T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

3- BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÖZEL SMARANDACHE EĞRİLERİ İÇİN YENİ YAKLAŞIMLAR

Hazırlayan
Gülcan YAZICI

Danışman
Prof. Dr. Nural YÜKSEL

Yüksek Lisans Tezi

Ağustos 2025
KAYSERİ

T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

3- BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÖZEL SMARANDACHE EĞRİLERİ İÇİN YENİ YAKLAŞIMLAR

(Yüksek Lisans Tezi)

Hazırlayan
Gülcan YAZICI

Danışman
Prof. Dr. Nural YÜKSEL

Ağustos 2025
KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Gülcan YAZICI

"**3- Boyutlu Öklid Uzayında Özel Smarandache Eğrileri için Yeni Yaklaşımlar**" adlı Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi' ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Hazırlayan — **Danışman**

Gülcan YAZICI — Prof. Dr. Nural YÜKSEL

Matematik ABD Başkanı

Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

TEŞEKKÜR

Bütün üniversite hayatım boyunca bir anne şefkati ile yaklaşıp, her türlü desteğini esirgemeyen azmi ile bizlere örnek olan ve yaptığı çalışmalarla büyük başarılara sahip olan, tez çalışmamda da bilgi ve yardımlarını esirgemeyip gerekli sabrı gösterip hep yanımızda olan, bana hayatım boyunca kattıklarını unutmayacağım canım hocam Sayın Prof. Dr. Nural YÜKSEL'e sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunuyorum.

Yüksek Lisansa başladığım andan itibaren destek ve anlayışlarını eksik etmeyen sevgili eşim Yasin YAZICI ve canım kızım Alya Ebrar YAZICI ' ya teşekkürlerimi sunuyorum.

Gülcan YAZICI

Kayseri, Ağustos 2025

3- BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÖZEL SMARANDACHE EĞRİLERİ İÇİN YENİ YAKLAŞIMLAR

Gülcan YAZICI

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Ağustos 2025
Danışman: Prof. Dr. Nural YÜKSEL

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tezde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde TN- Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve torsiyonu elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde NB- Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri ile eğrilik ve torsiyonu hesaplandı, örnekler verilerek eğrilerin görselleri çizdirilmiştir.

Son bölüm ise bulgular ve sonuç kısmına ayrılmıştır.

Anahtar kelimeler: Öklid uzayı, Frenet- Serret vektörleri, Smarandache eğrisi.

NEW APPROACHES TO SPECIAL SMARANDACHE CURVES IN 3-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

Gülcan YAZICI

Erciyes Unıversity, Graduate School of Natural and Applied Sciences M. Sc. Thesis, August 2025
Supervisor: Prof. Dr. Nural YÜKSEL

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, the basic definitions and theorems used in the thesis are given.

In the second part, the Frenet vectors, curvature and torsion of the TN- Smarandache curve are obtained.

In the third chapter, the curvature and torsion of the NB- Smarandache curve were calculated with Frenet vectors, and the curves were drawn by giving examples.

The last section is devoted to findings and conclusions.

Keywords: Euclidean space, Frenet- Serret vectors, Smarandache curve.

İÇİNDEKİLER

3- BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÖZEL SMARANDACHE EĞRİLERİ İÇİN YENİ YAKLAŞIMLAR

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK ii
YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI iii
KABUL VE ONAY iv
TEŞEKKÜR v
ÖZET vi
ABSTRACT vii
İÇİNDEKİLER viii
KISALTMALAR x
ŞEKİLLER LİSTESİ xi
GİRİŞ 1

1. BÖLÜM
TEMEL TANIM VE TEOREMLER

1.1. Temel Tanımlar 3

2. BÖLÜM
TN- SMARANDACHE EĞRİSİ

2.1. TN- Smarandache Eğrisi 11

3. BÖLÜM
NB- SMARANDACHE EĞRİSİ

3.1. NB- Smarandache Eğrisi 19
3.2. Örnekler 27

4. BÖLÜM
BULGULAR VE SONUÇLAR

4.1. Bulgular ve Sonuçlar 34

KAYNAKÇA 37
ÖZGEÇMİŞ.....38

KISALTMALAR

E^3 : 3- boyutlu Öklid uzayı

$< , >$: Öklid iç çarpımı

$\| \|$: Norm

d : Uzaklık fonksiyonu

τ : Torsiyon (Burulma)

κ : Eğrilik

T : Teğet vektör

N : Asli normal vektör

B : Binormal vektör

T_ξ : ξ eğrisinin teğet vektörü

N_ξ : ξ eğrisinin asli normal vektörü

B_ξ : ξ eğrisinin binormal vektörü

T_Ω : Ω eğrisinin teğet vektörü

N_Ω : Ω eğrisinin asli normal vektörü

B_Ω : Ω eğrisinin binormal vektörü

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. Eğri 5
Şekil 1.2. Parametre değişimi 5
Şekil 1.3. Frenet- Serret vektörleri 8
Şekil 3.1. $\alpha(s)$ eğrisi 30
Şekil 3.2. $\alpha(s)$ eğrisinin TN- Smarandache eğrisi 30
Şekil 3.3. $\alpha(s)$ eğrisinin NB- Smarandache eğrisi 31
Şekil 3.4. $\alpha(s)$ eğrisinin TNB- Smarandache eğrisi 31
Şekil 3.5. $\gamma(s)$ eğrisi 32
Şekil 3.6. TN- Smarandache eğrisi 32
Şekil 3.7. NB- Smarandache eğrisi 33
Şekil 3.8. TNB- Smarandache eğrisi 33

GİRİŞ

Diferansiyel geometri bilim ve matematiğin; fizik, ekonometri, mühendislik, yapısal jeoloji ve geometrik modelleme gibi bir çok alanında kullanılmıştır. Diferansiyel geometride yapılan çalışma alanlarından eğriler teorisi oldukça önemlidir. Eğrilerle ilgili bir çok çalışma yapılmakta ve önemli bulgular elde edilmektedir. Bu çalışmalardan biri Smarandache eğrileridir. Adını, Rumen matematikçi Florentin Smarandache ' den alır ve genellikle Frenet çatı elemanları olan tanjant, normal, binormal vektörleri kullanılarak bulunur. Smarandache eğrileri şu şeklide tanımlanır. Bir eğrinin Frenet vektörlerinden biri başka bir eğrinin parametreli eğrisi olarak alınır. Bu eğriler, klasik eğri teorisideki kavramların daha karmaşık yapılara uygulanmasına olanak tanır ve diferansiyel geometri, fizik, kinematik ve mekanik gibi alanlarda potansiyel uygulamalar sunar. E^3, 3- boyutlu öklidyen uzayında regüler bir eğri, eğer yer vektörü diğer bir eğri üzerindeki Frenet çatısı ile belirlenebiliyorsa, bu eğri Smarandache eğri olarak adlandırılmıştır. Smarandache eğrileri farklı uzaylar üzerinde bir çok araştırmacı tarafından ele alınmış ve çalışmalar yapmıştır.

Turgut ve Yılmaz 2008 yılında ' Smarandache Curves in Minkowski Space - time ' isimli çalışmasında Minkowski uzayında Smarandache eğrisinin tanımı ifade ederek, E_1^4 de TB_2 - Smarandache eğrisine ait bazı özel durumlarını incelemiş ve bu eğrinin Frenet elemanlarını hesaplamıştır [1]. A.T. Ali, 2010 yılında, ' Special Smarandache Curves in Euclidian Space ' isimli çalışmada bazı özel Smarandache eğrilerini tanımlayarak bu eğrilere ait Frenet- Serret invaryantlarının özel durumlarını çalışmıştır [2]. Çetin M., Tuncer Y. ve Karaca M. K. (2010), 'Smarandache Accordingto Bishop Frame in Eucludian 3- Space ' isimli çalışmada Öklid uzayında Bishop çatısına göre özel Smarandache eğrileri araştırmışlar ve bu eğrilerin bazı diferansiyel geometrik özelliklerini vermişlerdir. Ayrıca Smarandache eğrisine ait oskülatör kürenin merkezi ve kürenin eğrilği ile ilgili sonuçlar bulmuşlardır [3]. Bektaş ve Yüce (2013), 'Special

Smarandache Curves According to Darboux Frame 3-space' isimli çalışmada Öklid uzayında Darboux çatısına ait Smarandache eğirileri incelemişler ve bu eğrilere ait bazı karakterizasyonları ve sonuçları vermişlerdir [4]. Taşköprü ve Tosun (2014), 'Smarandache Curves According to Sabban Frame on S^2 birim küresi üzerinde Sabban çatısına göre Smaranadache eğrilerini incelemişler ve bu eğrilerin karakterizasyonları ile ilgili sonuçlar elde etmişlerdir [6]. Çalışkan ve Şenyurt (2015) yılında yaptıkları farklı iki çalışmalarla küresel gösterge eğrilerinin Sabban çatısına göre Smarandache eğrilerini inceleyerek Birim Darboux vektörünün küre yüzeyinde çizdiği eğrinin Sabban çatısına göre Smaranadache eğrilerini araştırmışlar ve bu eğrilerin bazı karakterizasyonlarıyla ilgili sonuçlan elde etmişlerdir.

Bu tez çalışmasında ise A. T. Ali 'nin (2010), çalışması paralelinde değişik Smarandache eğrilerinin eğrilikleri ve torsiyonları hesaplanmıştır [2]. Ayrıca 3- boyutlu öklidyen uzayda Frenet- Serret değişmezleri, denklemleri ve bileşenleri yardımı ile özel Smarandache eğrileri inceleyip TN-, NB- ve TNB- Samarandache eğrileri için tanımlar verip, bu eğrilerin verilen örnek üzerinden çizimleri sırası ile gösterilmiştir.

1. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde ileriki bölümlerde kullanılacak olan eğriler ile ilgili bazı temel tanımlar ve teoremler hakkında bilgi verilmiştir.

1.1. Temel Tanımlar

Tanım 1.1.1. (Afin uzay) A boş olmayan bir cümle V' de bir K cismi üzerindeki vektör uzayı olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir f: A x A → V fonksiyonu varsa, A ya V ile birleştirilmiş afin uzay denir [7].

i. ∀ P, Q ∈ A için f (P, Q) = $\overrightarrow{PQ}$ ∈ V,

ii. .∀ P, Q, R ∈ A için f (P, Q) + f (Q, R) = f (P, R),

iii. Bir P ∈ A ve bir β ∈ V için f (P, Q) = β olacak şekilde bir tek Q ∈ A noktası vardır.

Tanım 1.1.2. (Öklid uzayı) Bir reel afin uzay A ve A ile eşleşen vektör uzayıda V olsun. V vektör uzayında, boyV = n olmak üzere,

$$<,>: V \times V \rightarrow R$$

$$(x, y) \rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \begin{cases} x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

biçiminde Öklid iç çarpımı tanımlanırsa, A afin uzayına n- boyutlu Öklid uzayı denir ve E^n ile gösterilir. E^n ile eşlenen reel vektör uzayı da R^n ile gösterilir. E^n in elemanları noktalar ve R^n in elemanları vektörlerdir [7].

Tanım 1.1.3. (İki nokta arası uzaklık) n- boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V ve V ile birleşen Öklid uzayı E^n olsun. V vektör uzayı üzerindeki norm $\| \ \|$ olmak üzere,

$$d : E^n \times E^n \to R$$

$$(x, y) \to d (x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna E^n, n- boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $\forall\, x, y \in E^n$ için 'd (x, y)' değerine de x ile y noktaları arasındaki uzaklık denir [7].

Tanım 1.1.4. (Öklid metriği) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in E^n$ olmak üzere

$$d : E^n \times E^n \to R$$

$$(x, y) \to d (x, y) = \|\overrightarrow{xy}\|$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonun belirttiği metriğe E^n de Öklid metriği denir [7].

Teorem 1.1.1. n-boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu bir metrik belirtir [7].

Tanım 1.1.5. E^n n- boyutlu Öklid uzayı ve $\vec{x} \in R^n$ için $\vec{x}$ vektörünün normu

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{<\vec{x}, \vec{x}>}$$

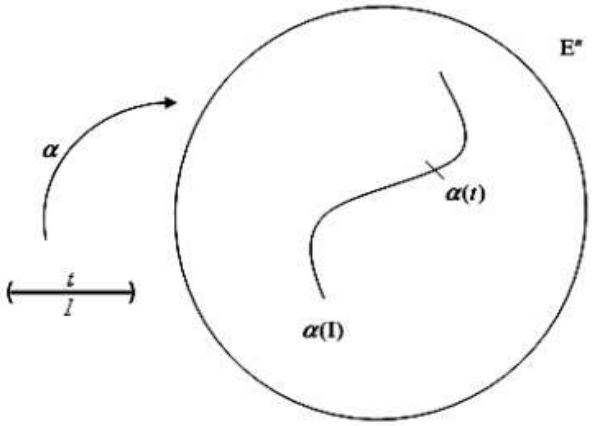
biçiminde tanımlanır [7].

Tanım 1.2.1. I ⊆ R bir açık aralık ve

$$\alpha : I \to E^n$$

$$t \to \alpha(t)=(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

şeklinde tanımlı α fonksiyonu diferansiyallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $\alpha(I) \subset E^n$ cümlesine E^n, n- boyutlu Öklid uzayında (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri denir. I ⊂ R aralığına α eğrisinin parametre aralığı ve t ∈ I değişkinine de α(t) eğrisinin parametresi denir [7].

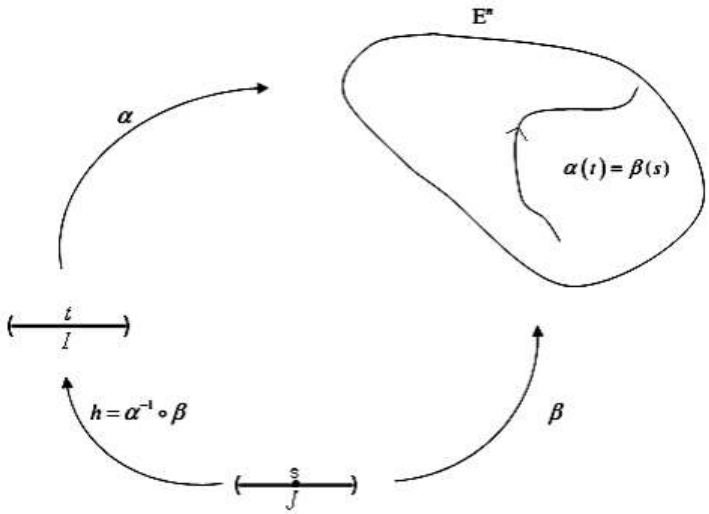


Şekil 1.1. Eğri

Tanım 1.2.2. E^n de bir M eğrisi (I, α) ve (J, β) gibi iki koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$h = \alpha^{-1} o\, \beta : J \to I$$

diferansiyellenebilir fonksiyonuna M nin bir parametre değişimi denir [7].



Şekil 1.2. Parametre değişimi

Tanım 1.2.3. (Hız Vektörü) E^n de bir M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha: I \to E^n$ fonksiyonunun Öklid koordinat fonksiyonları $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ olmak üzere,

$$\alpha(t)=(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

şeklindedir. $(\alpha(t), \alpha'(t)) \in T_{E^n}(P)$ tanjant vektörüne, M eğrisinin t∈I parametre değerine karşılık gelen α(t) noktasında (I, α) koordinat komşuluğuna göre hız vektörü denir [7].

Tanım 1.2.4. (Skaler Hız) E^nde bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$t \to \|\alpha'\| = \|\alpha'(t)\|$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna, M eğrisinin (I ,α) koordinat komşuluğuna göre skaler hız fonksiyonu $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da M eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki skaler hızı denir.

Eğer $\|\alpha'(s)\|$=1 ise M eğrisine birim hızlı eğri ve s∈I parametresine de eğrinin yay parametresi denir [7].

Tanım 1.2.5. (Yay Uzunluğu) $\alpha : I \to E^n$

$$t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

eğrisi verilmiş olsun. $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(t)\| \, dt$$

reel sayısına $\alpha(t)$ eğrisinin $\alpha(t_1)$ ve $\alpha(t_2)$ noktaları arasındaki yay uzunluğu denir [8].

Tanım 1.2.6. (Birim Hızlı Eğri) $\alpha : I \to E^n$

$$s \to \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \dots, \alpha_n(s))$$

eğrisi verilsin. Eğer;

$$\|\alpha'(s)\| = \left\|\frac{d\alpha}{ds}\right\| = 1$$

ise α eğrisine birim hızlı eğri ve s parametresine de yay parametresi denir [8].

Tanım 1.2.7. (Regüler Eğri) Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye (yani $\forall$ t ∈ I için $\alpha'(t) \neq 0$) regüler eğri denir [7].

Tanım 1.2.8. E^n de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda

ψ ={α', α'',…, α^r} sistemi lineer bağımsız ve $\forall\alpha^k \in S_P\{\psi\}$ olmak üzere ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Frenet- Serret r - ayaklı alanı ve t∈M için $\{V_1(t), V_2(t), \dots, V_r(t)\}$ ye ise t∈M noktasındaki Frenet- Serret r- ayaklısı denir [7].

Tanım 1.2.9. E^n de bir M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. s∈I ya karşılık gelen α(s) noktasındaki Frenet- Serret r – ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. Buna göre;

k_i: I→ R

s → k_i(s) = $< V_i'(s), V_{i+1}(s) >$, $1 \leq i < s$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu ve s∈I için k_i(s) sayısına da α(s) noktasında M nin i-yinci eğriliği denir [7].

Teorem 1.2.1 E^n de bir M eğrisi s∈I yay parametresi olmak üzere,

i. $V_1'(s) = k_1(s).V_2(s)$

ii. $V_i'(s) = -k_{i-1}(s).V_{i-1}(s) + k_i(s).V_{i+1}(s)$, $2 \leq i \leq r-1$

iii. $V_r'(s) = -k_{r-1}(s).V_{r-1}(s)$

dır. Bu eşitliklere Frenet- Serret formülleri denir [7].

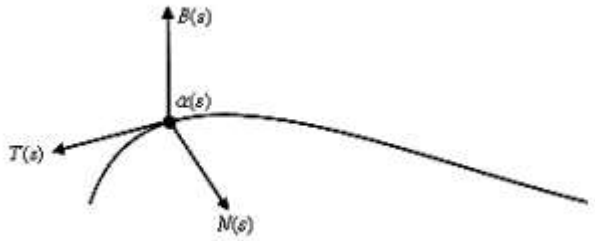
Teorem 1.2.2. E^3 de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. s∈I yay parametresi olmak üzere, M eğrisinin {T(s), N(s), B(s)} Frenet- Serret vektörleri

T(s) = $\alpha'(s)$,

N(s) = $\frac{1}{\|\alpha''(s)\|}\alpha''(s)$,

B(s) = T(s) Λ N(s)

şeklindedir [7].



