğrulayalım. (3.2) eşitliğinden

$$D(3) = e^{-\frac{1}{2}} \sum_{r\geq 0} \frac{(2r+1)^3 - 3(2r)^2}{2^r\, r!}$$

olduğu bilinmektedir. Bu değeri doğrulamak için öncelikle serinin ilk birkaç terimini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
r = 0, &\quad \frac{(1)^3 - 3(0)^2}{1} = 1 \\
r = 1, &\quad \frac{(3)^3 - 3(2)^2}{2 \cdot 1!} = \frac{27-12}{2} = \frac{15}{2} \\
r = 2, &\quad \frac{(5)^3 - 3(4)^2}{4 \cdot 2!} = \frac{125-48}{8} = \frac{77}{8} \\
r = 3, &\quad \frac{(7)^3 - 3(6)^2}{8 \cdot 3!} = \frac{343-108}{48} = \frac{235}{48} \\
r = 4, &\quad \frac{(9)^3 - 3(8)^2}{16 \cdot 4!} = \frac{729-192}{384} = \frac{537}{384} \\
r = 5, &\quad \frac{(11)^3 - 3(10)^2}{32 \cdot 5!} = \frac{1331-300}{3840} = \frac{1031}{3840}
\end{aligned}$$

olup bu terimleri topladığımızda

$$\sum_{r=0}^{5} \frac{(2r+1)^3 - 3(2r)^2}{2^r\, r!} \approx 24.68776$$

buluruz. Dolayısıyla,

$$D(3) \approx e^{-\frac{1}{2}} \cdot 24.68776 \approx 14.976$$

olur. Bir sonraki terimi de dahil ettiğimizde, yani

$$r = 6, \quad \frac{(13)^3 - 3(12)^2}{64 \cdot 6!} = \frac{1765}{46080}$$

sayısını da ilave ettiğimizde kısmi toplam yaklaşık olarak 24.7309 değerine ulaşır ve dolayısıyla

$$D(3) \approx e^{-\frac{1}{2}} \cdot 24.7309 \approx 15.000$$

olur. Böylece, yukarıdaki hesaplama $e^{-\frac{1}{2}} \sum_{r\geq 0} \frac{(2r+1)^3-3(2r)^2}{2^r\, r!}$ serisinin

$$D(3) = 15$$

değerine yakınsadığını gösterir. Bu değer, Tablo 3.1 te verilen değerle uyumludur.

3.1.4. Düzleştirilmiş Stirling Permütasyonları Yoluyla Kombinatoryal Bir Yorum

Bu alt bölümde, $D(n)$ için düzleştirilmiş Stirling permütasyonları cinsinden kombinatoryal bir yorum vereceğiz. [23] çalışmasında verilen

$$\phi : \Pi_n^B \to flat(\mathcal{Q}_{n+1})$$

birebir ve örten dönüşümünün inşaasını gözönünde bulundurduğumuzda, D tipi bir küme parçalanmasının $2 \leq a \leq n+1$ olmak üzere

$$1aa1\cdots \in flat(\mathcal{Q}_{n+1})$$

formunda olmayan bir düzleştirilmiş Stirling permütasyonuna karşılık geldiği sonucunu çıkarırız. Başka bir ifadeyle, ϕ dönüşümünün Π_n^D kümesine kısıtlanması, Π_n^D kümesi ile

$$flat(\mathcal{Q}_{n+1}) \backslash \{\, 1aa1\cdots \in flat(\mathcal{Q}_{n+1}) : 2 \leq a \leq n+1 \,\}$$

kümesi arasında birebir bir tekabüliyet verir. Sonuç olarak, (1.6) eşitliğini ve [23] çalışmasındaki Teorem 2.1 i kullanarak

$$D(n) = |flat(\mathcal{Q}_{n+1})| - n \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-1-k} S(n-1,k)$$

eşitliğini elde ederiz.

Örnek 3.6. Yukarıdaki yorumu $n = 2$ durumu için açıklayalım.

3 mertebesindeki düzleştirilmiş Stirling permütasyonlarının kümesi olan $flat(\mathcal{Q}_3)$ kümesini ele alalım. Yukarıda açıklanan bijeksiyona göre, D tipi parçalanmalar, $flat(\mathcal{Q}_3)$ kümesinde yer alan ve

$$1aa1\cdots, \qquad 2 \leq a \leq 3$$

biçiminde olmayan permütasyonlara karşılık gelir.

Örneğin, 1221 permütasyonu $1aa1$ biçimindedir; burada $a = 2$ alınır. Bu nedenle bu permütasyon dışlanır. Benzer şekilde, 1331 permütasyonu da hariç tutulur.

Öte yandan, $flat(\mathcal{Q}_3)$ kümesindeki $1aa1$ biçiminde bir alt dizi içermeyen her düzleştirilmiş Stirling permütasyonu, D tipi bir tek küme parçalanmasına karşılık gelir. Böylece, $D(2)$ sayısı, $flat(\mathcal{Q}_3)$ kümesinde yer alan ve $1aa1\cdots$ deseninden kaçınan düzleştirilmiş Stirling permütasyonlarını tam olarak sayar.