Şekil 1.3. Frenet- Serret vektörleri

Teorem 1.2.3. E^3 de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. t∈I keyfi bir parametre olmak üzere, M eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki {T(t), N(t), B(t)} Frenet vektörleri;

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|},$$

$$N(t) = B(t) \Lambda T(t),$$

$$B(t) = \frac{\alpha'(t) \Lambda \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \Lambda \alpha''(t)\|}$$

şeklinde hesaplanır [7].

Teorem 1.2.4. E^3 de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. t∈I keyfi bir parametre olmak üzere M eğrisinin α(t) noktasındaki eğriliği ve burulması (torsiyonu) sırasıyla, $\kappa(t)$ ve τ(t) olmak üzere,

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \Lambda \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3},$$

$$\tau(t) = \frac{<\alpha'(t) \Lambda \alpha''(t), \alpha'''(t)>}{\|\alpha'(t) \Lambda \alpha''(t)\|^2}$$

ile hesaplanır [9].

Tanım 1.2.10. (Helis) $\alpha: I \to E^3$ birim hızlı regüler bir eğri ve $\vec{u}$, α eğrisinin sabit vektörü olsun. Eğer $\vec{u}$ sabit vektörü ile α eğrisinin tanjant vektörü sabit açı yapıyor ise α eğrsine helis (eğilim çizgisi) denir [8].

Teorem 1.2.5. (Lancret Teoremi) $\alpha: I \rightarrow E^3$ birim hızlı regüler bir eğri olsun. α eğrisinin bir helis olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\tau}{\kappa} = \text{sabit}$$

olmasıdır. Burada κ eğrilik ve τ burulmadır [11].

Ayrıca, α eğrisinin bir dairesel helis olması için gerek ve yeter şart κ =sabit > 0 ve

τ = sabit olmasıdır.

Tanım 1.2.11. (Slant Helis) $\alpha: I \rightarrow E^3$ birim hızlı regüler bir eğri ve $\vec{u}$, α eğrisinin sabit vektörü olsun. Eğer $\vec{u}$ sabit vektörü ile α eğrisinin asli normal vektörü sabit açı yapıyor ise α eğrisine slant (eğik) helis denir [10].

Teorem 1.2.6. E^3 Öklid uzayında α eğrisi boyunca hareket eden Frenet - Serret çatısı {T, N, B} olsun. Keyfi bir $\alpha \in E^3$ eğri için birinci ve ikinci eğrilikleri sırasıyla κ ve τ olan Frenet- Serret formülleri;

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

ise

$$T' = \kappa N,$$

$$N' = -\kappa T + \tau B, \qquad (1.1)$$

$$B' = -\tau N$$

şeklinde ifade edilir [2].

3-boyutlu E^3 Öklid uzayında {T, N, B} Frenet üç yüzlüsü için

$$< T, T > = < N, N > = < B, B > = 1,$$

$$< T, N > = < T, B > = < T, N > = < N, B > = 0,$$

$$T \Lambda N = B, \quad N \Lambda B = T, \quad B \Lambda T = N$$

eşitlikleri yazılır.

Ayrıca Frenet üç yüzlüsünün üzerinde tanımlı s yay parametreli α eğrisinin birinci ve ikinci eğrilikleri sırasıyla;

$$\kappa = \kappa(s) = \|T'(s)\| \text{ ve } \tau(s) = -< N, B' >$$

ile tanımlanır.

Tanım 1.2.12. E^3 de birim hızlı regüler bir eğri $\gamma = \gamma(s)$ olsun. $\gamma\,'$ nın yer vektörü E^3 deki bir başka regüler eğrinin Frenet vektörleri cinsinden yazılabiliyorsa γ ya Smarandache eğri adı verilir [2].

2. BÖLÜM

TN- SMARANDACHE EĞRİSİ

Bu bölümde verilen γ eğrisi ile bunun TN- Smarandache eğrisinin yay parametreleri arasındaki bağıntı bulunarak TN- Smarandache eğrisinin Frenet elemanları elde edilmiştir.

2.1. TN- Smarandache Eğrisi

Tanım 2.1.1. E^3 de birim hızlı regüler bir eğri $\gamma = \gamma(s)$ olsun. Bu eğrinin Frenet üç yüzlüsü {T, N, B} olsun. TN- Smarandache eğrileri

$$\xi = \xi(s_\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T+N) \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır [2].

$\gamma(s)$ ' in ikinci türevi alındığında Smarandache da TN- eğrilerinin Frenet- Serret değişmezlerini $\gamma = \gamma(s)$ ye göre inceleyelim ve ilk olarak ξ eğrisinin teğet vektör alanını bulalım.

ξ eğrisinin türevi alınıp, (1.1) ifadesinden Frenet formülleri yerine yazılırsa,

$$\xi' = \frac{d\xi}{ds_\xi}\frac{ds_\xi}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\kappa T + \kappa N + \tau B) \tag{2.2}$$

elde edilir. Buradan;

$$T_\xi = \frac{\xi'}{\|\xi'\|} \tag{2.3}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(-\kappa T + \kappa N + \tau B)}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\kappa^2+\kappa^2+\tau^2}}$$

olmak üzere,

$$T_\xi = \frac{-\kappa T + \kappa N + \tau B}{\sqrt{2\kappa^2+\tau^2}} \tag{2.4}$$

bulunur. Daha sonra (2.3) eşitliğinden

$$\xi' = T_\xi \frac{ds_\xi}{ds} \tag{2.5}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{ds_\xi}{ds} = \frac{\xi'}{T_\xi}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(-\kappa T + \kappa N + \tau B)}{\frac{-\kappa T + \kappa N + \tau B}{\sqrt{2\kappa^2+\tau^2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2\kappa^2+\tau^2}}{\sqrt{2}}$$

olup, buradan

$$\frac{ds_\xi}{ds} = \sqrt{\frac{2\kappa^2+\tau^2}{2}} \tag{2.6}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi de ξ eğrisinin asli normal vektör alanını ve birinci eğriliğini bulmak için bazı hesaplamalar yapılırsa;

$$T_\xi = \frac{\kappa N - \kappa T + \tau B}{\sqrt{2\kappa^2+\tau^2}}$$

olup, türevi alınıp gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$T_\xi' = \frac{(-\kappa T+\kappa N+\tau B)'(\sqrt{2\kappa^2+\tau^2})-(-\kappa T+\kappa N+\tau B)(\sqrt{2\kappa^2+\tau^2})'}{(\sqrt{2\kappa^2+\tau^2})^2}$$

$$= \frac{(\kappa' N+\kappa N'-\kappa' T-\kappa T'+\tau B'+\tau' B)\sqrt{2\kappa^2+\tau^2}}{(2\kappa^2+\tau^2)} - \frac{(-\kappa T+\kappa N+\tau B)}{(2\kappa^2+\tau^2)}\frac{(4\kappa\kappa'+2\tau\tau')}{2\sqrt{2\kappa^2+\tau^2}}$$

$$= \frac{\begin{matrix}(\kappa' N+\kappa(-\kappa T+\tau B)-\kappa' T-\kappa(\kappa N)+\tau' B+\tau(-\tau N))(2\kappa^2+\tau^2)- \\ (\kappa N-\kappa T+\tau B)(2\kappa\kappa'+\tau\tau')\end{matrix}}{(2\kappa^2+\tau^2)\sqrt{2\kappa^2+\tau^2}}$$

$$= \frac{\begin{matrix}(\kappa' N-\kappa^2 T+\kappa\tau B-\kappa' T-\kappa^2 N+\tau' B-\tau^2 N)(2\kappa^2+\tau^2)-2\kappa^2\kappa' N-\kappa N\tau\tau'+2\kappa^2\kappa' T+ \\ \kappa\tau\tau' T-2\tau\kappa\kappa' B-\tau^2\tau' B\end{matrix}}{(2\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\begin{matrix}T(-2\kappa^4-\kappa^2\tau^2-2\kappa'\kappa^2-\tau^2\kappa'+2\kappa'\kappa^2+\kappa\tau\tau')+N\begin{pmatrix}2\kappa^2\kappa'+\kappa'\tau^2-2\kappa^4-\tau^2\kappa^2-2\tau^2\kappa^2 \\ -\tau^4-2\kappa^2\kappa'-\kappa\tau\tau'\end{pmatrix} \\ +B(2\kappa^3\tau+\kappa\tau^3+2\tau'\kappa^2+\tau^2\tau'-2\tau\kappa\kappa'-\tau^2\tau')\end{matrix}}{(2\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\begin{matrix}T[\kappa^2(-2\kappa^2-\tau^2)+\tau(-\tau\kappa'+\kappa\tau')]+N[(-2\kappa^2-3\tau^2)+\tau(-\tau^3+\kappa'\tau-\kappa\tau')]+ \\ B[\kappa(\tau(2\kappa^2+\tau^2)+2(\tau\kappa-\tau\kappa'))]\end{matrix}}{(2\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}$$

bulunur. Bu son eşitlikte işlemlerde kolaylık olması bakımından T, N ve B 'nin katsayıları sırası ile,

$$\delta = -[\kappa^2(2\kappa^2+\tau^2)+\tau(\tau\kappa'-\kappa\tau')]$$

$$\mu = -[\kappa^2(2\kappa^2+3\tau^2)+\tau(\tau^3-\kappa'\tau+\kappa\tau')] \qquad (2.7)$$

$$\eta = \kappa[\tau(2\kappa^2+\tau^2)-2(\tau\kappa'-\kappa\tau')]$$

yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$T_\xi' = \frac{\delta T+\mu N+\eta B}{(2\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (2.8)$$

eşitliği elde edilir.

$$T_\xi' = \dot{T}\,\frac{ds_\xi}{ds}$$

eşitliğinden,

$$\dot{T}_\xi = \frac{T_\xi'}{\frac{ds_\xi}{ds}}$$

yapılırsa,

$$\dot{T}_\xi = \frac{\frac{\delta T+\mu N+\eta B}{(2\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\frac{2\kappa^2+\tau^2}{2}}}$$

$$= \frac{\delta T+\mu N+\eta B}{(2\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{\sqrt{2}}{(2\kappa^2+\tau^2)^{\frac{1}{2}}}$$

olup,

$$\dot{T}_\xi = \frac{\sqrt{2}(\delta T+\mu N+\eta B)}{(2\kappa^2+\tau^2)^2} \tag{2.9}$$

elde edilir.