Ayrıca, [11] ve [23] çalışmalarındaki inşalar birlikte ele alındığında, B tipi işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonlarının kümesi SRGF_n ile $n+1$ mertebesindeki düzleştirilmiş Stirling permütasyonlarının kümesi $flat(\mathcal{Q}_{n+1})$ arasında birebir bir tekabüliyet olduğu görülür.

KAYNAKÇA

[1] R.P. Stanley, Enumerative Combinatorics, Volume 1, Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 2nd ed., 2011.

[2] S. Dahlberg, R. Dorward, J. Gerhard, T. Grubb, C. Purcell, L. Reppuhn, and B.E. Sagan, "Set partition patterns and statistics," *Discrete Math.*, vol. 339, pp. 1–16, 2016, doi: 10.1016/j.disc.2015.07.001.

[3] I. Kaplansky and J. Riordan, "The problem of the rooks and its applications," *Duke Math. J.*, vol. 13, pp. 259–268, 1946, doi: 10.1215/S0012-7094-46-01324-5.

[4] V. Reiner, "Non-crossing partitions for classical reflection groups," *Discrete Math.*, vol. 177, pp. 195–222, 1997, doi: 10.1016/S0012-365X(96)00365-2.

[5] B.E. Sagan and J.P. Swanson, "q-Stirling numbers in type B," *European J. Combin.*, vol. 118, 2024, Art. no. 103899, doi: 10.1016/j.ejc.2023.103899.

[6] E. Bagno, R. Biagioli, and D. Garber, "Some identities involving second kind Stirling numbers of types B and D," *Electron. J. Combin.*, vol. 26, no. 3, 2019, Art. no. P3.9, doi: 10.37236/8703.

[7] C.O. Chow, "On derangement polynomials of type D," *Taiwanese J. Math.*, vol. 27, no. 4, pp. 629–646, 2023, doi: 10.11650/tjm/230203.

[8] I. Mezö and J.L. Ramírez, "A combinatorial approach to derangement matrix of type B," *Linear Algebra Appl.*, vol. 582, pp. 156–180, 2019, doi: 10.1016/j.laa.2019.08.003.

[9] K.Q. Ji and D.T.X. Zhang, "Signed Mahonian polynomials on derangements in classical Weyl groups," *European J. Combin.*, vol. 124, 2025, Art. no. 104083, doi: 10.1016/j.ejc.2024.104083.

[10] M. Wachs and D. White, "p, q-Stirling numbers and set partition statistics," *J. Combin. Theory Ser. A*, vol. 56, pp. 27–46, 1991, doi: 10.1016/0097-3165(91)90020-H.

[11] A. Acharyya, “Type B set partitions, an analogue of restricted growth functions,” *Ars Combin.*, vol. 162, pp. 191–204, 2025, doi: 10.61091/ars162-14.

[12] J.R. Goldman, J.T. Joichi, and D.E. White, “Rook theory. I. Rook equivalence of Ferrers boards,” *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 52, pp. 485–492, 1975, doi: 10.1090/S0002-9939-1975-0429578-4.

[13] I. Lah, “A new kind of numbers and its application in actuarial mathematics,” *Bol. Inst. Actuários Portugueses*, vol. 9, pp. 7–15, 1954.

[14] I. Lah, “Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik,” *Mitteilungsbl. Math. Statist.*, vol. 7, pp. 203–212, 1955.

[15] A. Altoum, “MOR cryptosystem over classical Weyl groups,” Ph.D. Thesis, Matematik Anabilim Dalı, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erciyes Üniversitesi, Kayseri, Türkiye, 2024.

[16] I. Gessel and R.P. Stanley, “Stirling polynomials,” *J. Combin. Theory Ser. A*, vol. 24, no. 1, pp. 24–33, 1978, doi: 10.1016/0097-3165(78)90042-0.

[17] V. Reiner, “Signed permutation statistics,” *European J. Combin.*, vol. 14, pp. 553–567, 1993, doi: 10.1006/eujc.1993.1058.

[18] A. Björner and F. Brenti, Combinatorics of Coxeter Groups, vol. 231 of Graduate Texts in Mathematics, New York, NY, USA: Springer, 2005.

[19] B.E. Sagan, “A maj statistic for set partitions,” *European J. Combin.*, vol. 12, pp. 69–79, 1991, doi: 10.1016/S0195-6698(13)80009-1.

[20] B.E. Sagan and J.P. Swanson, “Stirling numbers for complex reflection groups,” *Ann. Comb.*, vol. 30, pp. 365–395, 2026, doi: 10.1007/s00026-025-00751-4.

[21] G. Dobiński, “Summirung der Reihe $\sum \frac{n^m}{n!}$ f"ur $m = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$,” *Arch. Math. Phys.*, vol. 61, pp. 333–336, 1877.

[22] Z. Du and C.M. Fonseca, “An identity involving derangement numbers and Bell numbers,” *Appl. Anal. Discrete Math.*, vol. 16, no. 2, pp. 485–494, 2022, doi: 10.2298/AADM200705010D.

[23] A. Buck, J. Elder, A.A. Figueroa, P.E. Harris, K. Harry, and A. Simpson, "Flattened Stirling permutations," *Integers*, vol. 24, 2024, Article A104, doi: 10.5281/zenodo.14339833.

[24] U. Shankar, "Enumeration of flattened k-Stirling permutations with respect to descents,", 2023, arXiv:2307.07730, doi: 10.48550/arXiv.2307.07730.

[25] T. Zaslavsky, "The geometry of root systems and signed graphs," *Amer. Math. Monthly*, vol. 88, no. 2, pp. 88–105, 1981, doi: 10.1080/00029890.1981.11995201.

[26] R. Suter, "Two analogues of a classical sequence," *J. Integer Seq.*, vol. 3, pp. 1–18, 2000, Article 00.1.8.

[27] T. Mansour and M. Schork, Commutation Relations, Normal Ordering, and Stirling Numbers, New York, NY, USA: Chapman and Hall/CRC, 2016.

[28] R.L. Graham, D.E. Knuth, and O. Patashnik, Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science, Addison-Wesley, 2nd ed., 1994.

[29] L. Comtet, Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions, Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel Publishing Company, 1974.

[30] K.S. Briggs and J.B. Remmel, "m-rook numbers and a generalization of a formula of Frobenius to $C_m \wr S_n$," *J. Combin. Theory Ser. A*, vol. 113, pp. 1138–1171, 2006, doi: 10.1016/j.jcta.2005.10.009.

DİZİN

(p,q)-Stirling sayıları, 15
B tipi (p,q)-Stirling polinomları, 42
B tipi (p,q)-Stirling polinomları için üreteç fonksiyonları, 56
B tipi Ferrers tahta, 25
B tipi Laguerre kale sayıları, 66
B tipi Laguerre tahtası, 60
B tipi Lah sayıları, 65
B tipi kale yerleşimleri, 27
B tipi rafine edilmiş (p,q)-Stirling polinomları, 46
D tipi Bell sayıları, 69
D tipi Bell sayılarının açık formülü, 74
D tipi Bell sayılarının üstel üreteç fonksiyonu, 73

B tipi Bell sayıları, 11
B tipi Lah sayıları, 23
B tipi Stirling sayıları, 10
B tipi yükselen faktöriyel, 21
Bell sayıları, 9

D tipi Stirling sayıları, 12
D tipinde küme parçalanması, 6
düzleştirilmiş Stirling permütasyonu, 14
düşen faktöriyel, 20

en soldaki mutlak değer kümesi, 32
en soldaki mutlak değer sütunları, 36
eşdağılım teoremi (B tipi), 45

Ferrers tahtası, 19

Goldman–Joichi–White teoremi, 21

ikinci tür Stirling sayıları, 7
işaretli küme parçalanması, 4
işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonları ile B tipi kale yerleşimleri arasındaki birebir eşleme, 28
işaretli kısıtlı büyüme fonksiyonu, 16

kale yerleşimi, 18
küme parçalanması, 3
kısıtlı büyüme fonksiyonu, 15

Laguerre tahtası, 22
Lah sayıları, 22

NE-silme istatistiği, 37

pozitif-ilk kümesi, 47

sabitlenmiş B tipi Laguerre kale yerleşimi, 62
SE-silme istatistiği, 36
seviye sıralaması, 24
seviye-ağırlıklı NE istatistiği, 37
seviye-ağırlıklı SE istatistiği, 37
seviye-ağırlıklı sol-büyük istatistiği, 33
seviye-ağırlıklı sol-küçük istatistiği, 33
sol-büyük istatistiği (B tipi), 33
sol-küçük istatistiği (B tipi), 33

Stirling permütasyonu, 13

tahta, 18

yükselen faktöriyel, 20

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Mariam Zaarour
Uyruğu	:	Lübnan
E-posta	:	
Yazışma Adresi	:	

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Doktora	Erciyes Üniversitesi, Matematik Bölümü	2026
Yüksek Lisans	Lübnan Uluslararası Üniversitesi, Matematik Bölümü	2019
Lisans	Lübnan Uluslararası Üniversitesi, Matematik Bölümü	2016

YABANCI DİL

İngilizce, Arapça

YAYINLAR

1. H. Arslan, A. Altoum, M. Zaarour, An inversion statistic on the generalized symmetric groups, *Adv. in Appl. Math.* 154 (2024) 102655.

2. H. Arslan, A. Altoum, M. Zaarour, Integer representations of classical Weyl groups, *Turkish J. Math.* 48(3) (2024) 377-390.

3. H. Arslan, M. Zaarour, N. Alemdar, H. Altındiş, Type-B (p, q)-Stirling Numbers via Signed Restricted Growth Functions and Rook Theory, *Mathematics* 14(6) (2026) 1025.