Böylece verilen eğrinin birinci eğriliği ve asli normal vektör alanı,

$$\kappa_\xi = \left\|\dot{T}_\xi\right\|$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2(\delta^2+\mu^2+\eta^2)}{((2\kappa^2+\tau^2)^2)^2}}$$

olup,

$$\kappa_\xi = \frac{\sqrt{2}\sqrt{(\delta^2+\mu^2+\eta^2)}}{(2\kappa^2+\tau^2)^2} \tag{2.10}$$

elde edilir.

$$N_\xi = \frac{\dot{T}_\xi}{\|\dot{T}_\xi\|}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}(\delta T+\mu N+\eta B)}{(2\kappa^2+\tau^2)^2}}{\frac{\sqrt{2}\sqrt{(\delta^2+\mu^2+\eta^2)}}{(2\kappa^2+\tau^2)^2}}$$

olup, buradan

$$N_\xi = \frac{\delta T+\mu N+\eta B}{\sqrt{(\delta^2+\mu^2+\eta^2}} \tag{2.11}$$

bulunur.

$B_\xi = T_\xi \Lambda N_\xi$ binormal vektör alanı,

$$T_\xi \Lambda N_\xi = \frac{1}{\sqrt{2\kappa^2+\tau^2}} \frac{1}{\sqrt{(\delta^2+\mu^2+\eta^2}} \begin{vmatrix} T & N & B \\ -\kappa & \kappa & \tau \\ \delta & \mu & \eta \end{vmatrix} \tag{2.12}$$

dır. Burada;

$v = \sqrt{2\kappa^2 + \tau^2}$ ve $l = \sqrt{(\delta^2 + \mu^2 + \eta^2}$

alınırsa;

$$T_\xi \Lambda N_\xi = \frac{1}{vl} \begin{vmatrix} T & N & B \\ -\kappa & \kappa & \tau \\ \delta & \mu & \eta \end{vmatrix}$$

olarak elde edilir. Böylece ξ eğrisinin binormal vektör alanı;

$$B_\xi = \frac{(\kappa\eta-\tau\mu)T+(\kappa\eta+\tau\delta)N-(\kappa\mu+\delta\kappa)B}{v.l} \tag{2.13}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi de ξ eğrisinin torsiyonunu hesaplayalım. (2.2) eşitliğinden ξ' ' nin türevi alınırsa,

$$\xi'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-\kappa T + \kappa N + \tau B)'$$

olup, buradan

$$\xi'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-\kappa' T - \kappa T' + \kappa' N + \kappa N' + \tau' B + \tau B') \tag{2.14}$$

bulunur. Burada (2.14) denkleminde, (1.1) ifadesinden Frenet formülleri yerine yazılırsa;

$$\xi'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-\kappa' T - \kappa^2 N + \kappa' N - \kappa^2 T + \kappa\tau B + \tau' B - \tau^2 N)$$

olup,

$$\xi'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[(-\kappa' - \kappa^2)T + (-\kappa^2 + \kappa' - \tau^2)N + (\kappa\tau + \tau')B] \tag{2.15}$$

elde edilir. Buradan (2.15) denkleminin türevi alınıp gerekli işlemler yapılırsa;

$$\xi''' = \frac{1}{\sqrt{2}}[(-\kappa' - \kappa^2)T + (-\kappa^2 + \kappa' - \tau^2)N + (\kappa\tau + \tau')B]'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[(-\kappa' - \kappa^2)'T+(-\kappa' - \kappa^2)T'+(-\kappa^2 + \kappa' - \tau^2)'N+(-\kappa^2 + \kappa' - \tau^2)N'+(\kappa\tau + \tau')'B+ (\kappa\tau + \tau')B']$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[(-\kappa'' -2\kappa'\kappa)T+(-\kappa' - \kappa^2)(\kappa N)+(-2\kappa'\kappa+\kappa'' -2\tau\tau')N+(-\kappa^2 + \kappa' - \tau^2)(-\kappa T+\tau B)+(\kappa'\tau+\kappa\tau'+\tau'')B+(\kappa\tau+\tau')(-\tau N)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[(-\kappa'' - 2\kappa'\kappa + \kappa^3 - \kappa'\kappa + \tau^2\kappa)T + (-\kappa'\kappa - \kappa^3 - 2\kappa'\kappa + \kappa'' - 2\tau\tau'$$

$$-\kappa\tau^2 - \tau\tau')N + (-\kappa^2\tau + \kappa'\tau - \tau^3 + \kappa'\tau + \kappa\tau' + \tau'')B]$$

olup, buradan

$$\xi''' = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\kappa^3 + \kappa(\tau^2 - 3\kappa') - \kappa'')T + (-\kappa^3 - \kappa(\tau^2 + 3\kappa') - 3\tau\tau' + \kappa'')N + (-\kappa^2\tau - \tau^3 + 2\kappa'\tau + \tau'')B] \quad (2.16)$$

elde edilir. Buradan işlemlerde kolaylık olması açısıdan;

$$\begin{aligned} \omega &= \kappa^3 + \kappa(\tau^2 - 3\kappa') - \kappa'' \\ \Phi &= -\kappa^3 - \kappa(\tau^2 + 3\kappa') - 3\tau\tau' + \kappa'' \\ \sigma &= -\kappa^2\tau - \tau^3 + 2\kappa'\tau + \kappa\tau' + \tau'' \end{aligned} \quad (2.17)$$

alınırsa, (2.16) ifadesinden

$$\xi''' = \frac{\omega T + \Phi N + \sigma B}{\sqrt{2}} \quad (2.18)$$

elde edilir. O halde ξ eğrisinin ikinci eğriliği yani torsiyonu,

$$\tau_\xi = \frac{\det(\xi', \xi'', \xi''')}{\|\xi''\|^2}$$

olup, τ_ξ bağıntısında (2.2), (2.15), (2.18) ifadeleri yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa,

$$\det(\xi', \xi'', \xi''') = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} -\kappa & \kappa & \tau \\ -\kappa' - \kappa^2 & -\kappa^2 + \kappa' - \tau^2 & \kappa\tau + \tau' \\ \omega & \Phi & \sigma \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}[-\kappa(\sigma(-\kappa^2 + \kappa' - \tau^2) - \Phi(\kappa\tau + \tau')) - \kappa(\sigma(-\kappa' - \kappa^2)$$

$$-\omega(\kappa\tau + \tau')) + \tau(\Phi(-\kappa' - \kappa^2) - \omega(-\kappa^2 + \kappa' - \tau^2))]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}[(-\kappa^2+\kappa' - \tau^2)(-\kappa\sigma - \tau\omega)+(-\kappa\sigma+\tau\Phi)(-\kappa' - \kappa^2)$$

$$+\kappa(\Phi - \omega)(\kappa\tau+\tau')]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}[(\kappa^2 - \kappa'+\tau^2)(\kappa\sigma+\tau\omega)+(-\tau\Phi+\kappa\sigma)(\kappa' + \kappa^2)+\kappa(\Phi - \omega)(\kappa\tau+\tau')]$$

olup, buradan

$$\tau_\xi = \frac{\sqrt{2}[(\kappa^2-\kappa'+\tau^2)(\kappa\sigma+\tau\omega)+\kappa(\kappa\tau+\tau')(\Phi-\omega)+(\kappa'+\kappa^2)(\kappa\sigma-\tau\Phi)]}{[\tau(2\kappa^2+\tau^2)+\kappa\tau'-\kappa\tau']^2+(\kappa'\tau-\kappa\tau')^2+(2\kappa^3+\kappa\tau^2)^2} \qquad (2.19)$$

elde edilir.

3. BÖLÜM

NB- SMARANDACHE EĞRİSİ

Bu bölümde özel Smarandache eğrilerinden NB- Smarandache eğrisi üzerinde durulmuştur. γ eğrisi ve onun özel NB- Smarandache eğrisinin parametreleri arasındaki bağıntı bulunarak Frenet- Serret elemanları hesaplanmıştır.

3.1. NB- Smarandache Eğrisi

Tanım. 3.1.1. E^3 de birim hızlı regüler bir eğri $\gamma = \gamma$ (s) olsun. Bu eğrinin Frenet üç yüzlüsü {T, N, B} olsun. NB- Samarandache eğrileri

$$\Omega = \Omega\,(s_\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{N} + \mathrm{B}) \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır [2].

γ(s) in ikinci türevi alındığında Smarandache da NB- eğrilerinin Frenet- Serret değişmezlerini

$\gamma = \gamma$ (s) ye göre inceleyelim:

$$\Omega' = \frac{d\Omega}{ds_\Omega}\,\frac{ds_\Omega}{ds}$$

olup, (1.1) ifadesinden Frenet elemanları yerine yazılırsa,

$$\Omega' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\kappa\mathrm{T} - \tau\mathrm{N} + \tau\mathrm{B}) \tag{3.2}$$

elde edilir. Böylece;

$$T_\Omega = \frac{\Omega'}{\|\Omega'\|} \tag{3.3}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(-\kappa T - \tau N + \tau B)}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\kappa^2+\tau^2+\tau^2}}$$

olup, buradan

$$T_\Omega = \frac{-\kappa T - \tau N + \tau B}{\sqrt{\kappa^2+2\tau^2}} \tag{3.4}$$

yazılır. Buradan;

$$\Omega' = T_\Omega \frac{ds_\Omega}{ds} \tag{3.5}$$

$$\frac{ds_\Omega}{ds} = \frac{\Omega'}{T_\Omega}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(-\kappa T - \tau N + \tau B)}{\frac{-\kappa T - \tau N + \tau B}{\sqrt{\kappa^2+2\tau^2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{\kappa^2+2\tau^2}}{\sqrt{2}}$$

olup, buradan

$$\frac{ds_\Omega}{ds} = \sqrt{\frac{\kappa^2+2\tau^2}{2}} \tag{3.6}$$

eşitliği elde edilir.

Ω eğrisinin asli normal vektör alanını ve birinci eğriliğini belirlemek için aşağıdaki hesaplamalar yapılırsa;

$$T_\Omega = \frac{-\kappa T - \tau N + \tau B}{\sqrt{\kappa^2+2\tau^2}}$$

bulunur. Buradan T_Ω nın türevi alınırsa;

$$T_\Omega{}' = \frac{(-\kappa T+\tau B-\tau N)'\left(\sqrt{\kappa^2+2\tau^2}\right)-\left(\sqrt{\kappa^2+2\tau^2}\right)'(-\kappa T+\tau B-\tau N)}{\kappa^2+2\tau^2}$$

$$= \frac{\left(-\kappa' T-\kappa T'+\tau' B+\tau B'-\tau' N-\tau N'\right)\left(\sqrt{\kappa^2+2\tau^2}\right)-\frac{(4\tau\tau'+2\kappa\kappa')(-\kappa T+\tau B-\tau N)}{2\sqrt{\kappa^2+2\tau^2}}}{\kappa^2+2\tau^2}$$

$$= \frac{\left[-\kappa' T-\kappa(\kappa N)+\tau' B+\tau(-\tau N)-\tau' N-\tau(-\kappa T+\tau B)\right]\left(\kappa^2+2\tau^2\right)-\left(2\tau\tau'+\kappa\kappa'\right)(-\kappa T+\tau B-\tau N)}{(2\tau^2+\kappa^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\begin{array}{c}\left(-\kappa' T-\kappa^2 N+\tau' B-\tau^2 N-\tau' N+\tau\kappa T-\tau^2 B\right)\left(\kappa^2+2\tau^2\right)\\ -(-2\tau\tau'\kappa T+2\tau^2\tau' B-2\tau^2\tau' N-\\ \kappa'\kappa^2 T+\kappa'\kappa\tau B-\kappa\kappa'\tau N)\end{array}}{(2\tau^2+\kappa^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\begin{array}{c}\Big[(-2\tau^2\kappa'-\kappa'\kappa^2+2\tau^3\kappa+\tau\kappa^3+2\tau'\tau\kappa+\kappa'\kappa^2)T+(-2\tau^2\kappa^2-\kappa^4-2\tau^4-\kappa^2\tau^2-2\tau'\tau^2-\tau'\kappa^2+\\ 2\tau^2\tau'+\kappa'\kappa\tau\Big)N\\ +(2\tau'\tau^2+\tau'\kappa^2-2\tau^4-\tau^2\kappa^2-2\tau^2\tau'-\kappa'\kappa\tau)]B\end{array}}{(2\tau^2+\kappa^2)^{\frac{3}{2}}}$$

elde edilir. Buradan son eşitlikte işlem kolaylığı açısından T, N, B katsayıları sırası ile,

$$\begin{aligned}\delta_1 &= -2\tau^2\kappa' + 2\tau^3\kappa + \tau\kappa^3 + 2\tau'\tau\kappa\\ \mu_1 &= -3\tau^2\kappa^2 - \kappa^4 - 2\tau^4 - \tau'\kappa^2 + \kappa'\kappa\tau\\ \eta_1 &= \tau'\kappa^2 - 2\tau^4 - \tau^2\kappa^2 - \kappa'\kappa\tau\end{aligned} \qquad (3.7)$$

yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$T_\Omega{}' = \frac{\delta_1 T+\mu_1 N+\eta_1 B}{(2\tau^2+\kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (3.8)$$

elde edilir. Buradan;

$$T_\Omega' = \dot{T}_\Omega \frac{ds_\Omega}{ds}$$

eşitliğinden

$$\dot{T}_\Omega = \frac{T_\Omega'}{\frac{ds_\Omega}{ds}}$$

$$= \frac{\frac{\delta_1 T+\mu_1 N+\eta_1 B}{(2\tau^2+\kappa^2)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{(2\tau^2+\kappa^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\delta_1 T+\mu_1 N+\eta_1 B}{(2\tau^2+\kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\sqrt{2}}{(2\tau^2+\kappa^2)^{\frac{1}{2}}}$$

bulunur. Buradan,

$$\dot{T}_\Omega = \frac{\sqrt{2}(\delta_1 T+\mu_1 N+\eta_1 B)}{(2\tau^2+\kappa^2)^2} \tag{3.9}$$

elde edilir.

Böylece verilen eğrinin birinci eğriliği ve asli normal vektör alanı,

$$\kappa_\Omega = \left\|\dot{T}_\Omega\right\|$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2(\delta_1^2+\mu_1^2+\eta_1^2)}{((2\tau^2+\kappa^2)^2)^2}}$$

olup,

$$\kappa_\Omega = \frac{\sqrt{2}\sqrt{(\delta_1^2+\mu_1^2+\eta_1^2)}}{(2\tau^2+\kappa^2)^2} \tag{3.10}$$

elde edilir. Buradan,

$$N_\Omega = \frac{\dot{T}_\Omega}{\|\dot{T}_\Omega\|}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}(\delta_1 T+\mu_1 N+\eta_1 B)}{(2\tau^2+\kappa^2)^2}}{\frac{\sqrt{2}\sqrt{(\delta_1^2+\mu_1^2+\eta_1^2)}}{(2\tau^2+\kappa^2)^2}}$$

ise

$$N_\Omega = \frac{\delta_1 T+\mu_1 N+\eta_1 B}{\sqrt{(\delta_1^2+\mu_1^2+\eta_1^2)}} \tag{3.11}$$

olarak yazılır.

Diğer taraftan $B_\Omega = T_\Omega \Lambda N_\Omega$ ifadesinden binormal vektör alanı,

$$T_\Omega \Lambda N_\Omega = \frac{1}{\sqrt{2\tau^2+\kappa^2}} \frac{1}{\sqrt{(\delta_1^2+\mu_1^2+\eta_1^2)}} \begin{vmatrix} T & N & B \\ -\kappa & -\tau & \tau \\ \delta_1 & \mu_1 & \eta_1 \end{vmatrix} \tag{3.12}$$

dır. Burada;

$$k = \sqrt{2\tau^2 + \kappa^2} \text{ ve } m = \sqrt{(\delta_1^2 + \mu_1^2 + \eta_1^2)}$$

alınırsa;

$$T_\Omega \Lambda N_\Omega = \frac{1}{km} \begin{vmatrix} T & N & B \\ -\kappa & -\tau & \tau \\ \delta_1 & \mu_1 & \eta_1 \end{vmatrix}$$

olarak elde edilir. Böylece Ω eğrisinin binormal vektör alanı;

$$B_\Omega = \frac{(-\tau\eta_1-\tau\mu_1)T-(-\kappa\eta_1-\tau\delta_1)N+(-\kappa\mu_1+\tau\delta_1)B}{km} \tag{3.13}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi de Ω eğrisinin torsiyonunu hesaplayalım. (3.2) eşitliğinden Ω′ ‘ nın türevi alınırsa;

$$\Omega'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\kappa T - \tau N + \tau B)'$$

olup buradan

$$\Omega''= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\kappa' T - \kappa T' - \tau' N - \tau N' + \tau' B + \tau B') \tag{3.14}$$

dir. Burada (3.14) denkleminde (1.1) ifadesindeki Frenet formülleri yerine yazılırsa;

$$\Omega'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\kappa' T - \kappa(\kappa N) - \tau' N - \tau(-\kappa T + \tau B) + \tau' B + \tau(-\tau N))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\kappa' T - \kappa^2 N - \tau' N + \tau\kappa T - \tau^2 B + \tau' B - \tau^2 N)$$

buradan,

$$\Omega''= \frac{1}{\sqrt{2}}[(-\kappa' + \tau\kappa)T + (-\kappa^2 - \tau' - \tau^2)N + (-\tau^2 + \tau')B] \tag{3.15}$$

elde edilir. (3.15) ifadesinden Ω′′ ’ nin türevini alacak olursak;

$$\Omega'''= \frac{1}{\sqrt{2}}((-\kappa' + \tau\kappa)'T + (-\kappa' + \tau\kappa)T' + (-\kappa^2 - \tau' - \tau^2)'N + (-\kappa^2 - \tau' - \tau^2)N' + (-\tau^2 + \tau')'B + (-\tau^2 + \tau')B')$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[(-\kappa'' + \tau'\kappa + \tau\kappa')T + (-\kappa' + \tau\kappa)(\kappa N) + (-2\kappa\kappa' - \tau'' - 2\tau\tau')N + (-\kappa^2 - \tau' - \tau^2)(-\kappa T + \tau B) + (-2\tau\tau' + \tau'')B + (-\tau^2 + \tau')(-\tau N)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ [(-\kappa'' T + \tau'\kappa T + \tau\kappa' T) + (-\kappa'\kappa N + \tau\kappa^2 N) + (-2\kappa\kappa' N - \tau'' N - 2\tau\tau' N) + (\kappa^3 T + \tau'\kappa T + \tau^2\kappa T - \tau\kappa^2 B - \tau'\tau B - \tau^3 B - 2\tau\tau' B + \tau'' B + \tau^3 N - \tau'\tau N)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,[(-\kappa'' + \tau'\kappa + \tau\kappa' + \kappa^3 + \tau'\kappa + \tau^2\kappa)\mathrm{T} + (-\kappa'\kappa + \tau\kappa^2 - 2\kappa\kappa' - \tau'' - 2\tau\tau' + \tau^3 - \tau'\tau)\mathrm{N} + (-\tau\kappa^2 - \tau'\tau - \tau^3 - 2\tau\tau' + \tau'')\mathrm{B}]$$

olup,

$$\Omega''' = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\kappa^3 - \kappa'' + 2\tau'\kappa + \tau\kappa' + \tau^2\kappa)\mathrm{T} + (\tau^3 + \tau\kappa^2 - \tau'' - 3\tau\tau' - 3\kappa\kappa')\mathrm{N} + (\tau'' - \tau\kappa^2 - \tau^3 - 3\tau\tau')\mathrm{B}] \quad (3.16)$$

elde edilir. Buradan işlem kolaylığı açısından T, N, B 'nin katsayılarını sırası ile

$$\omega_1 = \kappa^3 - \kappa'' + 2\tau'\kappa + \tau\kappa' + \tau^2\kappa$$

$$\Phi_1 = \tau^3 + \tau\kappa^2 - \tau'' - 3\tau\tau' - 3\kappa\kappa' \quad (3.17)$$

$$\sigma_1 = \tau'' - \tau\kappa^2 - \tau^3 - 3\tau\tau'$$

alınır ve (3.17) ifadesi (3.16) da yerine yazılarsa,

$$\Omega''' = \frac{\omega_1\,\mathrm{T} + \Phi_1\mathrm{N} + \sigma_1\mathrm{B}}{\sqrt{2}} \quad (3.18)$$

elde edilir. O halde Ω eğrisinin ikinci eğriliği yani torsiyonu

$$\tau_\Omega = \frac{\det(\Omega', \Omega'', \Omega''')}{\|\Omega''\|^2}$$

olup τ_Ω bağıntısında (3.2), (3.15) ve (3.18) ifadeleri yerine yazılarak gerekli işlemler yapılırsa,

$$\det(\Omega', \Omega'', \Omega''') = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} -\kappa & -\tau & \tau \\ (-\kappa' + \tau\kappa) & (-\kappa^2 - \tau' - \tau^2) & (-\tau^2 + \tau') \\ \omega_1 & \Phi_1 & \sigma_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}[-\kappa\big(\sigma_1(-\kappa^2 - \tau' - \tau^2) - \Phi_1(-\tau^2 + \tau')\big) + \tau\big(\sigma_1(-\kappa' + \tau\kappa) - \omega_1(-\tau^2 + \tau')\big) + \tau(\Phi_1(-\kappa' + \tau\kappa) - \omega_1(-\kappa^2 - \tau' - \tau^2))]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}[(\kappa^2 + \tau' + \tau^2)(\kappa\sigma_1 + \tau\omega_1) + (-\tau^2 + \tau')(\kappa\Phi_1 - \omega_1\tau) + (-\kappa' + \tau\kappa)(\tau\sigma_1 + \tau\Phi_1)]$$

diğer yandan;

$$\|\Omega''\|^2 = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 (-\kappa' + \tau\kappa)^2 + (-\kappa^2 - \tau' - \tau^2)^2 + (-\tau^2 + \tau')^2}^2$$

ise

$$\|\Omega''\|^2 = \frac{1}{2}[(-\kappa' + \tau\kappa)^2 + (-\kappa^2 - \tau' - \tau^2)^2 + (-\tau^2 + \tau')^2]$$

elde edilir. Buradan;

$$\tau_\Omega = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}[(\kappa^2+\tau'+\tau^2)(\kappa\sigma_1+\tau\omega_1)+(-\tau^2+\tau')(\kappa\Phi_1-\omega_1\tau)+(-\kappa'+\tau\kappa)(\tau\sigma_1+\tau\Phi_1)]}{\frac{1}{2}(-\kappa'+\tau\kappa)^2+(-\kappa^2-\tau'-\tau^2)^2+(-\tau^2+\tau')^2}$$

ise

$$\tau_\Omega = \frac{[(\kappa^2+\tau'+\tau^2)(\kappa\sigma_1+\tau\omega_1)+(-\tau^2+\tau')(\kappa\Phi_1-\omega_1\tau)+(-\kappa'+\tau\kappa)(\tau\sigma_1+\tau\Phi_1)]}{\sqrt{2}(-\kappa'+\tau\kappa)^2+(-\kappa^2-\tau'-\tau^2)^2+(-\tau^2+\tau')^2} \quad (3.19)$$

olarak bulunur.

Tanım 3.1.2. E^3 de birim hızlı regüler bir eğri $\gamma = \gamma(s)$ olsun. Bu eğrinin Frenet üç yüzlüsü { T, N, B } olsun. TNB- Smarandache eğrileri

$$\psi = \psi(s_\psi) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathrm{T} + \mathrm{N} + \mathrm{B})$$

şeklinde tanımlanır [2].

Benzer düşünceyle TNB- Smarandache eğrilerinin Frenet- Serret değişmezleri $\gamma = \gamma(s)$ regüler eğrisinin Frenet elemanları ile kolayca elde edilir.

3.2. Örnekler

Örnek 3.2.1. E^3 de bir eğri

$$\alpha = \alpha(s) = \left(4\cos\frac{s}{4\sqrt{2}}, 4\sin\frac{s}{4\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

olsun. Buradan $\gamma(s)$ eğrisinin Frenet elemanları

$$\mathrm{T} = \alpha(s)' = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} sin \frac{s}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} cos \frac{s}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

olup, burudan

$$\mathrm{T} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} sin \frac{s}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} cos \frac{s}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

olur ve α eğrisinin ikinci türevi alınırsa;

$$\alpha(s)'' = \left(-\frac{1}{8}\cos\frac{s}{4\sqrt{2}}, -\frac{1}{8}\sin\frac{s}{4\sqrt{2}}, 0 \right)$$

elde edilir.

$$\mathrm{N} = \frac{\alpha(s)''}{\|\alpha(s)''\|}$$

$$= \frac{-\frac{1}{8}\left(cos\frac{s}{4\sqrt{2}}, sin\frac{s}{4\sqrt{2}}, 0\right)}{\sqrt{\frac{1}{64}\left(sin\frac{s}{4\sqrt{2}}^2 + cos\frac{s}{4\sqrt{2}}^2\right)}}$$

olur buradan;

$$\mathrm{N} = \left(-cos\frac{s}{4\sqrt{2}}, -sin\frac{s}{4\sqrt{2}}, 0\right)$$

elde edilir.

$$\mathrm{B} = \mathrm{T} \wedge \mathrm{N}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1) \begin{vmatrix} i & j & k \\ -sin\frac{s}{4\sqrt{2}} & cos\frac{s}{4\sqrt{2}} & 1 \\ cos\frac{s}{4\sqrt{2}} & sin\frac{s}{4\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(-sin\frac{s}{4\sqrt{2}}\ i + cos\frac{s}{4\sqrt{2}}\ j - \left(sin\frac{s}{4\sqrt{2}}^{2} + cos\frac{s}{4\sqrt{2}}^{2}\right)k)$$

olup, buradan

$$\mathrm{B} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-sin\frac{s}{4\sqrt{2}}\ , cos\frac{s}{4\sqrt{2}}\ , -1\right)$$

elde edilir.

$\alpha(s)$ eğrisi için eğrilik ve torsiyonu aşağıdaki şekilde bulunur;

$$\kappa(\mathrm{s}) = \|\mathrm{T}'(\mathrm{s})\|$$

$$= \sqrt{\frac{1}{64}sin\frac{s}{4\sqrt{2}}^{2} + \frac{1}{64}cos\frac{s}{4\sqrt{2}}^{2} + 0}$$

$$= \frac{1}{8}$$

bulunur. Buradan;

$$\tau(\mathrm{s}) = -< \mathrm{N}, \mathrm{B}' >$$

olup,

$$\mathrm{B}' = -\frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ cos\frac{s}{4\sqrt{2}}\ , -\frac{1}{4\sqrt{2}}\ sin\frac{s}{4\sqrt{2}}\ , 0\ )$$

elde edilir. $\tau(s)$ ifadesinde gerekli işlemler yapılırsa,

$$\tau(s) = -< (-cos\frac{s}{4\sqrt{2}}\ , -sin\frac{s}{4\sqrt{2}}\ , 0\ )\ (\frac{1}{8}\ cos\frac{s}{4\sqrt{2}}\ , \frac{1}{8}sin\frac{s}{4\sqrt{2}}\ , 0\ )>$$

$$= \frac{1}{8}(cos\frac{s}{4\sqrt{2}}^{2} + sin\frac{s}{4\sqrt{2}}^{2})$$

$$= \frac{1}{8}$$

bulunur. Buradan $\alpha(s)$ eğrisinin TN- Smarandache eğrisi aşağıdaki gibi;

$$\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{T}+\mathrm{N})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right.$$

$$\left. + \left(-cos\frac{s}{4\sqrt{2}}, -sin\frac{s}{4\sqrt{2}}, 0\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{4\sqrt{2}} - cos\frac{s}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{4\sqrt{2}} - sin\frac{s}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

elde edilir.

$\alpha(s)$ eğrisinin NB- Smarandache eğrisi şu şekilde;

$$\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{N} + \mathrm{B})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(-cos\frac{s}{4\sqrt{2}}, -sin\frac{s}{4\sqrt{2}}, 0\right)\right.$$

$$\left. -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-sin\frac{s}{4\sqrt{2}}, cos\frac{s}{4\sqrt{2}}, -1\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-cos\frac{s}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}sin\frac{\mathrm{s}}{4\sqrt{2}}, -sin\frac{s}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

elde edilir.

$\alpha(s)$ eğrisinin TNB- Smarandache eğrisi ise;

$$\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{T}+\mathrm{N}+\mathrm{B})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-cos\frac{s}{4\sqrt{2}}, -sin\frac{s}{4\sqrt{2}}, 0\right) -\right.$$

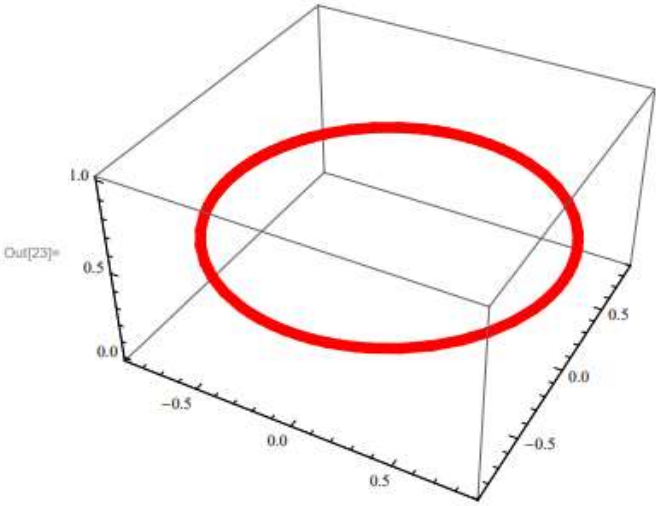
$$\left.\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-sin\frac{s}{4\sqrt{2}}, cos\frac{s}{4\sqrt{2}}, -1\right)\right.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{4\sqrt{2}} - cos\frac{s}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{4\sqrt{2}} - sin\frac{s}{4\sqrt{2}} -\right.$$

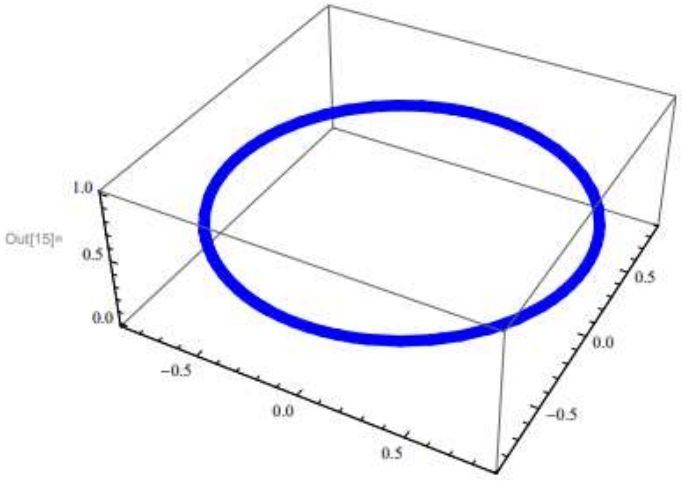
$$\left.\frac{1}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-cos\frac{s}{4\sqrt{2}}, -sin\frac{s}{4\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

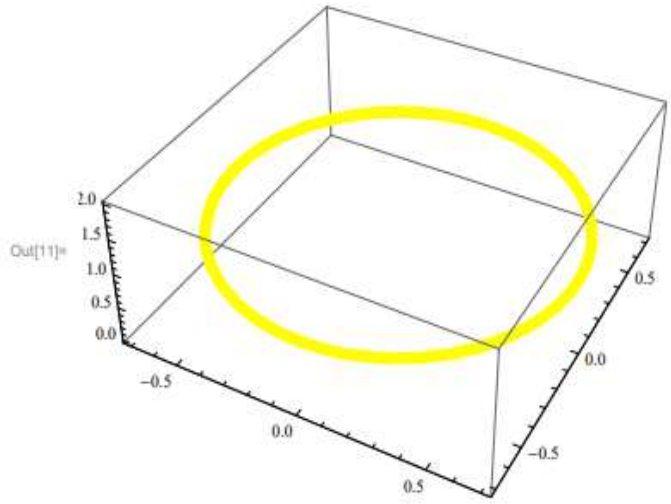
olarak bulunur. $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi ve $\alpha(s)$ eğrisinin TN-, NB- ve TNB- Smarandache eğrilerinin şekilleri aşağıdaki gibi olur.



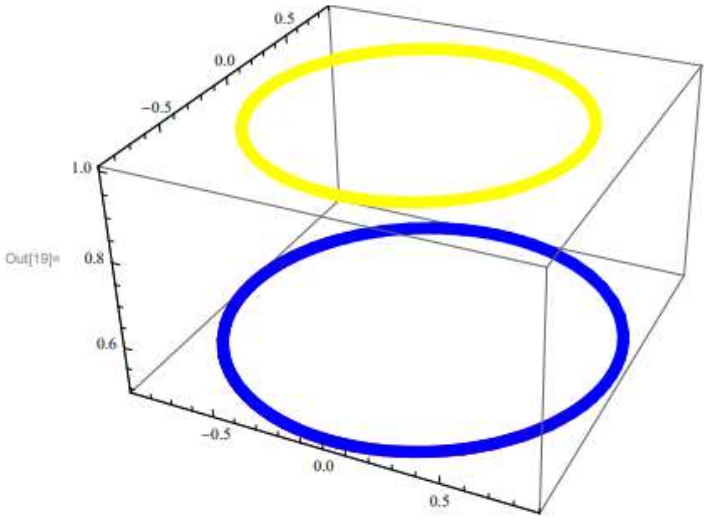
Şekil 3.1. $\alpha(s)$ eğrisi



Şekil 3.2. $\alpha(s)$ eğrisinin TN- Smarandache eğrisi



Şekil 3.3. $\alpha(s)$ eğrisinin NB- Smarandache eğrisi



Şekil 3.4. $\alpha(s)$ eğrisinin TNB- Smarandache eğrisi

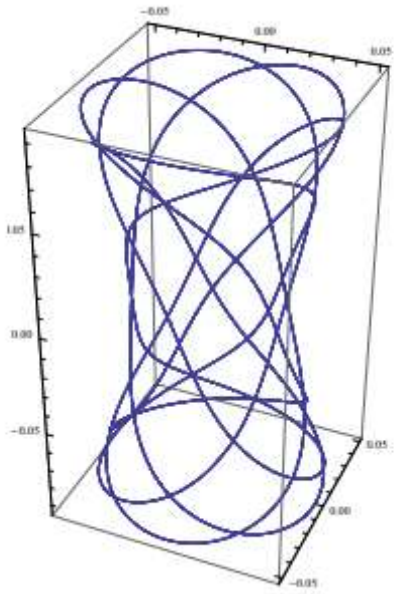
Örnek 3.2.2 E^3 de bir $\gamma = \gamma(s)$ eğrisini göz önüne alalım. Bu eğrinin bileşenleri sırası ile aşağıdaki şekilde olsun [2].

$$\gamma_1 = \frac{9}{208} sin16s - \frac{1}{117} sin36s$$

$$\gamma_2 = -\frac{9}{208} cos16s + \frac{1}{117} cos36s$$

$$\gamma_3 = \frac{6}{65} sin10s$$

verilen $\gamma = \gamma(s)$ eğrisinin grafiği *Şekil 3.5* deki gibi olur.

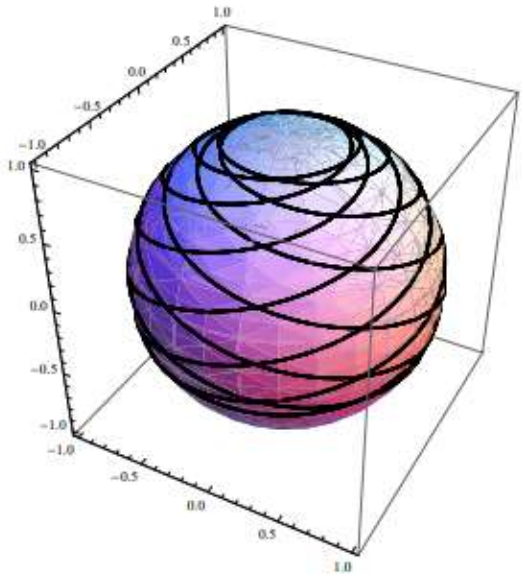


Şekil 3.5. $\gamma(s)$ eğrisi

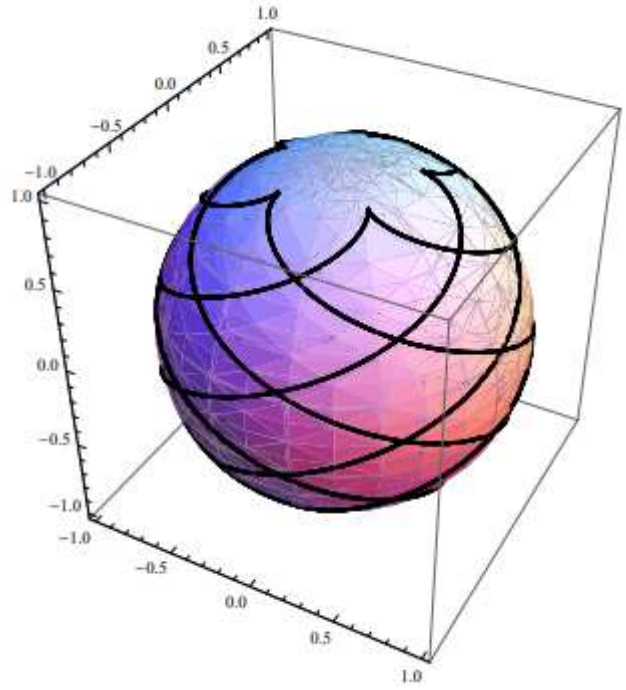
$\gamma = \gamma(s)$ eğrisi için eğrilik ve torsiyon

$$\begin{cases} \kappa(s) = -24sin10s \\ \tau(s) = 24cos10s \end{cases}$$

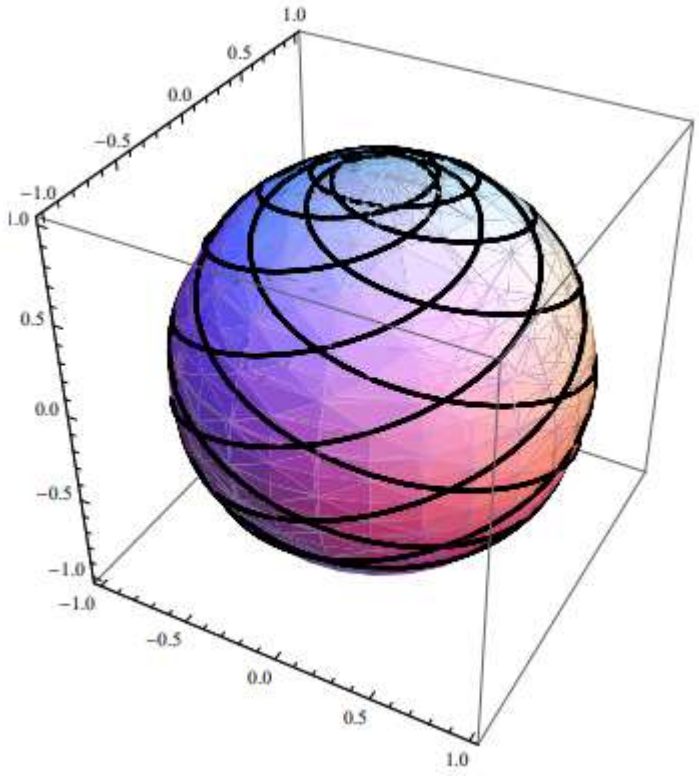
şeklinde hesaplanır. $\gamma = \gamma(s)$ eğrisinin sırasıyla TN- Smarandache, NB- Smarandache ve TNB- Smarandache eğrileride *Şekil 3.6.*, *Şekil 3.7.* ve *Şekil 3.8.* deki gibi olur.



Şekil 3.6. TN- Smarandache eğrisi



Şekil 3.7. NB- Smarandache eğrisi



Şekil 3.8. TNB- Smarandache eğrisi

4. BÖLÜM

BULGULAR VE SONUÇLAR

Bu bölümde özel Smarandache eğrilerinden TN- ve NB- Smarandache eğrileri için Frenet elemanları hakkında bazı bulgu ve sonuçlar elde edilmiştir.

4.1. Bulgular ve Sonuçlar

Bu çalışmada TN- ve NB- Smarandache eğrilerinin Frenet aparatları elde edildi. Öncelikle TN- Smarandache eğrisi ξ olmak üzere;

$$T_{\xi} = \frac{-\kappa T+\kappa N+\tau B}{\sqrt{2\kappa^2+\tau^2}},$$

$$N_{\xi} = \frac{\delta T+\mu N+\eta B}{\sqrt{(\delta^2+\mu^2+\eta^2}},$$

$$B_{\xi} = \frac{(\kappa\eta-\tau\mu)T+(\kappa\eta+\tau\delta)N-(\kappa\mu+\delta\kappa)B}{\text{v.l}},$$

$$\kappa_{\xi} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{(\delta^2+\mu^2+\eta^2)}}{(2\kappa^2+\tau^2)^2},$$

$$\tau_{\xi} = \frac{\sqrt{2}[(\kappa^2-\kappa'+\tau^2)(\kappa\sigma+\tau\omega)+\kappa(\kappa\tau+\tau')(\Phi-\omega)+(\kappa'+\kappa^2)(\kappa\sigma-\tau\Phi)]}{[\tau(2\kappa^2+\tau^2)+\kappa\tau'-\kappa\tau']^2+(\kappa'\tau-\kappa\tau')^2+(2\kappa^3+\kappa\tau^2)^2}$$

olarak elde edildi. Daha sonra NB- Smarandache eğrisi olan Ω eğrisinin Frenet aparatları;

$$T_{\Omega} = \frac{-\kappa T-\tau N+\tau B}{\sqrt{\kappa^2+2\tau^2}},$$

$$\mathrm{N}_{\Omega} = \frac{\delta_1 T+\mu_1 N+\eta_1 B}{\sqrt{(\delta_1^2+\mu_1^2+\eta_1^2)}},$$

$$\mathrm{B}_{\Omega} = \frac{(-\tau\eta_1-\tau\mu_1)\mathrm{T}-(-\kappa\eta_1-\tau\delta_1)\mathrm{N}+(-\kappa\mu_1+\tau\delta_1)\mathrm{B}}{\mathrm{km}},$$

$$\kappa_{\Omega} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{(\delta_1^2+\mu_1^2+\eta_1^2)}}{(2\tau^2+\kappa^2)^2},$$

$$\tau_{\Omega}= \frac{\left[\left(\kappa^2+\tau'+\tau^2\right)(\kappa\sigma_1+\tau\omega_1)+\left(-\tau^2+\tau'\right)(\kappa\Phi_1-\omega_1\tau)+\left(-\kappa'+\tau\kappa\right)(\tau\sigma_1+\tau\Phi_1)\right]}{\sqrt{2}(-\kappa'+\tau\kappa)^2+(-\kappa^2-\tau'-\tau^2)^2+(-\tau^2+\tau')^2}$$

elde edildi.

Ayrıca TN- ve NB- Smarandache eğrilerinin düzlemsel olması için aşağıdaki sonuçlar verildi.

Sonuç 4.1.1. TN- Smarandache eğrisinin düzlemsel olması için

$$\kappa^2 - \kappa' + \tau^2 = 0$$

$$\kappa\tau + \tau' = 0$$

$$\kappa' + \kappa^2 = 0$$

olmalıdır.

Sonuç 4.1.2. NB- Smarandache eğrisinin düzlemsel olması için

$$\kappa^2 - \kappa' + \tau^2 = 0$$

$$\kappa\tau + \tau' = 0$$

$$\kappa' + \kappa^2 = 0$$

olmalıdır.

Bu çalışma Sabban, Bishop, Modifiye ortogonal çatı gibi farklı çatılara uygulanarak, gelecekte yapılacak olan çalışmalara ışık tutabilir.

KAYNAKÇA

1. Turgut, M., Yılmaz, S., 2008. Smarandache Curves in Minkowski space- time, **International Journal of Mathematical Combinatorics, 3:** 51-55.
2. Ali, A. T., 2010. Special Smarandache Curves in the Euclidean Space, **International Journal of Mathematical Combinatorics, Vol.2**, pp. 30-36.
3. Çetin M., Tuncer Y. & Karacan M. K., 2011. Smarandache Curves According to Bishop Frame in Euclidean 3- Space, arXiv: 1106. 3202 v1 [math. DG].
4. Bektaş Ö., & Yüce S., 2013. Special Smarandache Curves According to Darboux Frame in Euclidean 3- Space, **Romanian Journal of Mathematics and Com puter science, 3** (1): 48-59.
5. Bayrak N., Bektaş Ö. & Yüce S.,2012. Special Smarandache Curves inE, arXiv:1 204.566v1 [math.HO].
6. Taşköprü K., & Tosun M., 2014. Smarandache Curves onS, **Boletim da Sociedade paranaense de Matemtica 3 srie. vol:32**, no:1, pp.51-59, ıssn-0 0 37-8712.
7. Hacısalioğlu, H. H., 1983. Diferensiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Fen - Edebiy at Fakültesi Yayınları, Mat. no.7, Malatya.
8. Hacısalihoğlu, H., 2005. Diferensiyel Geometri. Hacısalihoğlu Yayınları, Ankara, 207 s.
9. Sabuncuoğlu, A., 2006. Diferensiyel Geometri. Nobel Yayınları, Ankara, 174 s.
10. Izumiya, S., & Takeuchi, 2004. New Special Curves and Developable Surfaces. **Turkish Journal of Mathematics, 28**(2):153-164.
11. Struik,D. J., 1961. Lectures on Classical Differential Geometry. Dover Publicatio ns, New York, 256 s.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı **:** Gülcan Yazıcı

Uyruğu **:** Türkiye (T.C)

EĞİTİM

Derece	**Kurum**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	Erciyes Üniversitesi, Matematik	
Lisans	Erciyes Üniversitesi, Matematik	2015
Lise	Şehit Hava Pilot Üsteğmen Vedat Evliya Lisesi, Kayseri	2010

YABANCI DİL

İngilizce

YAYINLAR

1. Yüksel, N., & Yazıcı G., 2025. Special Approaches for Special Smarandache Curves in 3-Dimensional Euclidean Space (pp. 126-127). 10. *International Hasankeyf Scientific Research and Innovation Congress,* Mayıs 10-11.